# Fermionic Symmetry in Lattice Gauge Theory

## -格子上の超Yang-Mills理論の構成への試み-

K. Itoh, M. Kato*, H. So
N. Ukita, H. Sawanaka、M. Murata

Niigata Univ., Univ. of Tokyo, Komaba*

2002. 5. 8 at Kyoto

· Nucl.Phys.Proc.Suppl.106:947-949,2002(hep-lat/0110082)
· hep-lat/0112052
· そして、準備中

## 内容

§1. 格子上にSUSY (SYM)をのせる理由と困難
§2. 従来のアプローチ
§3. Our Formalism
  §3.0 Real Staggered Fermion: $\epsilon' = \eta'$ and $\epsilon' = \pm 1$
  §3.1 One Cell Model
  §3.2 Interacting Cells Model
§4. まとめと議論

## §1. 格子上に SUSY (SYM)をのせる理由と困難

### 0. どうして

- 動機 $\cdots$ 非摂動的な ( 構成的な ) 定式化
- 応用 $\cdots$ 数値計算

### 1. 4次元 Super Yang-Mills (SYM) 理論

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ \psi^T C^{-1}(\gamma_\mu D_\mu)\psi$$

---

$C$: Charge Conjugation Matrix, 4次元の場合 ;

$$C^T = -C, \quad C^{-1}\gamma_\mu = (C^{-1}\gamma_\mu)^T$$

---

SUSY 変換

$$\delta A_\mu = \epsilon^T C^{-1}\gamma_\mu\psi$$

$$\delta\psi = F_{\nu\rho}\gamma_{\nu\rho}\epsilon$$

· もし、 Bianchi 恒等式 $D_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0$ と Leibniz則が成り立てば、$O(\psi)$ 項は、任意の次元で相殺

· $O(\psi^3)$ 項は D= 3, 4,( 6,) 10 次元で相殺

## 2. 格子上の困難

$$[\delta_1, \delta_2] \sim P_\mu \gamma_\mu$$

$P_\mu$ : infinitesimal Translation Generator

- Leibniz Rule の破れ

$$\partial(ABC) \neq (\partial A)BC + A(\partial B)C + AB(\partial C)$$

- Bianchi Identity の表現の困難

$$D_\mu F_{\nu\rho} + \text{cyclic} \neq 0?$$

- Degrees of Freedom,
  Euclid Space and Minkowski Space and Doubling Problem

Majorana Condition ($\psi^c = \psi$???)
$\leftarrow$ Degrees of Fermionic Freedom

Two Keys:

Lattice Gauge Inv. and "Majorana" or "Real" Fermion

## 格子 ( SUSY ) 理論固有の問題

fermion doubling

free propagator の極 $\rightarrow 2^D$ degeneracy

Dirac Operator の問題？ $\leftarrow$ no-go 定理 （ カイラリティとの関係 ）

別の見方
格子単位 ( 格子定数 ) は、$a$ でなく、$2a$ ???

間隔 $a$ 毎のサイトにフェルミオン ( スピナー ) を置くと
辺の長さ $2a$ の単位の' 基本格子' には、
$2^D$ 個のフェルミオン (スピナー) が存在する。

格子定数を $2a$ と見て、フレーバーが $2^D$ と思えば、それで Happy か？

別 ( ゲージ場 ) の問題：
ゲージ場の'doubling' ???

$2a$ の単位の' 基本格子' には、$2^D$ 重に縮退したゲージ場がある？

## §2. 従来のアプローチ

D=4 Case

- An Approach by Wilson Fermion

Curci-Veneziano ('87), Taniguchi ('00), Montvay et al ('01)

Yang-Mills on Lattice: One-Plaquette Action
Gaugino on Lattice → 'Majorana' Wilson Fermion

C-V Proposal

Axial and SUSY Ward-Takahashi Ids. ←
(Fermion Mass) *Single* Tuning $\delta M$

Wilson 項
→ induces O$(1/a)$ Chiral and SUSY Breaking
→ Mass Counter Terms, $\delta M_A$ and $\delta M_S$

