

# de Sitter時空における ブラックホールの熱力学第一法則と宇宙検閲官仮説の検証

2025年4月23日(水) セミナー@京都大学

吉村果保 (東大駒場 D2)

Based on 2411.19535 w/吉田大介 (名古屋大多元数理)

# ブラックホール(BH)の熱力学法則

▷ 曲がった時空の上で量子論の計算 → Hawking放射 [Hawking (1975)]

▷ 無限遠の観測者から見ると、温度  $T$  の輻射を出しているように見える

▷ Hawking温度

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \quad \kappa: \text{表面重力}$$

▷ ブラックホールエントロピー

$$S_{BH} = \frac{c^3}{\hbar} \frac{A}{4G}$$

$G$ : ニュートン定数 ↔ 一般相対論

$\hbar$ : プランク定数 ↔ 量子論

 重力の量子性・ホログラフィー原理…

# ブラックホール(BH)の熱力学法則

ブラックホールは熱力学法則によく似た性質を満たす [Bardeen, Carter, Hawking (1973)]

- ・ 第0法則
  - ・ 静的なBHのホライズン上では表面重力は一定
- ・ 第1法則

$$\frac{\kappa}{8\pi G}\delta A = \delta M + \Phi\delta Q - \Omega_H\delta J$$

$G$ : ニュートン定数

$\Phi_H$ : ポテンシャル

$\Omega_H$ : 角速度

$\kappa$ : 表面重力

$M$ : BHの質量

$Q$ : BHの電荷

$J$ : BHの角運動量

$A$ : BHのホライズンの面積

- ・ 第2法則

$$\Delta A \geq 0$$

# ブラックホールの第一法則

[V. Iyer, R. Wald (1994)]

- Noetherチャージを使ってブラックホールの熱力学法則を導くアプローチ(Iyer-Wald形式)
- 一般座標変換不変な理論では、静的ブラックホールまわりの任意の摂動に関する、第一法則が得られる。
- For Kerr-Newman (charged spinning) ブラックホール

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A_B + \Phi_H \delta Q_B + \Omega_H \delta J$$

$G$  : Newton Constant     $\kappa$  : surface gravity

$\Phi_H$  : Coulomb potential     $\Omega_H$  : angular velocity

$M$  : ADM mass     $Q_B$  : BH charge

$J$  : Komar angular momentum     $A_B$  : area of BH

一般座標変換不変性に対する  
Noetherチャージを用いて作られる

Iyer-Wald 形式

- 摂動の任意の次数
- 摂動が背景場のEONを満たさない場合



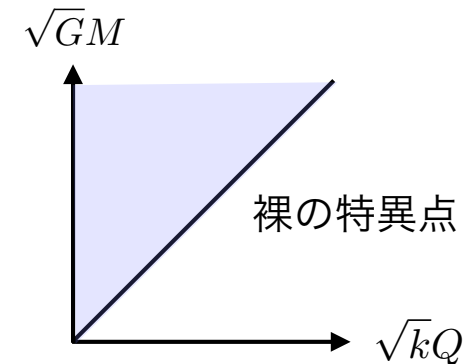
- 高次&off-shellの摂動に関するブラックホール第一法則は、宇宙検閲官仮説のテストに使える！

宇宙検閲官仮説 [Penrose (1969)]

重力崩壊の過程で現れる特異点は、ホライズンによって隠されているべき

Reissner-Nordströmブラックホール

極限条件:  $GM^2 \geq kQ^2$



→ブラックホールに電荷とエネルギーを投入したら、ブラックホールを壊すことはできるのか？ (=裸の特異点は作れるのか)

# BHは壊せるか(裸の特異点を作れるか)の思考実験の歴史

電荷・角運動量を持つブラックホールの中に粒子/物質を投入してBHを壊せるか

▷テスト粒子をBHに落とす思考実験

..... [Wald (1974)]: 極限BHからずれたBHについて、粒子を投げ入れると宇宙検閲官仮説は破れない .....

極限BHにテスト粒子を落とす  $M^2 - \left(\frac{J}{M}\right)^2 - Q^2 = 0$

ブラックホールが壊れる

$$(M^{\text{tot}})^2 - \left(\frac{J^{\text{tot}}}{M^{\text{tot}}}\right)^2 - (Q^{\text{tot}})^2 = 2\frac{M^2 + a^2}{M} \left( \delta M - \frac{a^2}{M^2 + a^2} \delta J - \frac{MQ}{M^2 + a^2} \delta Q \right) \leq 0$$

ブラックホールがホライズンに到達できる条件

$$\delta M - \frac{a^2}{M^2 + a^2} \delta J - \frac{MQ}{M^2 + a^2} \delta Q \geq 0$$

同時には満たされない→極限BHに粒子を投入してBHを壊すことはできない

# BHは壊せるか(裸の特異点を作れるか)の思考実験の歴史

電荷・角運動量を持つブラックホールの中に粒子/物質を投入してBHを壊せるか

▷テスト粒子をBHに落とす思考実験

[Hubeny (1999)]: わずかに極限BHからずれたBHについて、粒子を投げ入れると宇宙検閲官仮説は破れる

わずかに sub-extremal

$$\epsilon = \frac{\sqrt{GM^2 - kQ^2}}{\sqrt{GM}}$$

粒子は以下の不等式を満たすとき、BHの中に入ることができる

$$\delta M \geq \delta Q \Phi_H = \delta Q(1 - \epsilon)$$

$$(M + \delta M) - (Q + \delta Q) \approx -\epsilon \delta Q + \frac{M\epsilon^2}{2}$$

$\delta Q \sim \epsilon M$  程度のとき、  
一次摂動まででは正負を判断できない

# BHは壊せるか(裸の特異点を作れるか)の思考実験の歴史

▷ テスト粒子近似を超えた効果を考えた思考実験

Shellを投入する思考実験

[Jonathan Sorce & Robert M. Wald (2017)]:

電荷・角運動量を持つBH (Kerr Newman BH)に物質を投げ入れるとき、  
物質がnull energy conditionを満たしていれば、裸の特異点を持つ時空は作れない

