

Selection rules of topological solitons from non-invertible symmetries in axion electrodynamics

横倉諒 (慶應義塾大学)

2025. 6. 11

セミナー@京都大学理学部素粒子論研究室

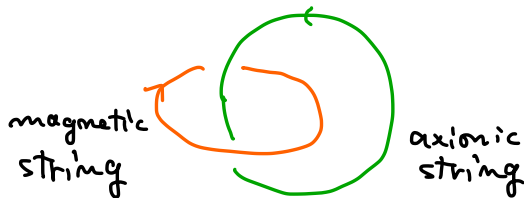
Y. Hidaka, M. Nitta, RY [2411.05434]

に基づく

メッセージ

非可逆対称性 = ソリトンの可能な配位に対する選択則

概要



アクシオン電磁気学におけるソリトンの可能な配位に対する選択則を非可逆対称性を用いて導いた

技術的には

- 磁束渦やアクシオンドメインウォール (分域壁) を低エネルギー極限で非可逆対称性の生成子に同定した
- ソリトンが磁気単極子やアクシオン渦とリンクした配位の相関関数が消えうることを示した

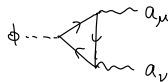
もくじ

- 1 導入 [11 スライド]
- 2 有質量光子の相における可逆な1次対称性 (review) [6 スライド]
- 3 有質量光子の相における非可逆な1次対称性 [3 スライド]
- 4 有質量光子の相における磁束渦とアクシオン渦のリンクの選択則 [4 スライド]
- 5 有質量アクシオン相でのアクシオン分域壁と磁気単極子のリンクの選択則 [6 スライド]

アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 A_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

$$\frac{N}{4\pi^2} \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = \frac{N}{16\pi^2} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$



- アクシオン: カイラル量子異常を持ちうる $U(1)$ 対称性の擬スカラー NG ボソン

特徴

1. 素粒子、宇宙、ハドロンの物理、物性系、弦理論などに遍在する:

QCD アクシオン、インフラトン、ダークマター、 π^0 中間子、トポロジカル物質、モジュライ場、...

2. 光子とのトポロジカル結合をもつ (時空の計量によらない)

係数がカイラル量子異常によって量子化される $N \in \mathbb{Z}$. 高次の量子補正を受けない。

3. アクシオンと光子の質量の有無で様々な相がある

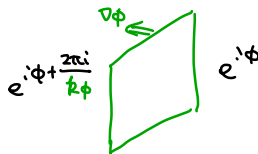
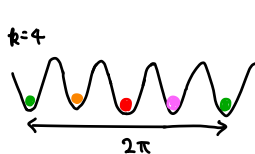
- 有質量アクシオン相: QCD アクシオンなど
- 有質量光子相 (ヒッグス相): トポロジカル超伝導体など

4. 空間的・時間的に広がった物体が相に応じて存在しうる

例えば有質量アクシオンと無質量光子の相での広がった物体は...

アクシオンドメインウォール (分域壁)

(2 + 1) 次元に広がった物体



- アクシオンの運動方程式の古典解で、ポテンシャルの異なる極小点を繋ぐもの
- トポロジカル・ソリトン: 繋いでいる極小点の数 n できまるトポロジカル電荷を持つ
- アクシオン1周期 (後述) のうちのポテンシャルの極小点の数 $k_\phi \in \mathbb{Z}$ で特徴付けられる

(ドメインウォール数と呼ばれる)

- 分域壁上で $\nabla\phi \sim \frac{2\pi n}{k_\phi}$ が局在している

磁気単極子



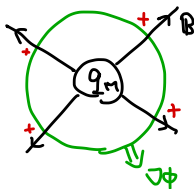
(0 + 1)次元に広がった物体

- 磁束の湧き出し $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi q_M$
- ビアンキ恒等式を破るゲージ場の特異な配位 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 2\pi q_M \delta^3(\mathbf{x})$
- ディラックの量子化条件より、電荷も磁荷も量子化されるべし $q_M \in \mathbb{Z}$

アクシオン・光子結合があると、これらの配位に非自明な相関がある

アクシオン分域壁と磁気単極子のリンク [Sikivie '84]

リンク = 交差していないけれど連続変形で潰すことができないという意味

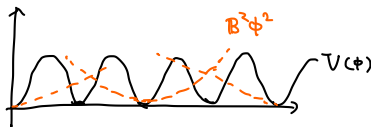


- アクシオン分域壁 + 磁気単極子 → 誘導電荷
- 電氣的ガウスの法則のアクシオン・光子結合による変形が原因 $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$
- アクシオン電磁気学におけるウィッテン効果とも理解できる

この配位は確かに非自明そうだが、そもそもこのような配位は許されるのか？

磁場によるアクシオンポテンシャル生成 [Fischler & Preskill '83]

磁場がアクシオンポテンシャルを誘起するため分域壁が不安定になりうる



- 電氣的ガウスの法則は $E = \frac{N}{4\pi^2} \phi B$ と解ける
- アクシオンの運動方程式に代入すると $|B|^2$ の質量が生成されている

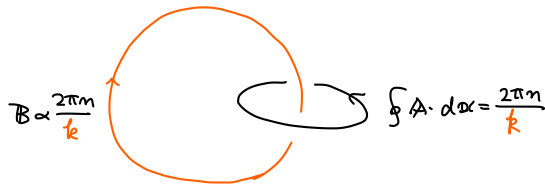
$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - V'(\phi) = \frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N^2}{16\pi^4} B^2 \phi$$

- ポテンシャルの極小点の数 k_ϕ が変形される
- 磁場によってトポロジカルに安定でなくなる分域壁がある
- 応用: 宇宙論におけるアクシオン分域壁問題のモノポールダークマターによる解 [Sato, Takahashi, Yamada '18]

ここまでは有質量アクシオンの相での話。有質量光子の相の広がった物体でも似たようなことが起きる

まず、有質量光子の相での広がった物体について...