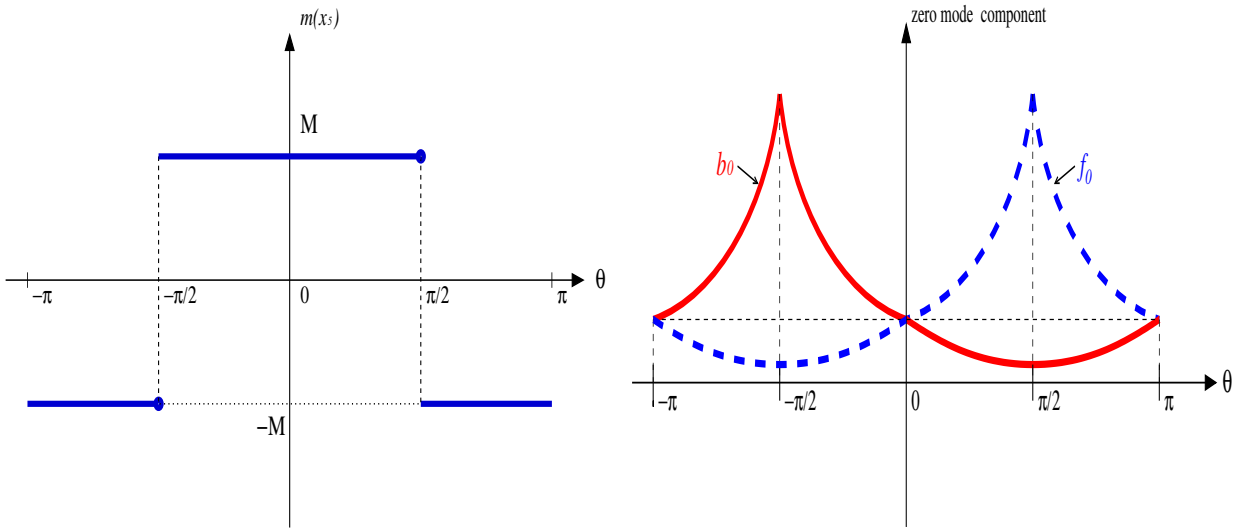
$$\delta M_A = \delta M_S$$

Around SUSY Fixed Point,
Fermion Mass Term is a Unique Relevant
(Gauge Invariant, SUSY Breaking) Operator

- Domain Wall Fermion: Kaplan-Schmaltz ('00)

From C-V Proposal, What we need to consider SUSY on Lattice is to impose the Masslessness of Fermion.

無質量フェルミオンのために、Domain Wall Fermion を使う。




Mass Function, Left- and Right-Handed Zero mode Components

5-Dim. Majorana (Non Local) Condition

$$\Psi(x_\mu, x_5) = (C_4^{-1})^T \bar{\Psi}^T(x_\mu, -x_5)$$

# §3. Our Formalism

## §3.0 Real Staggered Fermion

従来のアプローチだと
格子上で Exact Fermionic Symmetryはない!

格子上のYang-Mills理論を構成するのが難しい単純な理由

- Naiive Lattice Fermion → Doubling

- Introduction of Fermion 'Mass'
(Wilson Term or Domain Wall Mass Term)

→ Gauge Field 'Mass'
(Gauge Symmetry Breaking) by SUSY

Otherwise, Lattice Fermion Doubling
→ generates Gauge Field Doubling??

- Problem of Degrees of Freedom

Another Way is Staggered Fermion (K-S Fermion)

フェルミオンのdoubling $\rightarrow 2^D$ 倍

1自由度per site　($1/2^{D/2}$フレーバー)
$\rightarrow 2^D/2^{D/2} = 2^{D/2}$倍

この自由度を持ったまま、fermionic symmetry を探す。

この $2^{D/2}$ 倍の問題解決は、先。

D 次元クリフォード代数と荷電共役行列：

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \delta_{\mu\nu}\ 1_{2^{[\frac{D}{2}]}\times 2^{[\frac{D}{2}]}}$$

$$C^{-1}\gamma_\mu C = \eta'\gamma_\mu^T$$

$$C^T = \epsilon' C$$

'ユークリッド' 荷電共役条件 (Majorana 条件)：

$$\bar{\psi} = \psi^T C^{-1}$$

フェルミオン運動量項：

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi = \psi^T C^{-1}\gamma_\mu\partial_\mu\psi = \frac{1+\epsilon'\eta'}{2}\psi^T C^{-1}\gamma_\mu\partial_\mu\psi$$

つまり、$\epsilon'\eta' = 1$ の時に、フェルミオンの作用が書ける。

$$\gamma_{D+1}^T C^{-1} = (-)^{\frac{D(D-1)}{2}} C^{-1}\gamma_{D+1} \quad \text{for D even}$$

また、D=2, 10では、Weyl and Majorana が可能！

ユークリッド次元 (D) 依存性：

| D $(mod\ 8)$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\eta'$ | + | + − | − | + − | + | + − | − | + − |
| $\epsilon'$ | + | + − | − | − − | − | − + | + | + + |

D= 1、2、3、4、8 (mod 8) → OK

さて、'Real' Fermion の staggered 化は？

$$\psi_n = V_n \xi_n \ ,$$

$$\bar{\psi}_n = \psi_n^T C^{-1} = \xi_n^T V_n^T C^{-1} = \xi_n^T C^{-1} V_n^\dagger (\eta')^{|n|}$$

ここで、

$$V_n = \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \cdots \gamma_d^{n_d}$$

$$V_n^\dagger \gamma_\mu V_{n+\hat{\mu}} = \eta_\mu(n) = (-)^{\sum_{\nu<\mu} n_\nu}$$

$u_0^T C^{-1} u_0$のため、

$$\xi_n = \begin{cases} \chi_n u_0, & \text{if} \quad \epsilon' = 1 \\ \chi_n^1 u_0^1 + \chi_n^2 u_0^2, & \text{if} \quad \epsilon' = -1 \end{cases}$$