- ・ 高次元のブラックホール
- ・ 漸近的AdSブラックホール

漸近的de Sitterブラックホールに拡張することはできるか？

# Outline

- Iyer-Wald 形式
- Sorce-Wald 形式 (漸近的平坦)
- dS時空中のBHの質量をどのように定義するか
- Sorce-Wald 形式 (漸近的dS)

- 一般座標変換不変な理論

$$I(\phi) = \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}(\phi(x), \nabla_{\mu}\phi(x) \cdots)$$

ラグランジアン4形式  $\mathcal{L}$

ダイナミカルな場  $\{\phi\} = \{g_{\mu\nu}, \psi\}$

- 摂動

$$\phi(\lambda) = \bar{\phi} + \delta\phi\lambda + \frac{1}{2}\delta^2\phi\lambda^2 + \cdots \quad \bar{\phi} : \text{background fields}$$

- 任意のベクトル  $\xi$  に沿った変換での不変性

$$\mathcal{L}_{\xi}\mathcal{L} = di_{\xi}\mathcal{L}$$

$$\mathcal{L}_{\xi}\mathcal{L} = \underbrace{E(\phi)}_{\text{EoM}} \cdot \mathcal{L}_{\xi}\phi + \underbrace{d\theta}_{\text{境界項}}(\phi; \mathcal{L}_{\xi}\phi)$$

EoM

境界項

# Iyer-Wald形式

- 任意のベクトル  $\xi$  に沿った変換に関するNoetherカレント

$$\mathcal{J}_\xi(\phi) := \theta(\phi; \mathcal{L}_\xi \phi) - i_\xi \mathcal{L}(\phi)$$

$$d\mathcal{J}_\xi = -E(\phi) \cdot \mathcal{L}_\xi \phi \stackrel{E=0}{=} 0$$

- 任意のベクトル  $\xi$  に沿った変換での不変性

$$d\mathcal{J}_\xi(\phi) \stackrel{E=0}{=} 0 \longrightarrow \mathcal{J}_\xi(\phi) = dQ_\xi$$

- Noetherカレント

$$\mathcal{J}_\xi(\phi) := dQ_\xi + C_\xi$$

Noether charge

Source term

$$C_\xi \stackrel{E=0}{=} 0$$

# Iyer-Wald形式

- 任意のベクトル  $\xi$  に沿った変換に関するNoetherカレント

$$\mathcal{J}_\xi(\phi) := \theta(\phi; \mathcal{L}_\xi \phi) - i_\xi \mathcal{L}(\phi)$$

$$d\mathcal{J}_\xi = -E(\phi) \cdot \mathcal{L}_\xi \phi \stackrel{E=0}{=} 0$$

- 任意のベクトル  $\xi$  に沿った変換での不変性

$$d\mathcal{J}_\xi(\phi) \stackrel{E=0}{=} 0 \longrightarrow \mathcal{J}_\xi(\phi) = dQ_\xi$$

- Noetherカレント

$$\mathcal{J}_\xi(\phi) := dQ_\xi + C_\xi$$

Noether charge

Source term

$$C_\xi \stackrel{E=0}{=} 0$$

$$dQ_\xi + C_\xi = \theta(\phi; \mathcal{L}_\xi \phi) - i_\xi \mathcal{L}(\phi)$$



# Iyer-Wald形式

恒等式

$$dQ_\xi + C_\xi = \theta(\phi; \mathcal{L}_\xi \phi) - i_\xi \mathcal{L}(\phi)$$



- $\lambda$  微分
- 超局面  $\Sigma$  上で積分

摂動の1次について

$$\int_{\partial\Sigma} [\delta Q_\xi - i_\xi \theta(\bar{\phi}, \delta\phi)] = \int_\Sigma \omega(\bar{\phi}; \delta\phi, \mathcal{L}_\xi \bar{\phi})_\Sigma - \int_\Sigma [\delta C_\xi + i_\xi (\mathbf{E}(\bar{\phi}) \cdot \delta\phi)]$$

2次以上のオーダーについても恒等式を得ることができる

$$\omega\left(\phi; \frac{\partial\phi}{\partial\lambda_1}, \frac{\partial\phi}{\partial\lambda_2}\right) := \frac{\partial}{\partial\lambda_1} \theta\left(\phi; \frac{\partial\phi}{\partial\lambda_2}\right) - \frac{\partial}{\partial\lambda_2} \theta\left(\phi; \frac{\partial\phi}{\partial\lambda_1}\right) \quad \text{プレシンプレクティックカレント}$$

# ブラックホール第一法則 (漸近的平坦時空)

- Einstein Maxwell

$$\mathcal{L}(\phi) = \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \right] \epsilon$$