磁束渦 (magnetic vortex, string など呼ばれる)



有質量光子の相における $(1+1)$ 次元に広がった物体

- 電磁場の運動方程式の古典解
- トポロジカルソリトン: ヒッグス場の NG モードの巻きつき数で量子化された磁束を持つひも状の配位

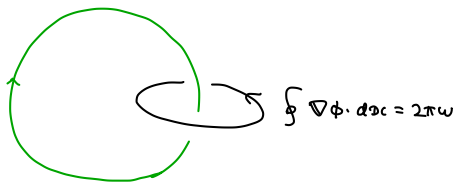
$$\iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{2\pi n}{k} \quad [\text{Abrikosov '56; Nielsen \& Olesen '73}]$$

- $k \in \mathbb{Z}$: $U(1)$ ヒッグス場の電荷 (超伝導だと 2)
- 分数 $\frac{2\pi n}{k}$ Aharonov-Bohm (AB) 位相 $\exp(i \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}) = \exp(i \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}) = \exp(\frac{2\pi i n}{k})$

もう一つ $(1+1)$ 次元に広がった物体がある

アクシオン渦 (axionic vortex, string など呼ばれる)

e.g., 宇宙ひもと分域壁の複合系 [Kogan '93], トポロジカル超伝導体 [Qi, Witten, Zhang '12]

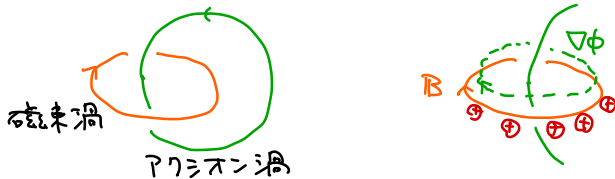


(1 + 1) 次元に広がった物体

- アクシオンが巻きつき数を持つ $\oint \nabla \phi \cdot d\mathbf{x} = 2\pi w \in 2\pi\mathbb{Z}$ [e.g., Naculich '87]
- ビアンキ恒等式が破れる特異な配位 $\oint \nabla \phi \cdot d\mathbf{x} = \iint \nabla \times \nabla \phi \cdot d\mathbf{S} = 0$

トポロジカル結合があるとこれら2つの渦に非自明な相関がある

磁束渦とアクシオン渦がリンクした配位 [e.g., Eto, et al., '24]



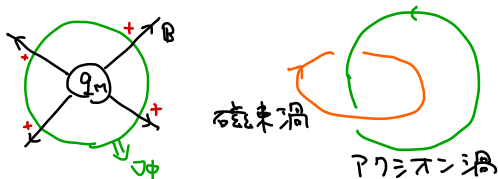
- 共にトポロジカル電荷を持つので、この配位は安定に思える
- しかし、このような配位ができるかどうかは非自明

磁束渦上に分数電荷が誘起する

- アクシオン・光子結合 $\phi F\tilde{F}$ がある元での電氣的ガウスの法則: $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$
- 誘導電荷 $\int \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B} dV = \frac{N}{4\pi^2} \cdot 2\pi w \cdot \frac{2\pi n}{k} = \frac{nNw}{k}$
- 誘導電荷がディラックの量子化条件を破っている $\frac{nN}{k}w \notin \mathbb{Z}$

このような配位は可能なのか？

問: アクシオン電磁気学におけるトポロジカル・ソリトンの可能な配位は？



トポロジカルソリトンが他の物体とリンクする配位の可能性は非自明そう

- ソリトンの崩壊などを伴うダイナミクスの問題？

それともダイナミクスの詳細によらない普遍的な性質があるか？

- 可能な配位 or 禁止された配位を系統的に調べることはできるか？

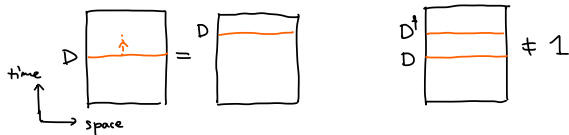
リンクした配位の厳密解を求めたいが、アクシオン・光子結合 $\phi F \tilde{F}$ の非線形性で難しそう

なにか非摂動的な方法を使えないか？

候補: 非可逆対称性と1次対称性

このトークでは断りのない限り対称性は大域的対称性を指すことにします

1. 非可逆対称性とは? [e.g., Bhardwaj & Tachikawa '17]



- 対称性の生成子 D は保存量でハミルトニアンと可換 $\frac{\partial D}{\partial t} \propto [D, H] = 0$
- しかし D は逆元を持たない。特に D はユニタリーでない $D^\dagger D \neq 1$

2. 1次対称性とは? [Gaiotto, et al., '14]

- 1次元的に広がった物体への変換の元での対称性 (通常の対称性は局所演算子に作用する0次対称性)
- 例: 真空中でのウィルソン・ループ $e^{i \int A \cdot d\mathbf{x}}$ に対するAB効果

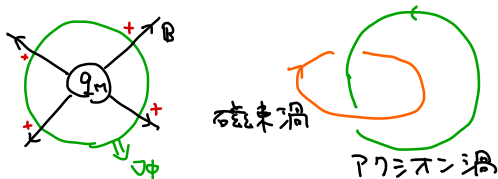
The diagram shows a square with a horizontal orange line, followed by an equals sign and another square with a horizontal orange line. The expression $e^{i \int A \cdot d\mathbf{x}}$ is written next to the second square.

(α : $U(1)$ パラメータ)

対称性の生成子 = AB効果を引き起こす磁束の世界面

保存則: マクスウェル方程式 $\partial^\mu F_{\mu\nu} = 0$

このトークの目的



アクシオンと光子のどちらかが質量を持つアクシオン電磁気学において、

- トポロジカルソリトンをを非可逆対称性の生成子に同定する
- 非可逆対称性を用いて、トポロジカルソリトンと磁気単極子やアクシオン渦とがリンクした配位の可能性を分類する
- リンクが禁止された配位は1次対称性を用いた選択則で分類できることを示す

以下では、ソリトンのトポロジカルな性質に注目するために、低エネルギー極限を考える

- アクシオンと光子の場のゆらぎは 0
- 磁束渦やアクシオン分域壁は無限に薄い物体

説明の都合上、有質量光子の相の場合から説明します

もくじ

- 1 導入 [11 スライド]
- 2 有質量光子の相における可逆な1次対称性 (review) [6 スライド]
- 3 有質量光子の相における非可逆な1次対称性 [3 スライド]
- 4 有質量光子の相における磁束渦とアクシオン渦のリンクの選択則 [4 スライド]
- 5 有質量アクシオン相でのアクシオン分域壁と磁気単極子のリンクの選択則 [6 スライド]

