Gravitational EFT for dissipative open systems

西井 莞治
(東大駒場素粒子)

Based on JHEP 02(2025)155 (arXiv: 2412.21136)
Collaborators: Pak Hang Chris Lau (Great Bay U),
Toshifumi Noumi (U of Tokyo)

2025/5/21 @京都大学

背景とモチベーション

- 非平衡開放系は現実に近いので興味深い！

→簡単化として閉じた系を考えることが多いものの、重要である

- Schwinger-Keldysh形式を用いた有効場理論(SKEFT)の記述が非平衡開放系の記述に便利なことが知られている（後で説明）

- この形式を用いた記述は実際宇宙論などで応用されている

Cf. [Hongo, Kim, Noumi, Ota 2019] [Salcedo, Colas, Pajer 2024] and etc…

- 宇宙論などでは重力理論が重要

この発表で述べること

- もともと知られてる枠組みを重力理論(ここでは主に一般相対論)に適用する枠組みを提供する

- SKEFTで記述される重力理論はdiffeomorphism変換のもとで不変であるべき

→本発表では、特にSKEFTで記述される散逸理論とdiffeoの関係について議論する

- diffeoが保たれている場合の開放系の実現についても議論する

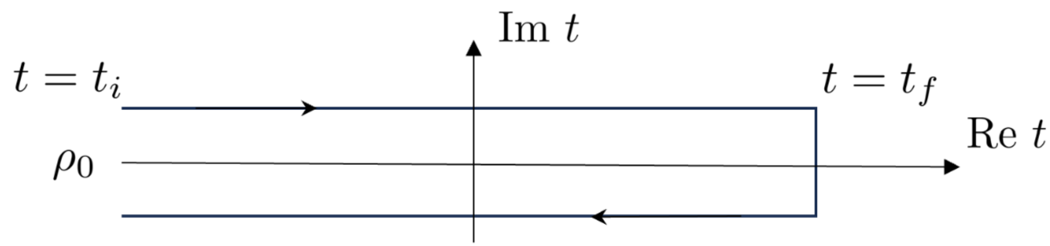
- 環境を含む非平衡重力系として、ブラックホール熱力学の一般化された第二法則についても議論する

Contents

Schwinger-Keldysh形式と Effective Field Theory (EFT)

Schwinger-Keldysh (in-in) 形式

- 以下の閉じた時間経路を考える



ρ_0：初期状態

- 生成汎関数はおよそ

$$
\begin{aligned}
e^{iW[J_1,J_2]} &= \mathrm{Tr}\left[\rho_0\, U^\dagger_{J_2}(t_f,t_i)\, U_{J_1}(t_f,t_i)\right] \\
&= \int \mathcal{D}\Phi_1 \mathcal{D}\Phi_2\, e^{i(S[\Phi_1;J_1]-S[\Phi_2;J_2])} \,.
\end{aligned}
$$

$J_{1,2}$: external sources

$\Phi_{1,2}$: path-integral variables

- ここで境界条件として以下を課す

$$\Phi_1(t_f) = \Phi_2(t_f)$$

SK effective field theory (SKEFT)

- 高エネルギーのモードをintegrate outして、何らかの低エネルギーモード$X_{1,2}$のEFTを得たとする

$$
\begin{aligned}
e^{iW[J_1,J_2]} &= \int \mathcal{D}\Phi_1 \mathcal{D}\Phi_2 \, e^{i(S[\Phi_1;J_1]-S[\Phi_2;J_2])} \\
&= \int \mathcal{D}X_1 \mathcal{D}X_2 \, e^{iS_{\rm eff}[X_1,X_2;J_1,J_2]}
\end{aligned}
$$

$X_{1,2}$: macroscopic variables

- もともと1と2の変数は完全に分離してたが、境界条件を通じて混ざる

→これが散逸の起源

r-a基底とユニタリ性

- ゆらぎの記述に便利なr-a基底を用いる($\hbar$はa変数に関係づける)