$$\epsilon = \sqrt{-g} \, dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

- ダイナミカルな場

$$\{g_{\mu\nu}(\lambda), A^\mu(\lambda)\}$$

- 背景時空: Reissner-Nordstrom BH

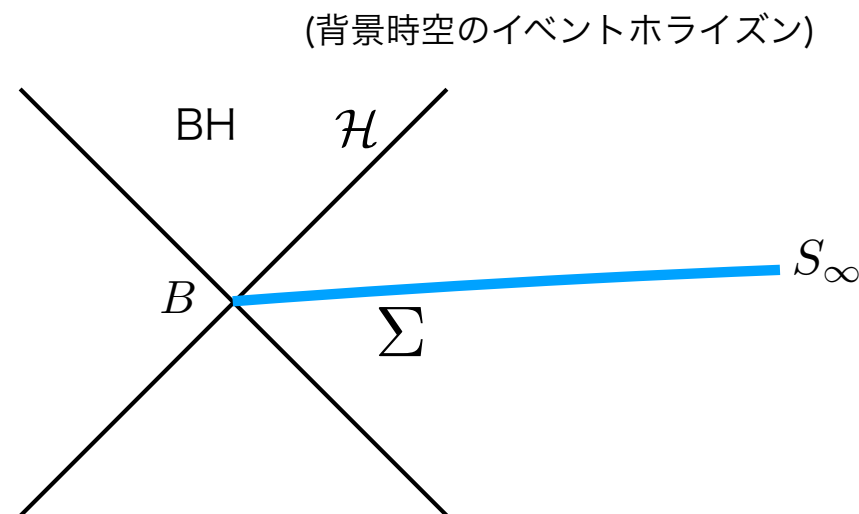
$$\{\bar{M}, \bar{Q}\}$$

- Killing場

$$\xi^\mu = t^\mu$$

- 超局面  $\Sigma$

- 境界: 分岐面  $B$  ( $\xi^\mu|_B = 0$ ) & 空間的無限遠  $S^\infty$



# ブラックホール第一法則 (漸近的平坦時空)

$$\mathcal{L}_\xi \mathcal{L} = -\epsilon \left\{ \underbrace{\frac{1}{16\pi G} (G^{\mu\nu} - 8\pi G T_{EM}^{\mu\nu}) \mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} + \nabla_\mu F^{\mu\rho} \mathcal{L}_\xi A_\rho}_{\text{EoM}} - \underbrace{\frac{1}{16\pi G} \nabla_\rho (\nabla_\mu \mathcal{L}_\xi g^{\rho\mu} + \nabla^\rho \mathcal{L}_\xi g^\mu{}_\mu) - \nabla_\mu (\mathcal{L}_\xi A_\rho F^{\mu\rho})}_{\text{境界項}} \right\}$$

投入する物質のエネルギー

$$T^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} - 8\pi G T^{EM\mu\nu}$$

投入する電荷のカレント

$$j^\mu = \nabla_\nu F^{\mu\nu}$$

$$T_{EM}^{\mu\nu} = F_\mu{}^\rho F_{\nu\rho} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g^{\mu\nu}$$

backgroundのEOMが満たされると0

境界項

$$\theta_\xi := \theta_\xi^{\text{GR}} + \theta_\xi^{\text{EM}}$$

$$\theta_{\mu\nu\rho}^{\text{GR}} \left( \phi; \frac{d\phi}{d\lambda} \right) := \frac{1}{16\pi G} \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} g^{\sigma\alpha} g^{\beta\gamma} \left( \nabla_\beta \frac{dg_{\alpha\gamma}}{d\lambda} - \nabla_\alpha \frac{dg_{\beta\gamma}}{d\lambda} \right)$$

$$\theta_{\mu\nu\rho}^{\text{EM}} \left( \phi; \frac{d\phi}{d\lambda} \right) := -\epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} F^{\sigma\alpha} \frac{dA_\alpha}{d\lambda}$$

$$Q_\xi := Q_\xi^{\text{GR}} + Q_\xi^{\text{EM}}$$

$$(Q_\xi^{\text{GR}})_{\mu\nu} := -\frac{1}{16\pi G} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^\rho \xi^\sigma$$

$$(Q_\xi^{\text{EM}})_{\mu\nu} := -\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \xi^\lambda A_\lambda$$

$$(C_\xi)_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} (T_\lambda{}^\sigma + A_\lambda j^\sigma) \xi^\lambda$$

# ブラックホール第一法則 (漸近的平坦時空)

$$\int_{\partial\Sigma} [\delta Q_\xi - i_\xi \theta(\bar{\phi}, \delta\phi)] = \int_\Sigma \omega(\bar{\phi}; \delta\phi, \mathcal{L}_\xi \bar{\phi})_\Sigma - \int_\Sigma [\delta C_\xi + i_\xi(\mathbf{E}(\bar{\phi}) \cdot \delta\phi)]$$

- 分岐面からの寄与 ( $\xi^\mu|_B = 0$ ) → 第2項 0

$$\int_B Q_\xi^{\text{GR}} = -\frac{1}{16\pi G} \int_B \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \nabla^{[\rho} \xi^{\sigma]} \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu = \frac{\kappa}{8\pi G} A_B$$

$$\int_B Q_\xi^{\text{EM}} = - \int_B \star \mathbf{F} \xi^\rho \bar{A}_\rho = \Phi_H Q_B$$