ここで、$u_0^i$は、constant spinorであり、
$\chi_n^i$が、staggered fermionである。

ナイーブフェルミオンを書き換えて、

$$\sum_{n,\mu} \bar{\psi}_n \gamma_\mu \frac{\psi_{n+\hat{\mu}} - \psi_{n-\hat{\mu}}}{2}$$

$$= \; u_0^T C^{-1} u_0 \; \sum_{n,\mu} \eta_\mu(n) \chi_n \chi_{n+\hat{\mu}}$$

for $\epsilon' = \eta' = 1$, D=1,2,8 (mod 8)

$$\sum_{n,\mu} \bar{\psi}_n \gamma_\mu \frac{\psi_{n+\hat{\mu}} - \psi_{n-\hat{\mu}}}{2}$$

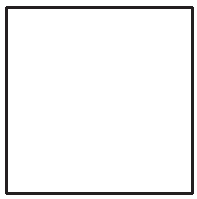
$$= u_0^{1T} C^{-1} u_0^2 \sum_{n,\mu} \epsilon^{ij} (-)^{|n|} \eta_\mu(n) \chi_n^i \chi_{n+\hat{\mu}}^j$$

for $\epsilon' = \eta' = -1$, D=2,3,4 (mod 8)

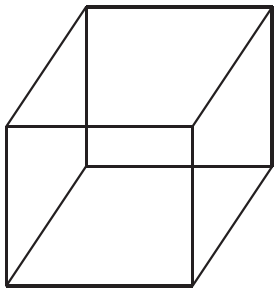
ここで、 $\chi_n$ あるいは、 $\chi_n^i$ が、
(spinorless) staggered fermion!

## §3.1 One Cell Model

Minimal Model (One Cell Model)を考える



(a) D=2



(b) D=3

### •Fundamental Lattice

Coordinates $r_\mu = 0$ or $1 \quad (a = 1)$

### •Gauge Action

$$S_g = -\frac{\beta}{2} \sum_{\substack{n=r(\check{\mu}\check{\nu}) \\ 0<\mu<\nu}} \mathrm{tr}\,(U_{n,\mu\nu} + U_{n,\nu\mu})$$

$$r(\check{\mu}\check{\nu}) \equiv (r_1, r_2, \cdots, r_\mu = 0, \cdots, r_\nu = 0, \cdots)$$

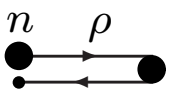
$$S_g = -\frac{\beta}{2} \sum_n \sum_{0<\mu<\nu} \mathrm{tr}\ (\square (-)^{n_\nu}\nu + (\mu \leftrightarrow \nu))$$

$n$, $(-)^{n_\mu}\mu$

•Fermion Action $\epsilon' = \eta' = 1$ Case

$$S_f = \sum_{\substack{n=r(\breve{\rho}) \\ 0<\rho}} b_\rho(n)\ \mathrm{tr}\,\chi_n U_{n,\rho}\chi_{n+\hat{\rho}}U^\dagger_{n,\rho}$$

$$= \sum_{\substack{n=r(\breve{\rho}) \\ 0<\rho}} b_\rho(n)\ \mathrm{tr}\,\chi_n\xi^\rho_n = \sum_{\substack{n=r(\breve{\rho}) \\ 0<\rho}} b_\rho(n)\ \mathrm{tr}\,\xi^{-\rho}_{n+\hat{\rho}}\chi_{n+\hat{\rho}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_n\sum_{\pm\rho} b_{\rho[n]}(n)\ \mathrm{tr}\left[\ \right.$$  $$\left.\ \right]$$


ここで、$r(\breve{\rho}) \equiv (r_1, \cdots, r_{\rho-1}, r_\rho = 0, r_{\rho+1}, \cdots)$

フェルミオン作用の符合係数　$b_\rho(n) = u_0^T C^{-1} u_0\ \eta_\rho(n)$

$\xi^\mu_n$は、 $\chi_n$を $\pm\mu$ 方向に平行移動させた演算子；

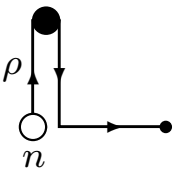
$$\xi^\mu_n = U_{n,\mu}\chi_{n+\hat{\mu}}U^\dagger_{n,\mu}, \quad \xi^{-\mu}_n = U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\chi_{n-\hat{\mu}}U_{n-\hat{\mu},\mu}$$

## •Pre-SUSY Transformation for Gauge Fields

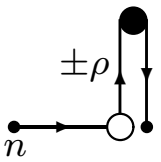
$$\delta U_{n,\mu} = (\alpha \cdot \xi)_{n,\mu} U_{n,\mu} + U_{n,\mu} (\alpha \cdot \xi)_{n+\hat{\mu},\mu}$$

ここで、 $(\alpha \cdot \xi)_{n,\mu} \equiv \sum_\rho \alpha_{n,\mu}^{\rho[n]} \xi_n^{\rho[n]}$, $\rho[n] \equiv (-1)^{n_\rho} \rho$

$$\delta \left( \overset{\sigma\mu}{\underset{n}{\bullet}\!\!\longrightarrow\!\!\underset{n+\sigma\hat{\mu}}{\bullet}} \right) = \sigma \sum_{\pm\rho} [$$