有質量光子の相における可逆な1次対称性 (review) [6 スライド]

Hidaka, Nitta, RY '21 に基づく

セットアップ [e.g., Kogan '93]

光子の質量項 + トポロジカル結合 + アクシオンの運動項 (光子の運動項は無視)

$$S = \int d^4x \left(-\frac{v_a^2}{2} |\partial_\mu \chi - k A_\mu|^2 + \frac{N}{16\pi^2} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{v^2}{2} |\partial_\mu \phi|^2 \right)$$

v : アクシオンの崩壊定数。 $\frac{1}{2!}$ などの統計因子は省略。

- 光子 A_μ : $U(1)$ ゲージ場, 場の強さ $F_{\mu\nu}$

ディラックの量子化条件: 電荷 $\in \mathbb{Z}$, 磁荷 $\frac{1}{2\pi} \int_{S^2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \in \mathbb{Z}$ [詳細]

- $\frac{v_a^2}{2} |\partial_\mu \chi - k A_\mu|^2$: 光子の質量項 (v_a はヒッグス場の真空期待値)

χ : $U(1)$ 電荷 k のヒッグス場の NG ボソンで光子に食べられる

- アクシオン ϕ : 2π シフトで不変な擬スカラー場 $\phi + 2\pi \sim \phi$ ($U(1)$ 対称性の NG ボソン $e^{i\phi}$ であることが由来)
- アクシオン・光子結合: 係数は整数 $N \in \mathbb{Z}$ で量子化 (N : UV理論でカイラルアノマリーを出すディラックフェルミオンの数)

1次対称性を考える時には、光子の質量項をトポロジカル質量項に双対変換すると便利

光子の質量項 $\xleftrightarrow{\text{dual}}$ BF 結合

$$\frac{v^2}{2} |\partial_\mu \chi - \textcolor{brown}{k} A_\mu|^2 \xleftrightarrow{\text{dual}} \frac{\textcolor{brown}{k}}{2\pi} B_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}$$

- $B_{\mu\nu}$: 2階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場

$U(1)$ ゲージ場 = ディラックの量子化条件 $\int \partial_\mu B_{\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} \in 2\pi\mathbb{Z}$ が課されている

- NG ボゾン χ の双対変換で得られる [導出]

双対変換した後の作用は

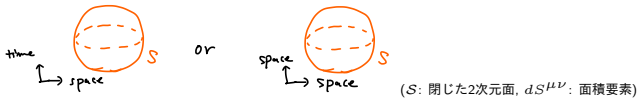
$$\int d^4x \left(\frac{\textcolor{brown}{k}}{2\pi} B_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{\textcolor{blue}{N}}{16\pi^2} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - \frac{v^2}{2} |\partial_\mu \phi|^2 \right)$$

1次対称性は光子の運動方程式から得られる

対称性の生成子

$$U_1(e^{\frac{2\pi i n}{K}}, S) = \exp \left(\frac{2\pi i n}{K} \int_S \left(\frac{k}{2\pi} B_{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi F_{\mu\nu} \right) dS^{\mu\nu} \right), \quad K = \gcd(k, N)$$

- 保存則: 光子の運動方程式 $\partial_\mu \left(\frac{k}{2\pi} \tilde{B}^{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0$
- 対称性の生成子: 素朴には $U(1)$ パラメータ $e^{i\alpha}$ で $\exp \left(i\alpha \int_S \left(\frac{k}{2\pi} B_{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi F_{\mu\nu} \right) dS^{\mu\nu} \right)$ と書けそう



- しかしパラメータに制限がある

$K = \gcd(k, N)$ で決まる位相の時 $e^{i\alpha} = e^{\frac{2\pi i n}{K}} \in \mathbb{Z}_K$ のみ生成子がゲージ不変 (例: $k = 4, N = 2 \rightarrow K = 2$)

- $B_{\mu\nu}$ のディラック量子化条件より、 $e^{i\alpha} = e^{\frac{2\pi i n}{k}} \in \mathbb{Z}_k$
- アキシオンの 2π シフト $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ の不変性より $e^{i\alpha} = e^{\frac{2\pi i n}{N}} \in \mathbb{Z}_N$

U_1 はウィルソン・ループに作用して対称性変換をする

可逆1次対称性のウィルソン・ループへの作用 [Hidaka, Nitta, RY, '21]

ウィルソン・ループ = 試験電荷の世界線

$\mathbb{Z}_K$ 対称性変換

$$\langle U_1(e^{\frac{2\pi i n}{K}}, \mathcal{S}) e^{iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} \rangle = e^{\frac{2\pi i n}{K} \cdot q_e} \langle e^{iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} \rangle$$

(C: ループ)



- ざっくりとした導出: 積分形電氣的ガウスの法則 $\int_S (\frac{k}{2\pi} B_{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi F_{\mu\nu}) dS^{\mu\nu} = q_e$ を U_1 に代入 [詳細]
- 変換で現れた位相因子は電荷の量子化 $q_e \in \mathbb{Z}$ により、きちんと $\mathbb{Z}_K$ に値を持つ
- 1次元的に広がったウィルソン・ループに作用するので1次対称性と呼ばれる
- 可逆な対称性である: 対称性の生成子がユニタリー

1次対称性変換の物理的意味は？

1次対称性変換の2つの意味 [Hidaka, Nitta, RY, '21]



1. 空間的な積分面だと電氣的ガウスの法則: 電荷 q_e の試験電荷から出てくる電束を検出する
2. 時間的・空間的な積分面だと AB 効果: 磁束の世界面をウィルソン・ループに挿入すると位相変換が起きる

後者の意味で、1次対称性の生成子 U_1 は AB 位相 $\mathbb{Z}_K$ を持つ磁束渦に同定できる

しかし、磁束渦のとりうる AB 位相は $K = \gcd(k, N)$ ではなくヒッグス場の電荷 k で決まるはずでは？

1次対称性の生成子 = 磁束渦？

$$\delta \oint_C = e^{\frac{2\pi i m q_e}{K}} \oint_C q_e$$

問題点

- U_1 で表現できる $\mathbb{Z}_K$ AB位相は、元の磁束渦の $\mathbb{Z}_k$ の一部しか再現できていない
つまり、磁束渦の一部しか U_1 で再現できていない