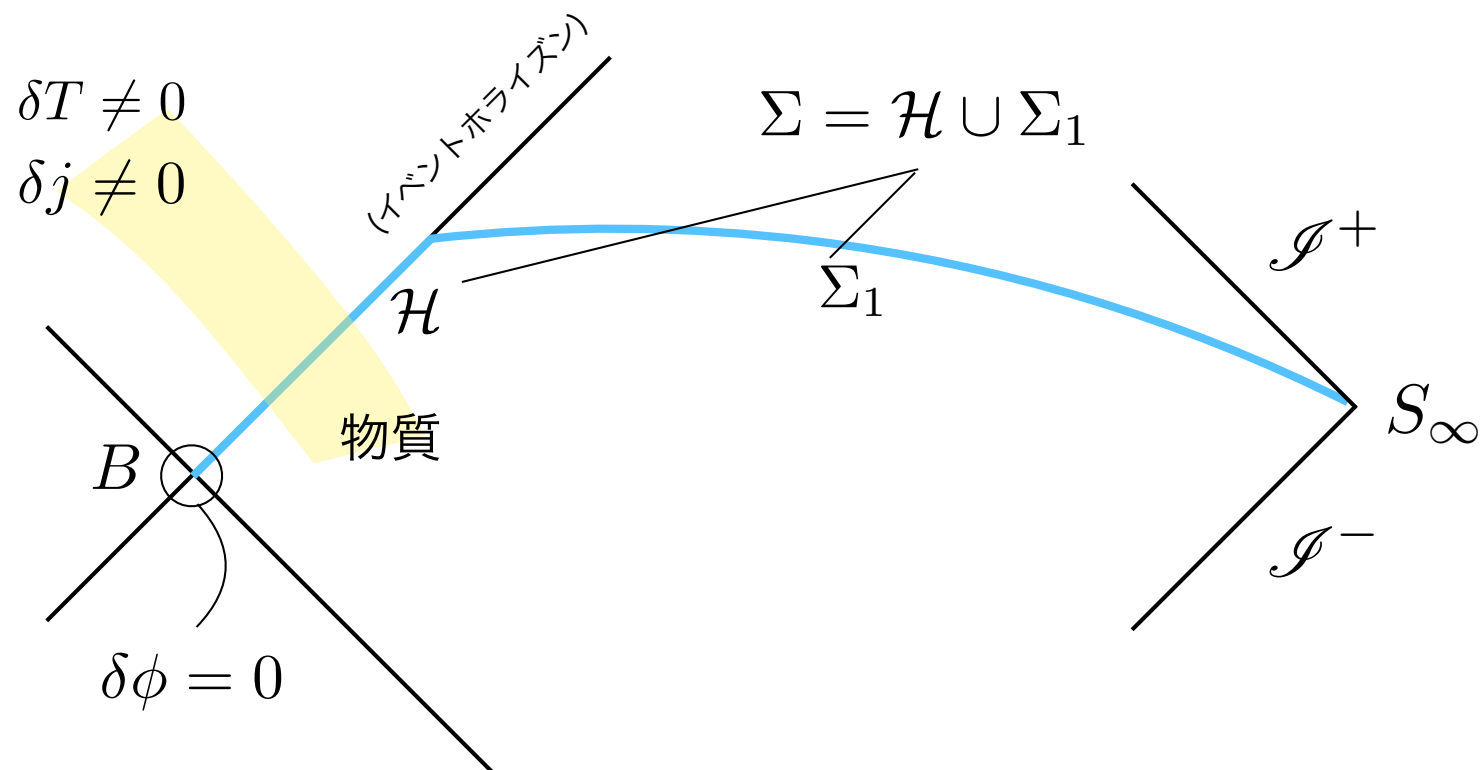
- 空間的無限遠

$$\int_B \left( Q_\xi^{\text{GR}} - i_\xi \theta^{\text{GR}}(\bar{\phi}, \delta\phi) \right) = M$$

# Outline

- Iyer-Wald 形式
- Sorce-Wald 形式 (漸近的平坦)
- dS時空中のBHの質量をどのように定義するか
- Sorce-Wald 形式 (漸近的dS)

# 漸近的平坦時空でのSorce-Wald formalism



投入した物質によって、時空がどう変化したかを見たい

# 漸近的平坦時空でのSorce-Wald formalism

$$\int_{\partial\Sigma} [\delta Q_\xi - i_\xi \theta(\bar{\phi}, \delta\phi)] = \int_\Sigma \omega(\bar{\phi}; \delta\phi, \mathcal{L}_\xi \bar{\phi})_\Sigma - \int_\Sigma [\delta C_\xi + i_\xi (\mathbf{E}(\bar{\phi}) \cdot \delta\phi)]$$



- 背景場は運動方程式を満たす
- $\xi$  は背景時空のキリングベクトル
- 分岐面で摂動はない
- $\mathcal{L}_\xi \bar{A} = 0$

$$\underbrace{\int_{\partial\Sigma} [\delta Q_\xi - i_\xi \theta(\phi, \delta\phi)]}_{\delta M \text{ のみ}} = - \int_\Sigma \delta C_\xi \quad (C_\xi)_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} (T_\lambda{}^\sigma + A_\lambda j^\sigma) \xi^\lambda$$

$$- \int_\Sigma \delta C_\xi = - \int_\Sigma \delta \left( \frac{1}{3!} \bar{\epsilon}_{\alpha\mu\nu\rho} (A_\beta \delta j^\alpha + \delta T_\beta{}^\alpha) \xi^\beta \right) \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu \wedge \mathbf{d}x^\sigma$$

ホライズンを通る全電磁フラックス

BHの中に投入するエネルギー

$$\delta M - \Phi_H \delta Q \propto \int_{\mathcal{H}} \delta T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0$$

**Null energy condition**

$k^\mu$ : 未来方向のホライズンに垂直なヌルベクトル

# 二次の摂動に関する恒等式の評価

$$\int_{\partial\Sigma} [\delta^2 Q_\xi - i_\xi \delta \theta(\phi, \delta\phi)] = \int_\Sigma \omega(\bar{\phi}; \delta\phi, \mathcal{L}\delta\phi) - \int_\Sigma [\delta^2 C_\xi - i_\xi (\delta \mathbf{E}(\bar{\phi}) \cdot \delta\phi)]$$

- 背景場は運動方程式を満たす
- $\xi$  は背景時空のキリングベクトル
- 分岐面で摂動は消える
- $\mathcal{L}_\xi \bar{A} = 0$

$$\delta^2 M = \mathcal{E}_\Sigma - \int_\Sigma i_\xi (\delta \mathbf{E} \cdot \delta\phi) - \int_\Sigma \delta^2 C_\xi$$

$$\delta^2 M = -\frac{\kappa}{8\pi G} \delta^2 A_B^{RN} + \underbrace{(\text{positive})}_{\geq 0} + \Phi_H \delta^2 Q + \int_{\mathcal{H}} \underbrace{\epsilon^{(3)} \delta^2 T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu}_{\geq 0}$$

Null energy condition

$$\delta^2 M - \Phi_H \delta^2 Q \geq \delta^2 A_B^{RN} \quad k^\mu: \text{未来方向のホライズンに垂直なヌルベクトル}$$



摂動の2次では、カノニカルエネルギーが残る

$$\mathcal{E}_{\Sigma}(\bar{\phi}; \delta\phi) = \mathcal{E}_{\mathcal{H}_1}^{\text{GR}}(\bar{\phi}; \delta\phi) + \mathcal{E}_{\mathcal{H}_1}^{\text{EM}}(\bar{\phi}; \delta\phi) + \mathcal{E}_{\Sigma_1}(\bar{\phi}; \delta\phi),$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}_1}^{\text{GR}}(\bar{\phi}; \delta\phi) = \int_{\mathcal{H}_1} \omega^{\text{GR}}(\bar{\phi}; \delta\phi, \mathcal{L}_{\xi}\delta\phi) \longrightarrow \text{ホライズンに入射する重力波のエネルギー}$$