$+$




$]$

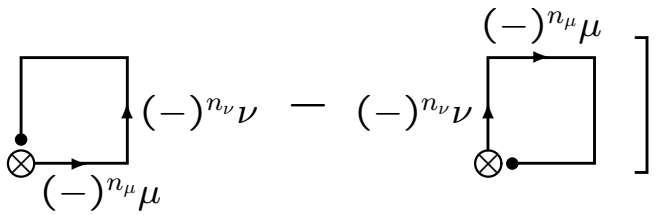
連続理論では、$\delta A_\mu = \epsilon^T C^{-1} \gamma_\mu \psi$

## •Pre-SUSY Transformation for Fermi Fields

$$\delta \chi_n = \tfrac{1}{2} \sum_{0<\mu,\nu} C_n^{(\mu\nu)[n]} \left( U_{n,(\mu\nu)[n]} - U_{n,(\nu\mu)[n]} \right)$$

ここで、 $(\mu\nu)[n] \equiv \mu[n]\nu[n] = (-1)^{n_\mu}\mu \ (-1)^{n_\nu}\nu$

$$\delta \left( \overset{\bullet}{n} \right) = \sum_{0<\mu<\nu} \Bigg[$$




$\Bigg]$

連続理論では、$\delta \psi = \gamma_{\mu\nu} \epsilon F_{\mu\nu}$

## 理論の対称性のチェックの概略

$$S = S_g + S_f,$$

(1) $\delta_U S_f = 0 \leftarrow O(\chi^3)$ 項が消える条件

(2) $\delta S = \delta_U S_g + \delta_\chi S_f = 0 \leftarrow O(\chi^1)$ 項が消える

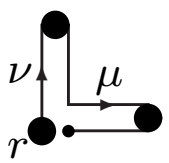
Action Invariance

(3) Path Integral Measure

(4) Pre-SUSY 代数

(1) $\delta_U S_f = 0 \leftarrow O(\chi^3)$ Term Vanishing

$$\mathrm{tr}\left[\ \right] = O(\chi^3) \sim \delta_U S_f$$




$$(-)^{r_\nu}\frac{\alpha^{\nu[r]}_{r,\mu}}{b_\nu(r)} + (-)^{r_\mu}\frac{\alpha^{\mu[r]}_{r,\nu}}{b_\mu(r)} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha^{\mu[r]}_{r,\mu[r]} = 0$$

# of $\alpha$ $= D^2 \quad \rightarrow \quad D(D-1)/2 =$ # of $C$

(2) $\delta S = \delta_U S_g + \delta_\chi S_f = 0$

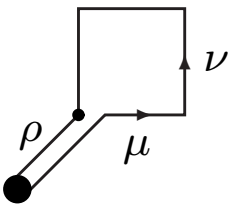
Pre-SUSYによる $S_g$ の変分

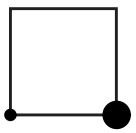
$$\delta S_g = -2\beta \sum_{n=r(\check{\mu}\check{\nu}),0<\mu<\nu} \mathrm{tr}\left((-)^{n_\mu}(\alpha\cdot\xi)_{n,\mu} - (-)^{n_\nu}(\alpha\cdot\xi)_{n,\nu}\right) \times (U_{n,\mu\nu} - U_{n,\nu\mu})$$

Pre-SUSYによる $S_f$ の変分

$$\delta S_f = 2 \sum_{n=r(\check{\mu}\check{\nu}),0<\mu<\nu,0<\rho} b_\rho(n(\rho))\ \mathrm{tr}\,[C_n^{\mu\nu(n)}\xi_n^\rho \times (U_{n,\mu\nu} - U_{n,\nu\mu})]$$

Action を不変にするための条件を得た！



(a) $\rho \neq \mu, \nu$ (b) $\rho = \mu$ or $\nu$

(a)

$$b_\rho(r) C_r^{(\mu\nu)[r]} = \beta[(-)^{r_\mu} \alpha_{r,\mu}^{\rho[r]} - (-)^{r_\nu} \alpha_{r,\nu}^{\rho[r]}]$$

(b)

$$b_\mu(r) C_r^{(\mu\nu)[r]} + b_\nu(r_d) C_{r_d}^{(\mu\nu)[r_d]} = -\beta((-)^{r_\nu} \alpha_{r,\nu}^{\mu[r]} + (-)^{r_\mu} \alpha_{r_d,\mu}^{\nu[r_d]})$$

---

## Combining (1)'s Result

$$C_r^{(\mu\nu)[r]} = \beta(-)^{r_\mu} \frac{\alpha_{r,\mu}^{\nu[r]}}{b_\nu(r)} = -\beta(-)^{r_\nu} \frac{\alpha_{r,\nu}^{\mu[r]}}{b_\mu(r)}$$

---

## Extra Constraints

$$C_r^{(\mu\nu)[r]} + C_r^{(\nu\lambda)[r]} + C_r^{(\lambda\mu)[r]} = 0$$

---

## Numbers of Transformation Parameter

$$D(D-1)/2 \quad \rightarrow \quad D-1 \text{ per Site}$$

## (3) Invariance of Path Integral Measure

二段階で考える;