全ての AB 位相 $\mathbb{Z}_k$ を持つ磁束渦を再現する 1次対称性の生成子を作れるか？

もくじ

- 1 導入 [11 スライド]
- 2 有質量光子の相における可逆な1次対称性 (review) [6 スライド]
- 3 有質量光子の相における非可逆な1次対称性 [3 スライド]
- 4 有質量光子の相における磁束渦とアクシオン渦のリンクの選択則 [4 スライド]
- 5 有質量アクシオン相でのアクシオン分域壁と磁気単極子のリンクの選択則 [6 スライド]

有質量光子の相における非可逆な1次対称性 [3 スライド]

Hidaka, Nitta, RY [2411.05434]

$\mathbb{Z}_k$ AB 位相を1次対称性で再現できるか？

$$q_e = e^{\frac{2\pi i n q_e}{k}} \quad \dots ?$$

問題点: アクシオン・光子結合によって対称性の群が落ちている $\mathbb{Z}_K \subset \mathbb{Z}_k$

- $U(1)$ パラメータを用いた $e^{i\alpha}$ 対称性の生成子は、素朴には $\exp\left(i\alpha \int_S \left(\frac{k}{2\pi} B_{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi F_{\mu\nu}\right) dS^{\mu\nu}\right)$
- パラメータへの制限は2つの条件からきていた
 1. $B_{\mu\nu}$ のディラック量子化 $\exp(i\alpha \int \frac{k}{2\pi} B)$ は OK。磁束渦の AB位相 $e^{i\alpha} = e^{\frac{2\pi i n}{k}} \in \mathbb{Z}_k$ を正しく記述
 2. アクシオンのシフト $\phi \rightarrow \phi + 2\pi$ の元での $\exp(\frac{i n N}{2\pi k} \int \phi F)$ の不変性 $e^{\frac{2\pi i n}{k}} \in \mathbb{Z}_N$

アクシオン・光子結合によるAB位相への制限が問題

わかったこと: 1次対称性の可逆性を捨てればこのAB位相への制限を取り除くことができる

2次元トポロジカル場の量子論 (TQFT) を用いる [Choi, Lam, Shao, '22; RY '22]

アクション・光子結合を TQFT の分配関数へ変形する

$$\exp\left(\frac{inN}{2\pi k} \int_S \phi F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}\right) \rightarrow Z[p]^q = \left[\int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}u_\mu \exp\left(-\frac{i}{2\pi} \int_S dS^{\mu\nu} (p\chi w_{\mu\nu} - \chi F_{\mu\nu} - \phi w_{\mu\nu})\right) \right]^q$$

- ざっくりとした導出

- パラメータを既約分数で表す $\frac{nN}{k} = \frac{q}{p}$. 分母 $p > 1$ だとアクションの周期性に問題があった
- 分母の p をむりやり分子に持っていく2次式の変形をする $\frac{1}{p}xy \rightarrow -pab + ax + by$.

この変形に必要な変数を補助場として加えると、TQFT の分配関数が得られる

- χ : 2π 周期性を持つ擬スカラー
- u_μ : $U(1)$ ゲージ場, 場の強さ $w_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} u_{\nu]}$, ディラックの量子化条件 $\int_S w_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \in 2\pi\mathbb{Z}$

- TQFT の分配関数においては p は分子にある: 2π 周期性が明白にある
- 元の表式: ディラックの量子化条件が自明な場合に補助場を積分して得られるナイーブなもの
- この変形でユニタリティがなくなる。TQFT の分配関数は位相因子の和

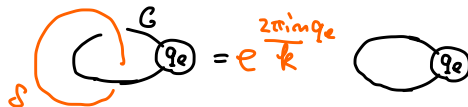
(コサイン $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ がユニタリーでないことと同じ)

非可逆1次対称性の生成子 = $\mathbb{Z}_k$ AB 位相を持つ磁束渦 [Hidaka, Nitta, RY '24]

対称性の生成子

$$D_1(e^{\frac{2\pi i n}{k}}, S) = \exp\left(in \int_S B_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}\right) \times Z[p]^q$$

- アクシオンの 2π 周期性が守られている
- TQFT の分配関数 $Z[p]$ があるため非可逆になっている
- ウィルソン・ループへの作用


$$\oint_S \text{Wilson Loop}(q_e) = e^{\frac{2\pi i n q_e}{k}} \oint \text{Wilson Loop}(q_e)$$

- D_1 は $\mathbb{Z}_k$ AB 位相を持つ磁束渦とみなせる！

D_1 を用いてアクシオン渦とのリンクを調べてみよう

もくじ

- 1 導入 [11 スライド]
- 2 有質量光子の相における可逆な1次対称性 (review) [6 スライド]
- 3 有質量光子の相における非可逆な1次対称性 [3 スライド]
- 4 有質量光子の相における磁束渦とアクシオン渦のリンクの選択則 [4 スライド]
- 5 有質量アクシオン相でのアクシオン分域壁と磁気単極子のリンクの選択則 [6 スライド]

有質量光子の相における磁束渦とアクシオン渦のリンクの選択則 [4 スライド]

Hidaka, Nitta, RY [2411.05434]

非可逆1次対称性の生成子とアクシオン渦のリンク [Hidaka, Nitta, RY '24]

アクシオンの巻きつき数 w が $\frac{nN}{k}w \in \mathbb{Z}$ を満たさない限り相関関数が消える



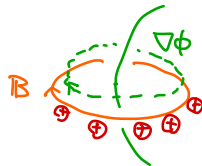
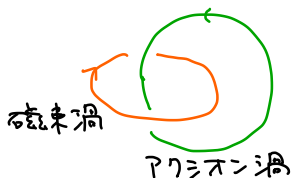
D_1 はアクシオン渦に非可逆に作用する [Choi, et al., '22]

- 技術的にはアクシオンの巻きつき数 $\oint \partial_\mu \phi dx^\mu = 2\pi w$ が存在する元で TQFT の分配関数 $Z[p]$ を計算する

$$Z[p] = \int \mathcal{D}\chi \mathcal{D}u_\mu \exp \left(-\frac{i}{2\pi} \int_S dS^{\mu\nu} (p\chi w_{\mu\nu} - \chi F_{\mu\nu} - u_\mu \partial_\nu \phi) \right)$$