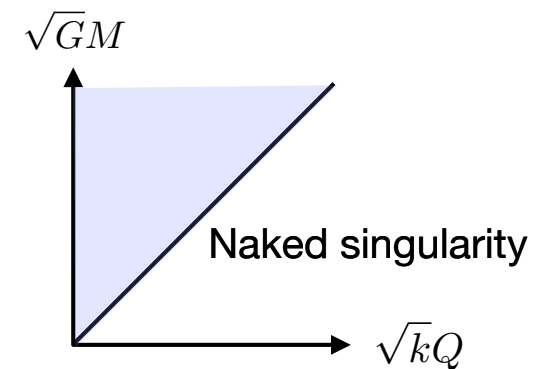
$$\mathcal{E}_{\mathcal{H}_1}^{\text{EM}}(\bar{\phi}; \delta\phi) = \int_{\mathcal{H}_1} \omega^{\text{EM}}(\bar{\phi}; \delta\phi, \mathcal{L}_{\xi}\delta\phi) \longrightarrow \text{電磁場のエネルギー}$$

$$\mathcal{E}_{\Sigma_1}(\bar{\phi}; \delta\phi) = \int_{\Sigma_1} \omega(\bar{\phi}; \delta\phi, \mathcal{L}_{\xi}\delta\phi). \longrightarrow -\frac{\kappa}{8\pi G} \delta^2 A_B^{\text{RN}}$$

# 宇宙検閲官仮説の検証 (Sorce-Wald形式)

- わずかにsub-extremalなBHに物質を投入

$$\epsilon^2 = \frac{G\bar{M}^2 - k\bar{Q}^2}{G\bar{M}^2} \quad \begin{aligned} M(\lambda) &= \bar{M} + \delta M \lambda + \frac{1}{2} \delta^2 M \lambda^2 + \dots \\ Q(\lambda) &= \bar{Q} + \delta Q \lambda + \frac{1}{2} \delta^2 Q \lambda^2 + \dots \end{aligned}$$



- 2次の摂動まで考える(自己エネルギー・有限サイズの効果)

$$\delta M - \Phi_H \delta Q = 0$$

$$\delta^2 M - \Phi_H \delta^2 Q \geq \delta^2 A_B^{RN}$$

$$f(\lambda) = GM^2(\lambda) - kQ^2(\lambda)$$

$$\geq \left( \sqrt{G\bar{M}}\epsilon - \frac{k}{\sqrt{G\bar{M}}} \bar{Q} \delta Q \lambda \right)^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3, \epsilon^2 \lambda, \lambda^3)$$

漸近的de Sitter時空にこの方法を拡張することはできるか

# Outline

- Iyer-Wald 形式
- Sorce-Wald 形式 (漸近的平坦)
- dS時空中のBH
- Sorce-Wald 形式 (漸近的dS)

# de Sitter 時空中の荷電BH

- Einstein Maxwell + 宇宙項

$$\mathcal{L}(\phi) = \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \right] \epsilon$$

- Einstein 方程式の解 (静的パッチ)

$$g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \mathbf{d}x^\nu = -f(r) \mathbf{d}t^2 + \frac{\mathbf{d}r^2}{f(r)} + r^2 (\mathbf{d}\theta^2 + \sin^2 \theta \mathbf{d}\phi^2), \quad f(r) = 1 - \frac{2Gm}{r} + \frac{GkQ^2}{r^2} - H^2 r^2,$$

$$A_\mu \mathbf{d}x^\mu = -\Phi(r) \mathbf{d}t, \quad \Phi(r) = k \frac{Q}{r},$$

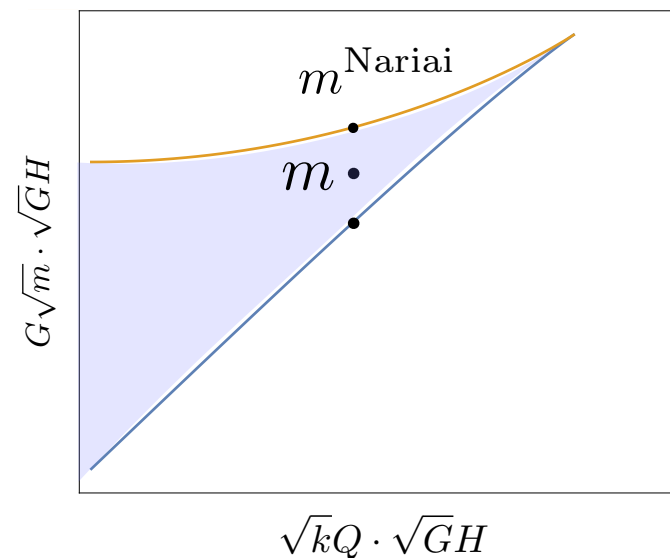
極限BH: Cauchyホライズン = イベントホライズン

$$r_H = r_H^{\text{ext}} := \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 12GkQ^2 H^2}}{6H^2}}$$

Nariai BH: 宇宙論的ホライズン = イベントホライズン

$$r_H = r_H^{\text{Nariai}} := \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 12GkQ^2 H^2}}{6H^2}}$$

Sub-extremal 条件  $M^{\text{Nariai}} < M < M^{\text{ext}}$



Spectrum of RNdSBH

# ブラックホール第一法則 (漸近的dS時空)

- ラグランジアン

$$\mathcal{L}(\phi) = \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{ab} F^{ab} \right] \epsilon$$

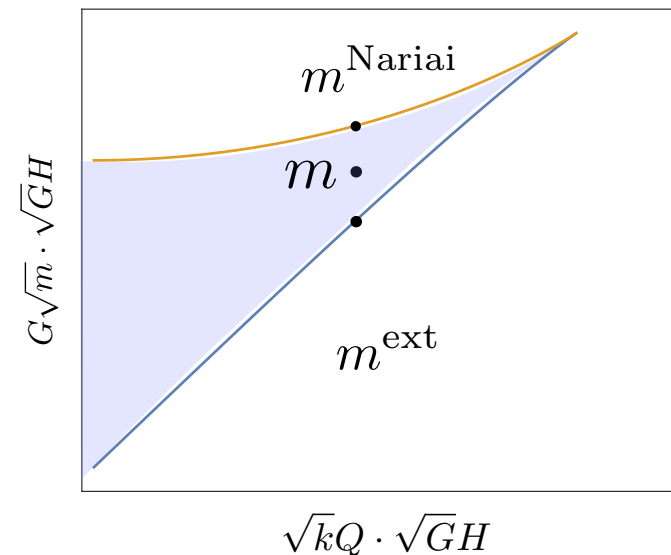
- ダイナミカルな場  $\phi(\lambda) = \{g_{\mu\nu}(\lambda), A^\mu(\lambda)\}$