$$X_r = X = \frac{X_1 + X_2}{2}\,, \quad \hbar X_a = X_1 - X_2\,.$$

→実際古典解まわりでa変数は消える

- SKEFT作用のユニタリ性から、対称性のみから決めるSKEFT作用に制限が課される

$$\begin{aligned}
&S_{\rm eff}[X_r, X_a = 0] = 0\,,\\
&S_{\rm eff}[X_r, -X_a] = -\left(S_{\rm eff}[X_r, X_a]\right)^*\,,\\
&{\rm Im}\, S_{\rm eff}[X_r, X_a] \geq 0 \Leftrightarrow |e^{iS_{\rm eff}}| \leq 1, \quad \text{for any } X_{1,2}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{iW[J_1,J_2]} &= \int \mathcal{D}\Phi_1 \mathcal{D}\Phi_2\, e^{i(S[\Phi_1;J_1]-S[\Phi_2;J_2])}\\
&= \int \mathcal{D}X_1 \mathcal{D}X_2\, e^{iS_{\rm eff}[X_1,X_2;J_1,J_2]}
\end{aligned}$$

SKEFTとdiffeomorphism

SKEFTとdiffeomorphism [Crossley-Glorioso-Liu ’15]

- diffeoも2倍化される

$$x^\mu_{1,2} \to x^\mu_{1,2} + \xi^\mu_{1,2}\,.$$

- これらもr-a基底で書ける。r基底は**physical diffeo**と呼ばれる

$$\xi^\mu_1(x) = \xi^\mu(x)\,, \quad \xi^\mu_2(x) = \xi^\mu(x)\,,$$

$$x^\mu_1 = x^\mu_2 = x^\mu$$

a基底の方は**noise diffeo**と呼ばれ

$$\xi^\mu_1 = \frac{\hbar}{2}\xi^\mu_a(x)\,, \quad \xi^\mu_2 = -\frac{\hbar}{2}\xi^\mu_a(x)\,.$$

- これらの局所対称性は保たれていてほしい

diffeoの変換性

- **physical diffeo**のもとでのr-a基底のスカラーや計量の変換性は

$$
\begin{aligned}
\phi'(x) &= \phi(x-\xi(x))\,, \\
\phi'_a(x) &= \phi_a(x-\xi(x))\,, \\
g'_{\mu\nu}(x) &= \frac{\partial(x-\xi(x))^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial(x-\xi(x))^\sigma}{\partial x^\nu} g_{\rho\sigma}(x-\xi(x))\,, \\
g'_{a\mu\nu}(x) &= \frac{\partial(x-\xi(x))^\rho}{\partial x^\mu}\frac{\partial(x-\xi(x))^\sigma}{\partial x^\nu} g_{a\rho\sigma}(x-\xi(x))\,.
\end{aligned}
$$

- 古典極限($\hbar \to 0$)のもとでの**noise diffeo**変換性は

$$
\begin{aligned}
\phi'(x) &= \phi(x)\,, \\
\phi'_a(x) &= \phi_a(x) - \xi_a^\mu \partial_\mu \phi(x)\,, \\
g'_{\mu\nu}(x) &= g_{\mu\nu}(x)\,, \\
g'_{a\mu\nu}(x) &= g_{a\mu\nu}(x) - \nabla_\mu \xi_{a\nu} - \nabla_\nu \xi_{a\mu}\,.
\end{aligned}
$$

→古典極限の下で量子ゆらぎは見えなくなるが、有限温度系での熱ゆらぎは残る

SK形式における
スカラー場の理論

SK形式での非散逸スカラー場

- 素朴に2倍した作用だと非散逸理論(non-dissipative)になる

$$S_{\mathrm{n.d.}} = \int d^4x \left[\sqrt{-g_1}\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_1\partial^\mu\phi_1 - V(\phi_1)\right) - \sqrt{-g_2}\left(-\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_2\partial^\mu\phi_2 - V(\phi_2)\right)\right]$$
$$= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}T^{(\phi)}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_a + \left(\Box\phi - V'(\phi)\right)\phi_a\right].$$

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \left[\frac{1}{2}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + V(\phi)\right]g_{\mu\nu}$$

- 実際、 ϕ_a 変分からは通常のEOMが出てくる:

$$\Box\phi - V'(\phi) = 0\,.$$

また、ストレステンソルもon-shellで保存する

$$\nabla^\mu T^{(\phi)}_{\mu\nu} = \partial_\nu\phi\left[\Box\phi - V(\phi)\right] \overset{\mathrm{eom}}{=} 0\,.$$

非散逸スカラーのdiffeo不変性

- 作用は明らかに**physical diffeo**のもとで不変

$$S_{\mathrm{n.d.}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}T^{(\phi)}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_a + \left(\Box\phi - V'(\phi)\right)\phi_a\right]$$