相関関数が消える物理的な意味は？閉じ込め？選択則？

ソリトンに関する選択則？



- $\frac{nN}{k}w$ は磁束渦上に誘起した電荷だと解釈できる $\frac{N}{4\pi^2} \int \nabla\phi \cdot \mathbf{B} dV = \frac{N}{4\pi^2} \cdot 2\pi w \cdot \frac{2\pi n}{k} = \frac{nN}{k}w$
- 誘導電荷が分数だと相関関数が消える → ディラックの量子化条件で禁止された配位？

量子力学では、しばしば対称性を用いた選択則で禁止された遷移振幅 (相関関数) を分類できた

- ソリトンの禁止された配位を対称性によって分類できないか？

わかったこと: リンクした磁束渦とアキシオン渦の禁止された配位を可逆な1次対称性を用いて分類できる

リンクした磁束渦とアクシオン渦の配位に関する選択則 (その1) [Hidaka, Nitta, RY '24]

可逆1次対称性で磁束渦上の誘導電荷を検出する

$$U_1(e^{\frac{2\pi i m'}{K}}) D_2(e^{\frac{2\pi i m'}{K}}) = \oint \partial_\mu \phi dx^\mu = e^{\frac{2\pi i m'}{K}} \cdot \frac{nN}{k} w D_2$$

方針: 磁束渦上の誘導電荷に対して電氣的ガウスの法則を用いる

- 磁束渦 $D_1(e^{\frac{2\pi i n}{K}})$ から出てくる電気力線を検出できるように可逆1次対称性の生成子 $U_1(e^{\frac{2\pi i n'}{K}})$ を置く
- U_1 を D_1 から外して潰そうとする際に D_1 が U_1 に作用し、アクシオンの巻きつき数が現れる
 - D_1 は $U_1 \sim \exp(\frac{2\pi i n'}{K} \cdot \frac{N}{4\pi^2} \iint \phi F)$ の中の A_μ をAB 位相 $\frac{2\pi n}{K}$ だけずらす
 $U_1 \rightarrow U_1 \exp(\frac{2\pi i n'}{K} \cdot \frac{2\pi n}{K} \cdot \frac{N}{4\pi^2} \oint \partial_\mu \phi dx^\mu)$
- アクシオンの巻きつき数を計算すると、結局 U_1 の生成する位相が $\exp(\frac{2\pi i n'}{K} \cdot \frac{nN}{k} w)$ となる

生成された位相に不定性がありうる

リンクした磁束渦とアクシオン渦の配位に関する選択則 (その2) [Hidaka, Nitta, RY '24]

分数誘導電荷があると可逆な1次対称性変換に不定性が生じる

$$U_1(e^{\frac{2\pi i m'}{K}}) D_1(e^{\frac{2\pi i n'}{K}}) = \oint \partial_\mu \phi dx^\mu D_1 = e^{\frac{2\pi i m'}{K} \cdot \frac{nN}{K} w} D_1$$

- U_1 のパラメータは $e^{\frac{2\pi i n'}{K}} \in \mathbb{Z}_K$ なので

生成された位相はパラメータのシフト $n' \rightarrow n' + K$ で不変であるべし

- これが成立するのは $\frac{nN}{K} w \in \mathbb{Z}$ の時のみ
- もし生成された位相にこのシフトに関する不定性があるならば、
その不定性を消すために相関関数自体が消えるべし

可逆1次対称性が非可逆1次対称性で記述されるソリトンの可能な配位を分類する選択則を与える

もくじ

- 1 導入 [11 スライド]
- 2 有質量光子の相における可逆な1次対称性 (review) [6 スライド]
- 3 有質量光子の相における非可逆な1次対称性 [3 スライド]
- 4 有質量光子の相における磁束渦とアクシオン渦のリンクの選択則 [4 スライド]
- 5 有質量アクシオン相でのアクシオン分域壁と磁気単極子のリンクの選択則 [6 スライド]

有質量アクシオン相でのアクシオン分域壁と磁気単極子のリンクの選択則

[6 スライド]

有質量光子相の場合とほぼ同じ議論ですので、適宜置き換えのルールとともに概要を説明します

セットアップ

有質量アクシオン + 無質量光子 + トポロジカル結合

$$S = \int d^4x \left(\frac{k_\phi}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi - \frac{1}{4e^2} |F_{\mu\nu}|^2 + \frac{N}{16\pi^2} \phi F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right)$$

e: 結合定数

低エネルギー極限においてはアクシオンの質量項はトポロジカル質量項で表せる

- ドメインウォール数 k_ϕ のポテンシャル $\cos(k_\phi \phi) \xleftrightarrow{\text{dual}}$ トポロジカル質量項 $\frac{k_\phi}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} C_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$
- $C_{\mu\nu\rho}$ 3階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場。ディラックの量子化が課されている。

有質量光子相の場合との置き換えルールは

- $k \rightarrow k_\phi$
- $B_{\mu\nu} \rightarrow C_{\mu\nu\rho}$

アクシオンの運動方程式からアクシオン分域壁に関する対称性を構成する

0次対称性でアクシオン分域壁を再現できるか？

0次対称性は通常の対称性のこと



- アクシオンの運動方程式 $\partial_\mu \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{k_\phi}{2\pi} C_{\nu\rho\sigma} + \frac{N}{8\pi^2} A_\nu \partial_\rho A_\sigma \right) = 0$,
保存カレント $j^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{k_\phi}{2\pi} C_{\nu\rho\sigma} + \frac{N}{8\pi^2} A_\nu \partial_\rho A_\sigma \right)$
- 可逆な対称性の生成子はゲージ不変性のため $K_\phi = \gcd(k_\phi, N)$ を用いた $\mathbb{Z}_{K_\phi}$ でラベルされる

$$U_0 = \exp \left(\frac{2\pi i n}{K_\phi} \int_V dV^{\nu\rho\sigma} \left(\frac{k_\phi}{2\pi} C_{\nu\rho\sigma} + \frac{N}{8\pi^2} A_\nu \partial_\rho A_\sigma \right) \right)$$