- Background: Reissner-Nordstrom dS ブラックホール

$$g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \mathbf{d}x^\nu = -f(r) \mathbf{d}t^2 + \frac{\mathbf{d}r^2}{f(r)} + r^2 (\mathbf{d}\theta^2 + \sin^2 \theta \mathbf{d}\phi^2),$$

$$A_\mu \mathbf{d}x^\mu = -\Phi(r) \mathbf{d}t$$

$$f(r) = 1 - \frac{2Gm}{r} + \frac{GkQ^2}{r^2} - H^2 r^2, \quad \Phi(r) = k \frac{Q}{r}$$



Spectrum of RN dS BH

- Killing ベクトル  $\xi = \partial_t$
- 摂動には対称性を課さない

dS時空に、空間的無限遠は存在しない

- Hypersurface  $\Sigma$  : boundaries are  $B$  (bifurcation surface) &  $S_\infty$  (spatial infinity ?)

# ブラックホール第一法則 (漸近的dS時空)

$$M(\phi(\lambda)) := \int_{S_\infty} (Q_\xi(\phi(\lambda)) - i_\xi B(\phi(\lambda))) \quad \text{を質量と定義できる??}$$

質量が有限の値を持つかどうかは、漸近的な振る舞いに依存する

漸近的dS時空

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{dS}} + h_{\mu\nu}$$

$$g_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \mathbf{d}x^\nu = -\mathbf{d}\tau^2 + a(\tau)^2 (\mathbf{d}\rho^2 + \rho^2 (\mathbf{d}\theta^2 + \sin^2 \theta \mathbf{d}\varphi^2)) + h_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \mathbf{d}x^\nu$$

$$a(\tau) = e^{H\tau}$$

$$a(\tau)\rho \rightarrow \infty \text{ の極限では、 } g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{dS}}$$

空間的無限遠と呼ぶ

# ブラックホール第一法則 (漸近的dS時空)

$$M(\phi(\lambda)) := \int_{S_\infty} (Q_\xi(\phi(\lambda)) - i_\xi B(\phi(\lambda)))$$

この質量が有限の値を持つために満たすべき、fall-off条件

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{\text{dS}} + h_{\mu\nu}$$

$$h_{\tau\tau} = c_1 \frac{Gm}{H^2 a(\tau)^3 \rho^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a(\tau)^4 \rho^4}\right),$$

$$h_{\tau\rho} = \left( c_2 \frac{Gm}{H a(\tau)^2 \rho^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a(\tau)^3 \rho^3}\right) \right) a(\tau),$$

$$h_{\rho\rho} = \left( c_3 \frac{Gm}{a(\tau)\rho} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a(\tau)^2 \rho^2}\right) \right) a(\tau)^2,$$

$$h_{\theta\theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} h_{\varphi\varphi} = \left( c_4 \frac{Gm}{H^2 a(\tau)^3 \rho^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{a(\tau)^4 \rho^4}\right) \right) a(\tau)^2 \rho^2$$

# 漸近的dS時空

Reissner-Nordstrom-dS BHは、このfall-off条件を満たす？

座標変換後

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -F(a(\tau)\rho) d\tau^2 + \frac{1}{F(a(\tau)\rho)} a(\tau)^2 d\rho^2 + a(\tau)^2 \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$F(r) = \frac{f(r)}{2} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4H^2 r^2}{f(r)^2}} \right)$$

Killingベクトル

$$\xi = \partial_\tau - H\rho\partial_\rho$$

実際にはスケール倍の自由度があるが、staticパッチにおける質量パラメータと一致するように選んだ

無限遠での振る舞い

$$h_{\tau\tau} = \frac{2Gm}{H^2 r^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right),$$