Step A

$$U^{'}_{n,\mu} = U_{n,\mu}$$

$$\chi^{'}_{n} = \chi_n + C^{\mu\nu}_{n}(U_{n,\mu\nu} - U_{n,\nu\mu})$$

Step B

$$U^{''}_{n,\mu} = e^{\alpha_{n,\mu}\cdot\xi^{'}_{n}} U^{'}_{n,\mu} e^{\alpha_{n+\hat{\mu},\mu}\cdot\xi^{'}_{n+\hat{\mu}}}$$

$$\chi^{''}_{n} = \chi^{'}_{n}$$

$$\xi^{'\rho}_{n} = U^{'}_{n,\rho}\{\chi^{'}_{n+\hat{\rho}} - C^{\mu\nu}_{n+\hat{\rho}}(U^{'}_{n+\hat{\rho},\mu\nu} - U^{'}_{n+\hat{\rho},\nu\mu})\}U^{'\dagger}_{n,\rho}$$

Step Aで、Jacobian $=$ 1は自明。

Step Bでは, もし $\alpha^{\mu}_{n,\mu} = 0$なら、Jacobian は 1

何故なら、$U_{n,\mu}$の変換で元のリンクに接触する可能性

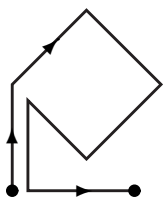
$\rightarrow \alpha^{\mu}_{n,\mu}$の成分 $=$ 0

これは、(1) $O(\chi^3) = 0$ 条件と consistent!

有限変換でも大丈夫か？

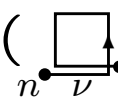
$O(\alpha^2, C^2, \alpha C)$ に条件がでる。( それ以上は出ない。)

一般に、危険なオペレーターは、

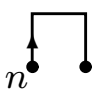


で、プラケットが元のリンクに接触するとやばい！

$$(\alpha^{\mu[n]}_{n,\nu} C^{-\mu[n],\nu}_{n+\mu[n]} - \alpha^{\mu[n]}_{n+\hat{\nu},\nu} C^{-\mu[n],-\nu}_{n+\mu[n]+\nu})($$




$$-$$




$$)$$

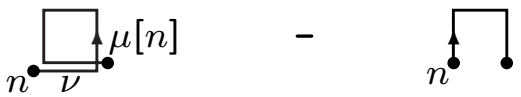
$$= 0$$

従って、次の条件が出る；

$$\alpha^{\mu[n]}_{n,\nu} C^{-\mu[n],\nu}_{n+\mu[n]} - \alpha^{\mu[n]}_{n+\hat{\nu},\nu} C^{-\mu[n],-\nu}_{n+\mu[n]+\nu} = 0.$$

## (4) Pre-SUSY代数のチェック

ゲージ場を二回変換、$\delta_2\delta_1 U_{n,\mu}$




このグラフは、実は上のmeasure不変性での危険なoperatorと同じ！
もちろん、係数のパラメーターは違う( 二つは、独立 )

$$[\delta_2,\delta_1]U_{n,\nu} = [\delta_2,\delta_1](1 + iagA_\nu(x) + \cdots)$$

$$= (\alpha^{1,\mu}_{n,\nu} C^{2,-\mu\nu}_{n+\hat{\mu}} - \alpha^{2,\mu}_{n,\nu} C^{1,-\mu\nu}_{n+\hat{\mu}})$$

$$\times\{(1 + iagA_\nu(x))^2(1 - iagA_\nu(x+\hat{\mu}))$$

$$-(1 + iagA_\nu(x+\hat{\mu})) + O(\chi^2) + \cdots\}$$

$$\sim -2iag\Delta^+_\mu A_\nu(x) + O(\chi^2) + \cdots$$

$O(\chi^2)$項は、ナイーブ極限では、$a$の高次項また、$A_\nu$の$\mu$方向差分以外は、$\cdots$にある。

フェルミオンの方も差分として出来るが、staggeredのせいで複雑 !?