- 0次元的なアクシオン演算子に位相変換する0次対称性 $U_0 e^{i\phi} = e^{i\phi + \frac{2\pi i n}{K_\phi}} U_0$
- やはりアクシオン・光子結合由来の項 $\frac{N}{8\pi^2} A_\nu \partial_\rho A_\sigma$ がある影響で
 U_0 ではドメインウォール数 k_ϕ の分域壁を再現できない
- 置き換えルール: $U_1 \rightarrow U_0$, $K = \gcd(k, N) \rightarrow K_\phi = \gcd(k_\phi, N)$

可逆性を捨てればドメインウォール数が k_ϕ の分域壁を再現できる

$U(1)$ Chern-Simons (CS) 理論を用いた変形 [Choi, Lam, Shao, '22; Córdova & Ohmori, '22]

アクション・光子結合由来の項を CS 理論の分配関数に変形する

$$\exp\left(\frac{inN}{4\pi k_\phi} \int_V dV^{\nu\rho\sigma} A_\nu \partial_\rho A_\sigma\right) \rightarrow Z_{\text{CS}}[p']^{q'} = \left[\int \mathcal{D}u \exp\left(\frac{i}{4\pi} \int_V dV^{\nu\rho\sigma} (-p' u_\nu \partial_\rho u_\sigma + 2u_\nu \partial_\rho A_\sigma)\right) \right]^{q'}$$

- ざっくりとした導出

1. 係数を既約分数で表す $\frac{nN}{k_\phi} = \frac{q'}{p'}$

分母 $p' > 1$ だとゲージ不変性に問題がある

2. 分母の p' をむりやり分子に持つていくために平方完成の逆をする $\frac{1}{p'} x^2 \rightarrow -p' y^2 + 2xy$.

この変形に必要な変数を補助場として加えると、CS理論の分配関数が得られる

- u_μ : $U(1)$ ゲージ場, ディラックの量子化条件 $\int_S \partial_\mu u_\nu dS^{\mu\nu} \in 2\pi\mathbb{Z}$

- CS理論の分配関数においては p' は分子にある: ゲージ不変性が明白
- 元の表式: ディラックの量子化条件が自明な場合に補助場を積分して得られるナイーブなもの
- この変形でユニタリティがなくなる。CS理論の分配関数は位相因子の和

この変形を用いると、ドメインウォール数 k_ϕ を持つ0次対称性の生成子を作れる

非可逆0次対称性の生成子 = ドメインウォール数 k_ϕ の分域壁 [Choi, Lam, Shao, '22; Córdova & Ohmori, '22]

対称性の生成子

$$D_0(e^{\frac{2\pi i n}{k_\phi}}, \mathcal{V}) = \exp\left(in \int_{\mathcal{V}} dV^{\nu\rho\sigma} C_{\nu\rho\sigma}\right) \times Z_{\text{CS}}[p']^{q'}$$

- 対称性の生成子は明白にゲージ不変
- 保存則はアクシオンの運動方程式
- アクシオン演算子に対して $\mathbb{Z}_{k_\phi}$ 位相変換 $e^{i\phi} \rightarrow e^{i\phi + \frac{2\pi i n}{k_\phi}}$

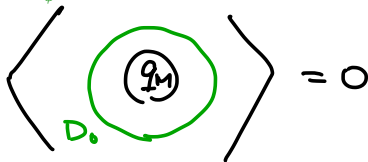
$$\text{Diagram 1: Circle with } e^{i\phi} \text{ and } D_0 \text{ label} = \text{Diagram 2: Circle with } e^{i\phi + \frac{2\pi i n}{k_\phi}} \text{ and } D_0 \text{ label}$$

- アクシオンへの作用より、 D_0 はドメインウォール数 k_ϕ を持つアクシオン分域壁とみなせる

D_0 を用いて磁気単極子のリンクを考えてみよう

非可逆0次対称性と磁気単極子のリンク

磁荷 q_M が $N \cdot \frac{n}{k_\phi} \cdot q_M \in \mathbb{Z}$ を満たさない限り相関関数が消える


$$\left\langle \text{Diagram: Green circle with arrow and } q_M \text{ inside, } D_0 \text{ below it} \right\rangle = 0$$

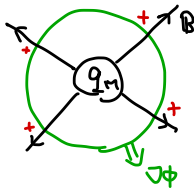
- 置き換えルール: アクシオンの巻きつき数 $w \rightarrow$ 磁荷 q_M

相関関数を計算する方法:

- CS理論の分配関数を直接計算する [Witten '88]
- 1次対称性 (保存則は光子の運動方程式) の生成子を使って選択則を導く

選択則においては誘導電荷が大事だった。アクシオン分域壁上に誘導される電荷を計算してみよう

アクシオン分域壁上にできる誘導電荷



- 電氣的ガウスの法則より、誘導電荷は $\frac{N}{4\pi^2} \nabla\phi \cdot \mathbf{B}$
- アクシオン分域壁上で積分すると一般には分数電荷が現れる

$$\frac{N}{4\pi^2} \int dV \nabla\phi \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \cdot \frac{2\pi n}{k_\phi} \cdot 2\pi q_M = \frac{nN}{k_\phi} q_M$$

- 従って、1次対称性を用いれば同様の議論で $\frac{nN}{k_\phi} q_M$ が分数になる配位は禁止される

わかったことをまとめると

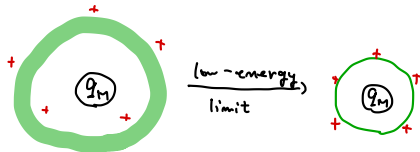
非可逆対称性を用いると、トポロジカル・ソリトンの可能な配位を対称性によって分類できる

$$U_1(e^{\frac{2\pi i m'}{k}}) D_1(e^{\frac{2\pi i m}{k}}) = \oint \partial_\mu \phi dx^\mu = e^{\frac{2\pi i m'}{k}} \cdot \frac{m N_w}{k} D_1$$

- 大事だったこと: ソリトン上に生じる誘導電荷がディラックの量子化条件を満たすかどうか
- 誘導電荷に関する条件を大域的対称性の選択則として理解できた
- 対称性を用いた利点: 模型の詳細によらない対称性で決まる普遍的な性質として、ソリトンの可能な配位を分類できた点