$$h_{\rho\rho} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

→条件を満たしている！

$$M(\lambda) = m(\lambda)$$



# ブラックホール第一法則 (漸近的dS時空)

漸近的dS時空で知られている質量の定義：Abbott Desser質量

$$M^{\text{AD}} = \int_{S^\infty} \mathbf{Q}^{\text{AD}}$$

私たちの定義した質量を  $h$  で展開

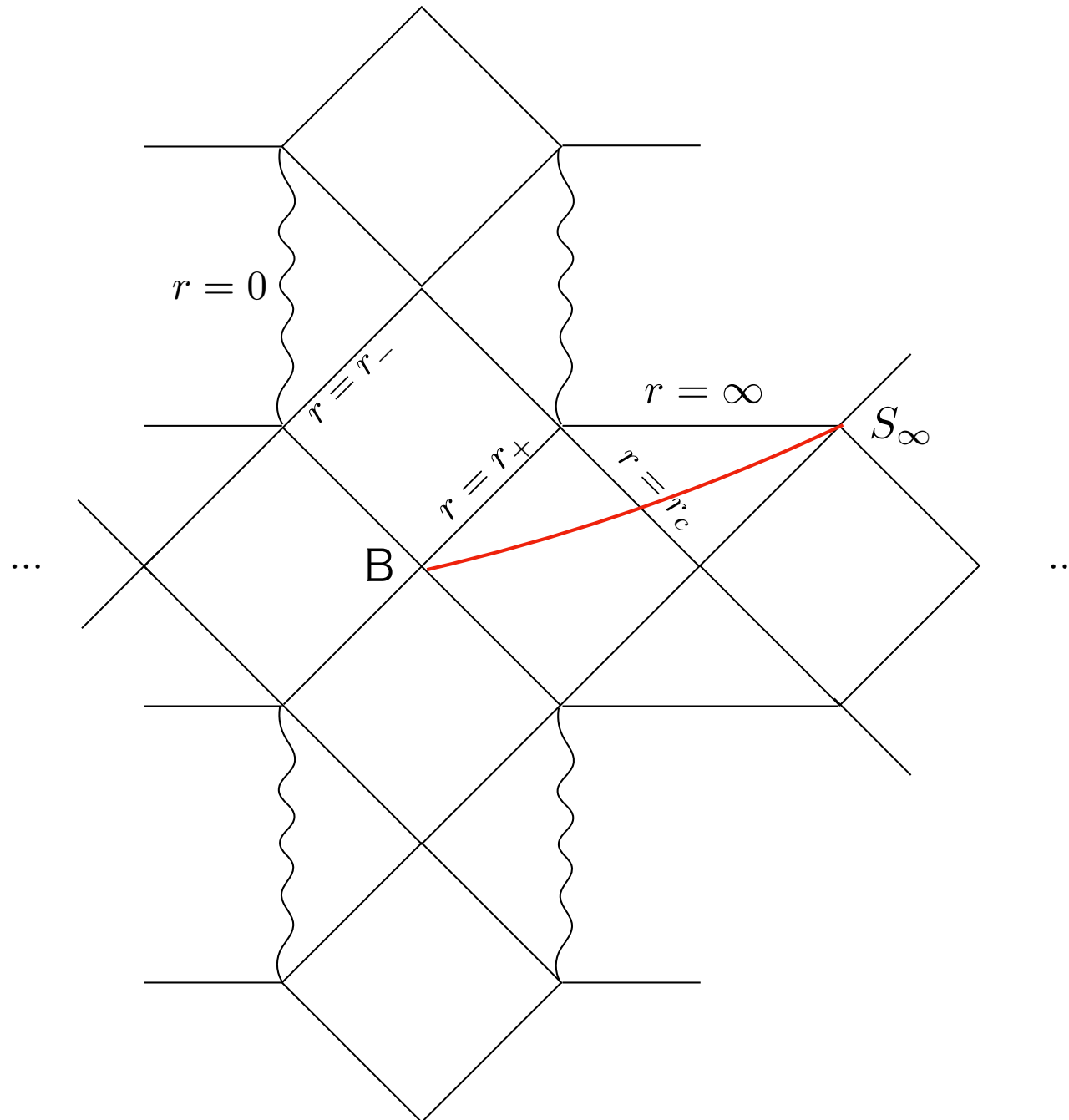
$$M(\lambda) = \int_{S_\infty} \left( \mathbf{Q}_\xi^{(1)} - i_\xi \theta(\phi^{dS}; h) + \mathcal{O}(h^2) \right)$$

一次の部分に注目すると、ADチャージと同じ形

Fall-off条件のもとでは、今回定義した質量とAD質量は一致する

# ブラックホール第一法則 (漸近的dS時空)

超局面の取り方



# ブラックホール第一法則 (漸近的dS時空)

漸近的平坦時空と同様のプロセスで、第一法則を導出

$$\int_{\partial\Sigma} [\delta Q_\xi - i_\xi \theta(\bar{\phi}, \delta\phi)] = - \int_\Sigma \delta C_\xi$$

dS時空中のブラックホールの第一法則

$$\delta M - \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A_B - \Phi_H \delta Q_B = - \int_\Sigma \delta C_\xi$$



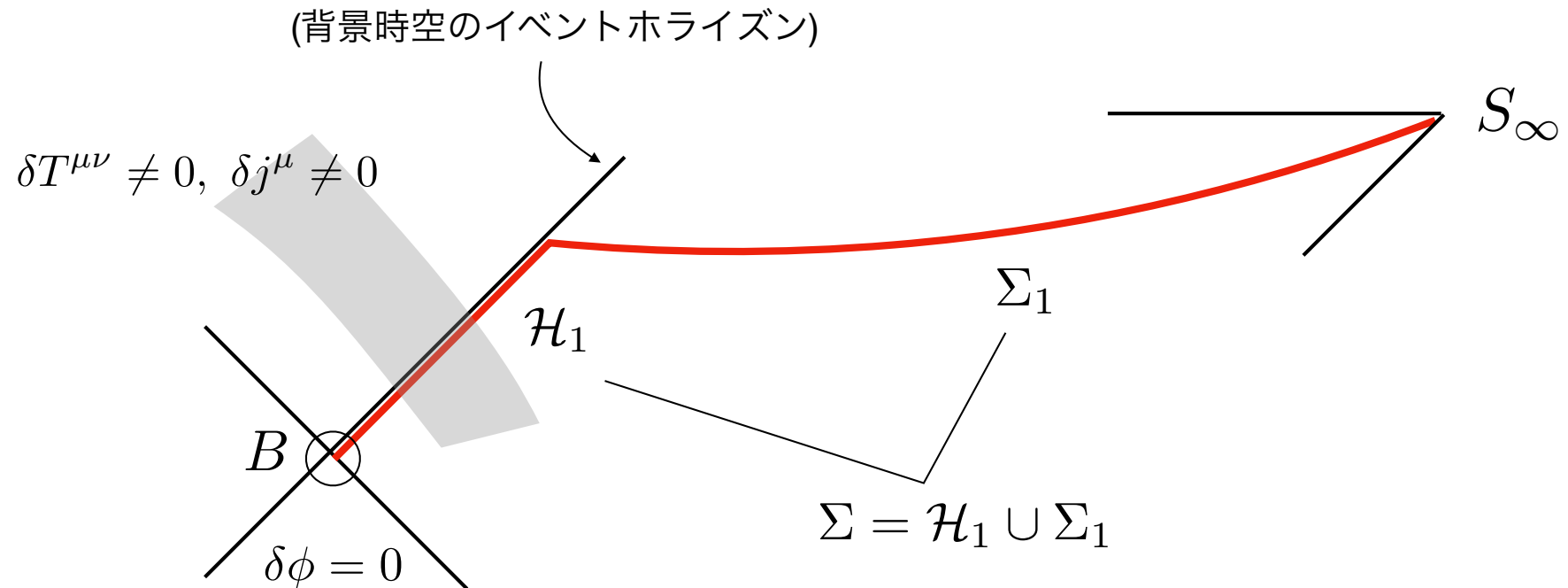
ADM質量ではなく、AD質量

# Outline

- Iyer-Wald 形式
- Sorce-Wald 形式 (漸近的平坦)
- dS時空中のBH
- Sorce-Wald 形式 (漸近的dS)