## §3. Our Formalism

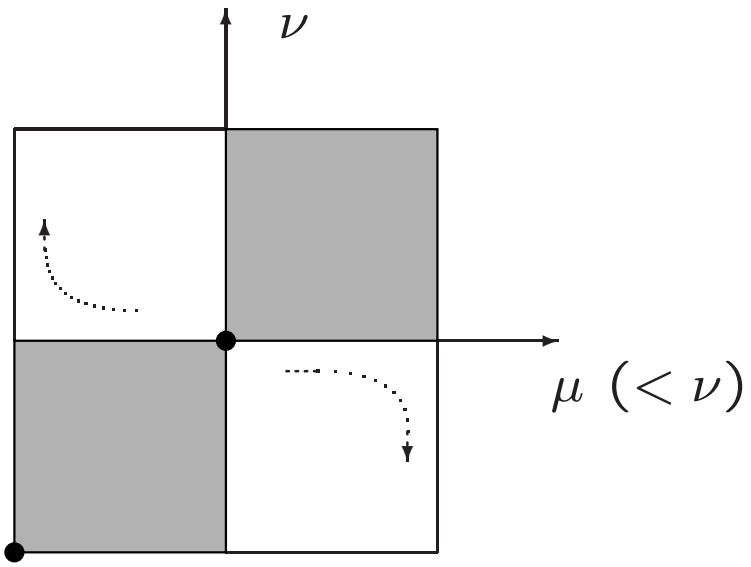
### §3.2 Interacting Cell Model

- Cell Modelをナイーブに全空間に拡張できない

単純な理由

$=$ Pre-SUSY は、 $O(a)$ Symmetryに成り下がる。

一つのサイトにつながった、4種類のプラケットは、
Opposite Circulations を持つ。




Pre-SUSYを課すと、これらを全て、同じ符合で足さざる
おえない。

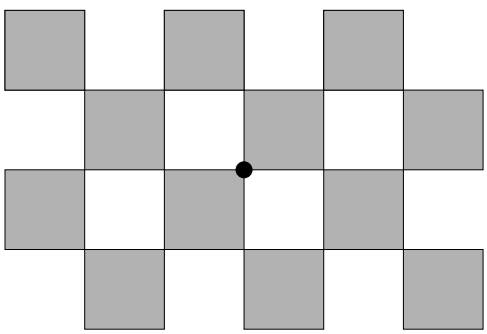
Pre-SUSY 代数の議論で、
もし、Cellでなかったら、プラケットの寄与が逆方向にも存在し、合計で $O(a^2\Delta_\mu^2 A_\nu)$ となる！

- Problem of Degrees of Freedom

Too Many Plaquettes

$\longrightarrow$ Reduction of Plaquettes

Ichimatsu Pattern Lattice



まず、全空間を次の三つのUnitに分ける。

(1) Even Unit は、一つの Cell Model
(2) Odd Unit は、 別の Cell Model
(3) Blank Unit Cell ではない！

Action $= (S_g + S_f)|_{\text{Even}} + (S_g + S_f)|_{\text{Odd}}$

言い換えると、

(A) Link 変数 (ゲージ場) は、
Even Cell か または、Odd Cell 上にある!
$U_{n,\mu}$, $U_{n,\mu}$
(B) Plaquettesは、Even Cell 中か または、
Odd Cellにある！が、 BLANK Unit には、ない！
$U_{n,\mu\nu}$, $U_{n,\mu\nu}$
(C) Site Variables (フェルミオン) は、
Even Cell 上にあり、かつ、 Odd Cell 上にもある！
$\chi_n \sim \chi_n$ and $\chi_n$
(Dual Property : フェルミオン $\chi_n$は、二重人格！)

## Four Invariance Checks Again!

---

### Two Expressions for a Site $n$

$$n = N + r = N' + r' = n'$$

where $N' \equiv N - e + 2r$ and $r' \equiv e - r$ with $e \equiv (1, 1, 1, 1, \cdots)$.

### Extensions; More Parameters

$$(\alpha \cdot \xi)_{n,\mu} = \sum_{\rho} (\alpha^{\rho[n]}_{n,\mu} \xi^{\rho[n]}_{n} + \tilde{\alpha}^{-\rho[n]}_{n,\mu} \xi^{-\rho[n]}_{n})$$

$$\begin{aligned} \delta\chi_n = \quad & \textstyle\sum_{0<\mu<\nu} [C_n^{(\mu\nu)[n]} \left(U_{n,(\mu\nu)[n]} - U_{n,(\nu\mu)[n]}\right)]_{n=N+r} \\ & + \textstyle\sum_{0<\mu<\nu} [C_{n'}^{(\mu\nu)[n']} \left(U_{n',(\mu\nu)[n']} - U_{n',(\nu\mu)[n']}\right)]_{n'=N'+r'} \end{aligned}$$

(1), (3) and (4) $\rightarrow$ The Same Conditions as 1-Cell!

Straightforward Extension

(2) $\rightarrow$ Extra Conditions relating Neighboring Cells;

$$(-)^{r_\mu} b_\mu(n) \tilde{\alpha}^{-\nu[r]}_{n,\mu} + (-)^{r'_\nu} b_\nu(n') \tilde{\alpha}^{-\mu[r']}_{n',\nu} = 0$$

$$\begin{aligned} b_\rho(n) C^{(\mu\nu)[r']}_{n'} &= \beta[(-)^{r'_\mu} \tilde{\alpha}^{-\rho[r']}_{n',\mu} - (-)^{r'_\nu} \tilde{\alpha}^{-\rho[r']}_{n',\nu}] \\ b_\rho(n') C^{(\mu\nu)[r]}_{n} &= \beta[(-)^{r_\mu} \tilde{\alpha}^{-\rho[r]}_{n,\mu} - (-)^{r_\nu} \tilde{\alpha}^{-\rho[r]}_{n,\nu}] \end{aligned}$$

- Number of Transformation Parameters
  $\rightarrow$ $2D-1$ per Site

Independent Parameters;

$$C_n^{(\mu 1)[r]},\ C_n^{(\mu 1)[r']} \text{ and } \tilde{\alpha}_{n',1}^{-1[r']}$$