有限の厚みを持つソリトンの選択則に関するコメント

低エネルギー極限の議論を有限の厚みを持つソリトンに適用可能。結局誘導電荷が整数かどうかが大事。



仮定

- 低エネルギー極限をとるまでに自由度が変わる相転移が起きない (ソリトンが相転移によって消えない)

例: アクション分域壁の場合

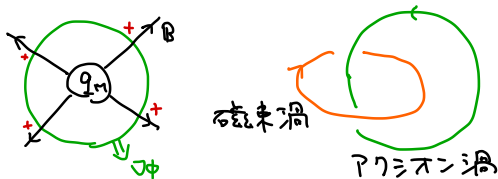
- 有限の厚さをもつソリトン上の誘導電荷 $\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \text{monopole}} d^3x \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$
- 電荷はエネルギースケールによらないので、合計の誘導電荷は低エネルギー極限のものと一致する

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \text{monopole}} d^3x \nabla \phi \cdot \mathbf{B} = \frac{nN}{k_\phi} q_M,$$

低エネルギー極限でも誘導電荷はディラックの量子化条件を満たさなければならない

- 従ってディラックの量子化条件を満たさないソリトンは有限の厚みを持つ場合でも存在できない

まとめ



アキオンと光子のどちらかが質量を持つアキオン電磁気学において、

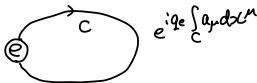
- トポロジカルソリトンを非可逆対称性の生成子に同定した
- 非可逆対称性を用いて、トポロジカルソリトンと磁気単極子やアキオン渦とがリンクした配位の可能性を分類した
- リンクが禁止された配位はソリトン上にディラックの量子化条件を満たさない分数電荷が生じること、そのような配位は 1 次対称性を用いた選択則で分類できることを示した
- 展望: アキオン光子結合のようなトポロジカルな結合を持つ他の理論だとどうか？

5D Maxwell-Chern-Simons 理論、10D, 11D 超重力理論など

ディラックの量子化条件 (1/2)

$U(1)$ ゲージ理論では電荷と磁荷は量子化されるべし

1. 電荷 (ウィルソンループ) の量子化



- ゲージ群が周期性を持つ $U(1)$ なので、ゲージパラメータは巻きつき数を持ちうる

$$\oint \partial_\mu \lambda dx^\mu = 2\pi \quad (\text{Dirac 弦の存在})$$



- ウィルソンループは、巻きつき数を持つゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$ においても不変であるべし

$$e^{iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} \rightarrow e^{iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} e^{iq_e \int_C \partial_\mu \lambda dx^\mu} = e^{iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} e^{2\pi i q_e}$$

- 従って $q_e \in \mathbb{Z}$ であるべし

$U(1)$ のコンパクト性 (周期性) が重要。ゲージ群が $\mathbb{R}_{>0}$ だと巻きつき数がない $\oint \partial_\mu \lambda dx^\mu = 0$ ので $q_e \in \mathbb{R}$.

ディラックの量子化条件 (2/2)

2. 磁荷 (トーフトループ) の量子化



$$\int_S f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi q_m$$

- ストークスの定理よりウィルソンループは面積分で書けるが、
- 積分面 S_C S'_C の取り方に不定性がある



$$e^{i \int_C a_\mu dx^\mu} = e^{i \int_{S_C} f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}} = e^{i \int_{S'_C} f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}}$$

- ウィルソンループは積分面の取り方によらないことを要求



$$e^{i \int_{S_C \cup S'_C} f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}} = e^{2\pi i q_m} = 1$$

- 従って $q_m \in \mathbb{Z}$ であるべし [戻る]

双対変換の導出

χ を双対変換する

1. 補助場 C_μ と H_μ を導入して $\frac{v_a^2}{2}|\partial_\mu\chi - kA_\mu|^2 \rightarrow \frac{v_a^2}{2}|C_\mu|^2 - \frac{1}{2\pi}H^\mu(C_\mu - \partial_\mu\chi + kA_\mu)$ と書き直す
 H^μ の運動方程式 (EOM) で $C_\mu = \partial_\mu\chi - kA_\mu$ となり元の作用に戻れる
2. χ の EOM $\partial_\mu H^\mu = 0$ より、 $H^\mu = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu B_{\rho\sigma}$ と解け、 $H^\mu A_\mu \propto B_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$ が得られる
3. $\frac{1}{2\pi}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\chi\partial_\nu B_{\rho\sigma}$ は全微分なので落ちる (巻きつき数がある配位については作用に $2\pi\mathbb{Z}$ しか出さないように係数を決める)
4. C_μ の EOM より $C^\mu \propto \frac{1}{v_a^2}H^\mu$ と解ける
5. 低エネルギー極限 $v_a \rightarrow \infty$ をとると、 $\frac{1}{v_a^4}|H|^2 \rightarrow 0$ となり、 BF 項が残る

1次対称性変換の導出 0/4

求めたい相関関数

$$\langle U_1(e^{\frac{2\pi i n}{K}}, S) e^{iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} \rangle = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi \mathcal{D}B e^{iS + \frac{2\pi i n}{K} \int_S j_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + iq_e \int_C A_\mu dx^\mu}$$

$$\text{ここで } j_{\mu\nu} = \frac{k}{2\pi} B_{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi F_{\mu\nu}$$

time slice of G

$= e^{\frac{2\pi i n q_e}{K}} (q_e)$

or

$= e^{\frac{2\pi i n q_e}{K}} (q_e)$

対称性の生成子 $\int_S j_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}$ を場の再定義で消去したいが、次の2つの問題がある:

1. 保存量は作用より微分の階数が1つ少ない
2. 保存量は面積分だが作用は時空積分

これらの問題を解決する

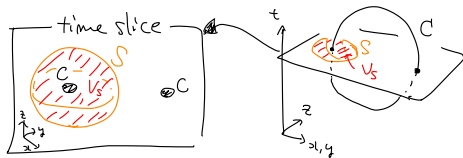
1次対称性変換の導出 1/4

1. むりやり微分の階数を増やす

ガウスの定理

$$\int_S j_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} = \int_{V_S} \partial_\mu \tilde{j}^{\mu\nu} d\tilde{V}_\nu$$