# Gedanken experiments for cosmic censorship

Reissner Nordström-de Sitter BHにエネルギーと電荷を投入



# 漸近的平坦時空でのSorce-Wald formalism

$$\int_{\partial\Sigma} [\delta Q_\xi - i_\xi \theta(\bar{\phi}, \delta\phi)] = \int_\Sigma \omega(\bar{\phi}; \delta\phi, \mathcal{L}_\xi \bar{\phi})_\Sigma - \int_\Sigma [\delta C_\xi - i_\xi (\delta \mathbf{E}(\bar{\phi}) \cdot \delta\phi)]$$



- 背景場は運動方程式を満たす
- $\xi$  は背景時空のキリングベクトル
- 分岐面で摂動はない
- $\mathcal{L}_\xi \bar{A} = 0$

$$\int_{\partial\Sigma} [\delta Q_\xi - i_\xi \theta(\phi, \delta\phi)] = - \int_\Sigma \delta C_\xi \quad (C_\xi)_{\mu\nu\rho} = \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho} (T_\lambda^\sigma + A_\lambda j^\sigma) \xi^\lambda$$

$$- \int_\Sigma \delta C_\xi = - \int_\Sigma \delta \left( \frac{1}{3!} \bar{\epsilon}_{\alpha\mu\nu\rho} (A_\beta \delta j^\alpha + \delta T_\beta^\alpha) \xi^\beta \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\sigma$$

ホライズンを通る全電磁フラックス

BHの中に投入するエネルギー

$$\delta M - \Phi_H \delta Q \propto \int_{\mathcal{H}} \delta T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu \geq 0$$

**Null energy condition**

$k^\mu$ : 未来方向のホライズンに垂直なヌルベクトル

# 二次の摂動に関する恒等式の評価

$$\int_{\partial\Sigma} [\delta^2 \mathbf{Q}_\xi - i_\xi \delta \boldsymbol{\theta}(\phi, \delta\phi)] = \int_\Sigma \omega(\bar{\phi}; \delta\phi, \mathcal{L}\delta\phi) - \int_\Sigma [\delta^2 \mathbf{C}_\xi - i_\xi (\delta \mathbf{E}(\bar{\phi}) \cdot \delta\phi)]$$

$$\delta^2 M = \mathcal{E}_\Sigma - \int_\Sigma i_\xi (\delta \mathbf{E} \cdot \delta\phi) - \int_\Sigma \delta^2 \mathbf{C}_\xi$$

$$\delta^2 M = -\frac{\kappa}{8\pi G} \delta^2 A_B^{RN} dS + \underbrace{(\text{positive})}_{\text{重力波・電磁場のエネルギー}} + \Phi_H \delta^2 Q + \int_{\mathcal{H}} \frac{\epsilon^{(3)} \delta^2 T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu}{\geq 0}$$

**Null energy condition**

BHの面積の2次の摂動は、電荷や質量の変化に書き換えられる

$$\delta^2 M - \Phi_H \delta^2 Q \geq \delta^2 A_B^{RN} \quad k^\mu: \text{未来方向のホライズンに垂直なヌルベクトル}$$

# Testing the Weak Cosmic Censorship in dS

- わずかにsub-extremalなBHに物質を投入

$$\frac{\bar{M} - \bar{M}^{\text{ext}}}{\bar{M}} =: \epsilon^2 \ll 1$$

- 極限BHの質量

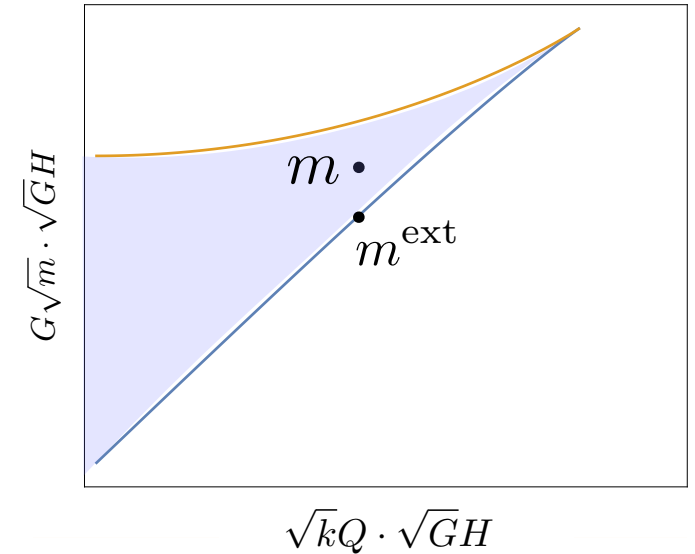
$$M^{\text{ext}}(\lambda) := \frac{1 + 12GkQ(\lambda)^2 H^2 - \sqrt{1 - 12GkQ(\lambda)^2 H^2}}{3\sqrt{6}GH\sqrt{1 - \sqrt{1 - 12GkQ(\lambda)^2 H^2}}}$$

1 次摂動、2 次摂動の関係式を用いて

$$\frac{M(\lambda) - M^{\text{ext}}}{\bar{M}} = \left( \epsilon + \frac{\Delta\Phi}{2\bar{M}^{\text{ext}}} \delta Q \lambda \right)^2 + \mathcal{O}(\lambda^3, \epsilon^2 \lambda, \epsilon \lambda^2) \geq 0$$

$$\Delta\Phi_H := -\frac{2Hk\bar{Q}}{1 - \sqrt{1 - 12GH^2k\bar{Q}^2}} \sqrt{-1 + \frac{1 + 12GH^2k\bar{Q}^2}{\sqrt{1 - 12GH^2k\bar{Q}^2}}}$$

漸近的dSの場合でも、宇宙検閲官仮説は破れない！



Spectrum of RNdSBH



# Summary

- 漸近的dSブラックホールについて、第一法則を構成した
- 質量は、ADM質量ではなく、Abbott-Deser質量を用いて表される.
- ブラックホールに物質を投入する思考実験において、摂動の1次・2次の恒等式を用いることで、ブラックホールを壊すことはできないことを確かめた。
- 漸近的dS時空においても、宇宙検閲官仮説が検証された。
- Kerr-Newmann BHにも拡張可能
- 今回の結果は、BH thermodynamics というよりも BH mechanicsの結果で、熱力学的な意味づけも行いたい。