---

$$\begin{aligned}
C_n^{(\mu\nu)[r]} &= C_n^{(\mu 1)[r]} - C_n^{(\nu 1)[r]} \\
C_{n'}^{(\mu\nu)[r']} &= C_{n'}^{(\mu 1)[r']} - C_{n'}^{(\nu 1)[r']} \\
\alpha_{n,\mu}^{\nu[r]} &= (-)^{r_\mu}\frac{b_\nu(n)}{\beta}\left(C_n^{(\mu 1)[r]} - C_n^{(\nu 1)[r]}\right) \\
\alpha_{n',\mu}^{\nu[r']} &= (-)^{r'_\mu}\frac{b_\nu(n)}{\beta}\left(C_{n'}^{(\mu 1)[r']} - C_{n'}^{(\nu 1)[r']}\right)
\end{aligned}$$

$$\tilde{\alpha}_{n,\mu}^{-\nu[r]} =$$

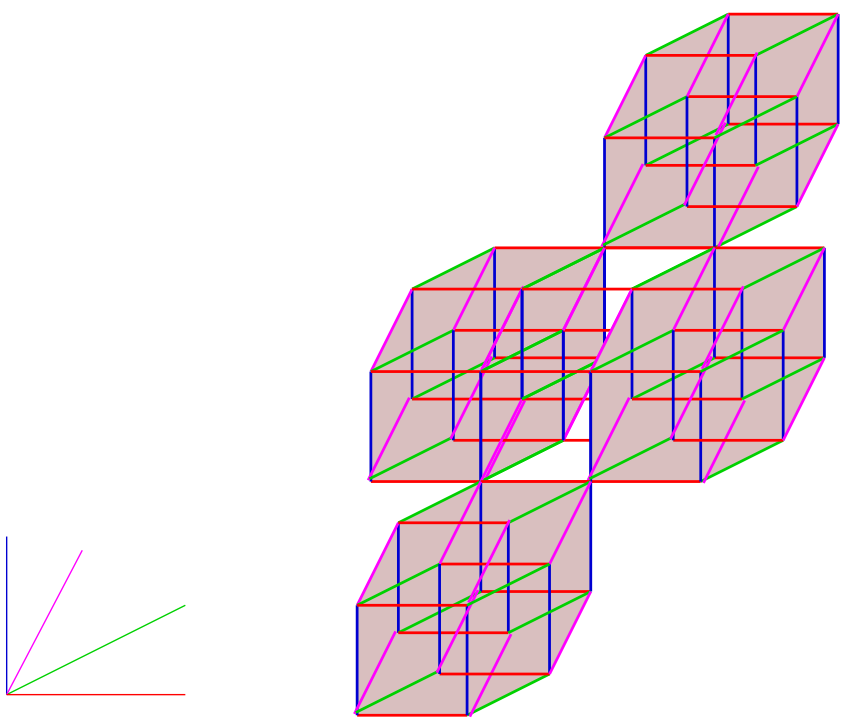
$$-\frac{b_\nu(n')}{b_1(n)}(-)^{r'_1+r_\mu}\tilde{\alpha}_{n',1}^{-1[r']} + (-)^{r_\mu}\frac{b_\nu(n')}{\beta}\left(C_n^{(\mu 1)[r]} - C_{n'}^{(\nu 1)[r']}\right)$$

$$\tilde{\alpha}_{n',\mu}^{-\nu[r']} =$$

$$\frac{b_\nu(n)}{b_1(n)}(-)^{r'_1+r'_\mu}\tilde{\alpha}_{n',1}^{-1[r']} + (-)^{r'_\mu}\frac{b_\nu(n)}{\beta}\left(C_{n'}^{(\mu 1)[r']} - C_n^{(\nu 1)[r]}\right)$$

## §4. Summary and Discussion

- D次元で、 Pre-SUSYを持つOne-Cell Modelを構成
- D次元で、One-Cellを市松模様につないで、Pre-SUSYを持つ模型を全空間に拡張



４次元セルの図

Discussion

- Our Pre-SUSY is NOT BRS Symmetry

$$\delta_U S_g \neq 0$$

- Spinorization of Majorana Staggered Fermion

$\epsilon' = \eta' = 1$ Case (D=1,2,8 mod 8),

We may take $b_\mu(n) = i\eta_\mu(n)$

$\epsilon' = \eta' = -1$ Case (D=2,3,4 mod 8),

We may take $b_\mu(n) = \epsilon^{ij}(-)^{|n|}\eta_\mu(n)$

even site と odd siteで、$\chi^1$と$\chi^2$を振り分ける。

- 次元の問題

スピナー化 ( reconstruction ) と同時に解決

兆候 ; ゲージ場の'Pre-SUSY' 変換が、SUSY 変換を含むためには、
$\alpha^{\nu}_{n,\mu}$ の一つの足は、独立なスピナーの成分の数以上なければならない。( 最低でも、Weyl-Majorana )

$$D \geq 2^{[D/2]-2}$$

D は 11 以下。D=(2),3,4,8,9,10,(11)

- Pre-SUSY(Local)
  $\rightarrow$ SUSY(global) and D-Dim.