$\partial V_S = S$. $d\tilde{V}_\nu$ は体積要素



- 単に通常のガウスの定理 $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{V_S} \nabla \cdot \mathbf{E} dV$ を4次元で書き換えただけ

1次対称性変換の導出 2/4

2. デルタ関数を用いてむりやり時空積分にする

対称性生成子の時空積分での表式

$$\int_{\mathcal{V}_S} \partial_\mu \tilde{j}^{\mu\nu} d\tilde{V}_\nu = \int d^4x \partial_\mu \tilde{j}^{\mu\nu} \delta_\nu(\mathcal{V}_S), \quad \text{ここで} \quad \delta_\nu(\mathcal{V}_S) = \int_{\mathcal{V}_S} dV_\nu(y) \delta^4(x-y)$$

導出

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_S} \partial_\mu \tilde{j}^{\mu\nu}(y) d\tilde{V}_\nu(y) &= \int d^4x \int_{\mathcal{V}_S} \delta^4(x-y) \partial_\mu \tilde{j}^{\mu\nu}(x) d\tilde{V}_\nu(y) \\ &= \int d^4x \partial_\mu \tilde{j}^{\mu\nu}(x) \left(\int_{\mathcal{V}_S} \delta^4(x-y) d\tilde{V}_\nu(y) \right) \end{aligned}$$

前述の問題を解決できた。対称性の生成子を平方完成で作用に吸収できる:

$$S[\phi, A, B] + \frac{2\pi n}{K} \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{K}{2\pi} \tilde{B}_{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi \tilde{F}_{\mu\nu} \right) \delta_\nu(\mathcal{V}_S) = S \left[\phi, A_\mu - \frac{2\pi n}{K} \delta_\mu(\mathcal{V}_S), B \right]$$

1次対称性変換の導出 3/4

場の再定義 $A_\mu - \frac{2\pi n}{K} \delta_\mu(\mathcal{V}_S) \rightarrow A_\mu$ をすると

対称性生成子の消去

$$\begin{aligned}\langle U_1(e^{\frac{2\pi i n}{K}}, \mathcal{S}) e^{iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} \rangle &= \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\phi \mathcal{D}B e^{iS + \frac{2\pi i n}{K} \int_S j_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} \\ &= e^{\frac{2\pi i n q_e}{K} \int_C \delta_\mu(\mathcal{V}_S) dx^\mu} \langle e^{iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} \rangle\end{aligned}$$

位相因子の $\int_C \delta_\mu(\mathcal{V}_S) dx^\mu$ は何？

1次対称性変換の導出 4/4

ウィルソンループと対称性生成子のリンク数

$$\int_C \delta_\mu(\mathcal{V}_S) dx^\mu = \text{Link}(S, C) \in \mathbb{Z}$$

- $\mathcal{V}_S$ と C の交差数 = S と C のリンク数 (通常のガウスの法則ではリンク数 = 1 になるように積分面をとる)



1次対称性変換

$$\langle U_1(e^{\frac{2\pi i n}{K}}, S) e^{iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} \rangle = e^{i \frac{2\pi i n q_e}{K} \text{Link}(S, C)} \langle e^{iq_e \int_C A_\mu dx^\mu} \rangle$$

Bibliography

Bibliography - I

- [1] F. Wilczek, "Two Applications of Axion Electrodynamics," *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 1799.
(page 5).
- [2] X.-L. Qi, E. Witten, and S.-C. Zhang, "Axion topological field theory of topological superconductors," *Phys. Rev. B* **87** (2013) 134519, [arXiv:1206.1407 [cond-mat.supr-con]].
(pages 5, 11).
- [3] P. Sikivie, "On the Interaction of Magnetic Monopoles With Axionic Domain Walls," *Phys. Lett. B* **137** (1984) 353–356.
(page 8).
- [4] R. Sato, F. Takahashi, and M. Yamada, "Unified Origin of Axion and Monopole Dark Matter, and Solution to the Domain-wall Problem," *Phys. Rev. D* **98** (2018) no. 4, 043535, [arXiv:1805.10533 [hep-ph]].
(page 9).
- [5] W. Fischler and J. Preskill, "DYON - AXION DYNAMICS," *Phys. Lett. B* **125** (1983) 165–170.
(page 9).
- [6] A. A. Abrikosov, "On the Magnetic properties of superconductors of the second group," *Sov. Phys. JETP* **5** (1957) 1174–1182.
(page 10).
- [7] H. B. Nielsen and P. Olesen, "Vortex Line Models for Dual Strings," *Nucl. Phys. B* **61** (1973) 45–61.
(page 10).
- [8] S. G. Naculich, "Axionic Strings: Covariant Anomalies and Bosonization of Chiral Zero Modes," *Nucl. Phys. B* **296** (1988) 837–867.
(page 11).
- [9] I. I. Kogan, "Axions, monopoles and cosmic strings," arXiv:hep-ph/9305307.
(pages 11, 18).

Bibliography - II

- [10] L. Bhardwaj and Y. Tachikawa, "On finite symmetries and their gauging in two dimensions," JHEP **03** (2018) 189, [arXiv:1704.02330 [hep-th]].
(page 14).
- [11] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, "Generalized Global Symmetries," JHEP **02** (2015) 172, [arXiv:1412.5148 [hep-th]].
(page 14).
- [12] E. Cremmer and J. Scherk, "Spontaneous dynamical breaking of gauge symmetry in dual models," Nucl. Phys. **B72** (1974) 117–124.
(page 19).
- [13] Y. Hidaka, M. Nitta, and R. Yokokura, "Topological axion electrodynamics and 4-group symmetry," Phys. Lett. B **823** (2021) 136762, [arXiv:2107.08753 [hep-th]].
(pages 20, 21, 22).
- [14] E. Witten, "Quantum Field Theory and the Jones Polynomial," Commun. Math. Phys. **121** (1989) 351–399.
(page 41).
- [15] T. Banks and N. Seiberg, "Symmetries and Strings in Field Theory and Gravity," Phys. Rev. D **83** (2011) 084019, [arXiv:1011.5120 [hep-th]].
(page 46).