まだ、フェルミオンの自由度が多すぎる！

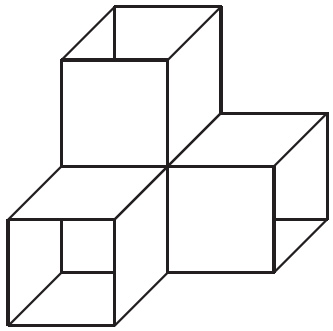
- リンク変数の表現 $\rightarrow$ '実'

$$\delta\chi_n \sim (U_{n,\mu\nu} - U_{n,\nu\mu})$$

$$\text{Im tr}\, U_{n,\mu\nu} = 0$$

- Perturbation (Weak Coupling Expansion)

セル型模型では、フェルミオンをswitch-offすると、
各セルがバラバラになる。
ゲージ場の力が遠くへ伝達できない？
→ パイプ型の存在！



フェルミオンをswitch-offしても、
各セルにバラバラにならずに、かつ、面的には、
市松模様をkeepしている模型！

パイプ模型でも、Pre-SUSYは、存在する！

- Lattice Requirements

(A) 並進不変性 (mod 2)

$$n_\mu \to n_\mu + 2a\hat{\nu}$$

mod 2 ← Ichimatsu Pattern and
Property of $b_\mu(n)$

Momentum Conservation and

Fourier Decomposition

$$\int_{\pi/a}^{\pi/a} dp\chi(p)\exp(ipna) \to \int_{-\pi/(2a)}^{\pi/(2a)} dp'\chi(p')\exp(ip'n'2a)$$

for Fermion and Gauge Field!

(B) '回転対称性'

Symteric under $\pi/2$ Rotation around
a Center of a Cell

## (C) Reflection (O-S) Positivity

Osterwalder-Seiler の議論:

Reflection Map $\Theta$ for $n_D \to -n_D$

定理 2.1
If $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_+$ is Gauge Inv. Operator,

$$\langle\ (\Theta\mathcal{F})\mathcal{F}\ \rangle > 0$$

定理 2.1を満たすには、$S = f + \Theta f + (\Theta g)g$
が必要！$\Theta$ の定義：

$$\Theta\chi_n \to \chi_{\Theta n}$$

$$\Theta\chi^i_n \to \epsilon^{ij}\chi^j_{\Theta n}$$

市松模様だと折り返し可能かつサイトの数が4の倍数！
フェルミオンの符合係数、$b_\rho$の性質から、
O-S Positivity OK!

mod N (N $\geq$ 3 ) や 奇数格子 などは、ダメ！

- Pre-SUSYで、なにかいいことはないの？

  · Indication of 'SUSY'

Ward-Takahashi Identities for Pre-SUSY

$$\delta\langle \mathrm{tr}\,\chi_n\rangle = C_n^{\mu\nu}\langle \mathrm{tr}\,(U_{n,\mu\nu} - U_{n,\nu\mu})\rangle = 0$$

$$\delta\langle \mathrm{tr}\,\chi_n U_{n,\rho\sigma}\rangle = C_n^{\mu\nu}\langle \mathrm{tr}\,(U_{n,\mu\nu} - U_{n,\nu\mu})U_{n,\rho\sigma}\rangle$$

$$+\ \alpha_{n,\rho}^{\kappa}\langle \chi_n U_{n,\kappa}\chi_{n+\hat{\kappa}}U_{n,\kappa}^{\dagger}U_{n,\rho\sigma}\rangle - \cdots = 0$$

$$\cdots\cdots$$

Gaugino-Gaugino の相関関数と
プラケット-プラケット の相関関数に厳密な関係

  · Wilson Loop, Confinement
    and Gluino Condensation

# 数値計算の出番！

# References


Our Approach
K. Itoh, M. Kato, H. So, H. Sawanaka and N. Ukita, hep-lat/0110082; NIIG-DP-01-7; in preparation

D Dim. super Yang-Mills Theory
M. B. Green, J. H. Schwartz and E. Witten, Superstring theory Vol.1 pp244-pp247

Wilson Fermion Approach
G. Curci, G. Veneziano, Nucl.Phys.B292:555,1987

1-Loop Calculation by Wilson Fermion
Y. Taniguchi, Phys.Rev.D63:014502,2001

MC Simulation of Wilson Fermion Approach
DESY-Muenster collaboration, Eur. Phys. J. **C11** (1999) 507; Nucl. Phys. Proc. Suppl. **94** (2001) 787

Domain Wall Fermion Approach
D. B. Kaplan and M. Schmaltz, Chin. J. Phys. **38** (2000) 543

MC Simulation of Domain Wall Fermion Approach
G. T. Fleming, J. B. Kogut, P. M. Vranas, Phys. Rev. **D64** (2001) 034510

Another Approach by K-S Fermion
H. Aratyn, M. Goto and A. H. Zimerman, Nuovo Cimento **A 84** (1984) 255; Nuovo Cimento **A 88** (1985) 225;
H. Aratyn, P. F. Bessa and A. H. Zimerman, Z. Phys.**C27** (1985) 535
H. Aratyn, and A. H. Zimerman, J. Phys. A: Math. Gen. **18** (1985) L487

Staggered Fermion
L. Susskind, Phys. Rev. **D16** (1977) 3031

Dirac-Kaehler Formalism
P. Becher and H. Joos, Z. Phys. **C15** (1982) 343

Bianchi Idntity on Lattice
G. G. Batrouni, Nucl. Phys. **B208** (1982) 467; J. Kiskis, Phys. Rev. **D26** (1982) 429

D Dim. Majorana Condition
T. Kugo and P. Townsend, Nucl. Phys. **B221** (1983) 357

Reflection Positivity
K. Osterwalder and E. Seiler, Ann. of Phys. **110** (1978) 440