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \left[\frac{1}{2}\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi + V(\phi)\right]g_{\mu\nu}$$

- また**noise diffeo**での不変性も確かめられる

$$\Delta S_{\mathrm{n.d.}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\nabla^\mu T^{(\phi)}_{\mu\nu} - \left(\Box\phi - V'(\phi)\right)\partial_\nu\phi\right]\xi^\nu_a = 0\,.$$

→通常のin-out形式と変わらないことをやっているので、この結果は当然

SK形式における散逸スカラー理論

- EFTとして明白な散逸項が入った理論を考える(前のはEFTでない)

$$S_\phi = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}T^{(\phi)}_{\mu\nu}g^{\mu\nu}_a + \left(\Box\phi - \underline{\gamma u^\mu\partial_\mu\phi} - V'(\phi)\right)\phi_a\right]$$

$$u^\mu u_\mu = -1$$

- この作用は**noise diffeo**のもとで不変ではない

$$\begin{aligned}\Delta S_\phi &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\xi^\nu_a\nabla^\mu T^{(\phi)}_{\mu\nu} - \left(\Box\phi - \gamma u^\mu\partial_\mu\phi - V'(\phi)\right)\xi^\mu_a\partial_\mu\phi\right] \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\,\xi^\nu_a\gamma u^\mu\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\end{aligned}$$

- それに伴ってon-shellでストレステンソルも保存しなくなる

$$\nabla^\mu T^{(\phi)}_{\mu\nu} = \partial_\nu\phi\left[\Box\phi - V(\phi)\right] \overset{\text{eom}}{=} \gamma u^\mu\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$$

→これは重力理論的には問題

散逸スカラーと動的重力理論

- 形式的に散逸スカラー場と結合した重力理論(一般相対論)を構成してみる

$$S_{\rm naive} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(-M_{\rm Pl}^2 G_{\mu\nu} + T^{(\phi)}_{\mu\nu}\right) g_a^{\mu\nu} + \left(\Box\phi - \gamma u^\mu \partial_\mu \phi - V'(\phi)\right)\phi_a\right],$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu}$$

→$g_{a\mu\nu}$ の変分が素朴にはEinstein方程式を与えるように思えるが、**noise diffeo**のもとで不変ではないし、Bianchi恒等式と矛盾する

→どうやって原因と思われるnoise diffeoを回復する？

SKEFTにおける diffeo不変な理論

Stückelbergトリック

- Stückelberg場X_a^μを導入してとりあえず回復してみる:

$$g_{a\mu\nu} \to \mathcal{G}_{a\mu\nu} \equiv g_{a\mu\nu} + \nabla_\mu X_{a\nu} + \nabla_\nu X_{a\mu}\,, \quad \phi_a \to \varphi_a \equiv \phi_a + X_a^\mu \partial_\mu \phi\,,$$

X_a^μはnoise diffeoのもとで以下の変換性を持つことを要請する

$$X_a^\mu \to X_a'^\mu = X_a^\mu + \xi_a^\mu(x)\,.$$

※もともとの場の変換性は
$$\phi_a'(x) = \phi_a(x) - \xi_a^\mu \partial_\mu \phi(x)\,,$$
$$g_{a\mu\nu}'(x) = g_{a\mu\nu}(x) - \nabla_\mu \xi_{a\nu} - \nabla_\nu \xi_{a\mu}\,.$$

- よってすべてのdiffeoのもとで不変な理論が構成される

$$S_{\rm naive} = \int d^4x \sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(-M_{\rm Pl}^2 G_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\phi)}\right)\mathcal{G}_a^{\mu\nu} + \left(\Box\phi - \gamma u^\mu \partial_\mu \phi - V'(\phi)\right)\varphi_a\right].$$

散逸スカラーと動的重力理論

- もう一度作用について考えてみる

$$S_{\rm naive} = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(-M_{\rm Pl}^2 G_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\phi)}\right) g_a^{\mu\nu} \right.$$
$$\left. + \left(\Box\phi - \gamma u^\mu \partial_\mu \phi - V'(\phi)\right)\phi_a - \gamma u^\mu \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi X_a^\nu \right].$$

- $g_{a\mu\nu}$とϕ_aの変分はそれぞれ

$$M_{\rm Pl}^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\phi)}\,, \quad \Box\phi - \gamma u^\mu \partial_\mu \phi - V'(\phi) = 0\,,$$

で、X_a^μの変分は

$$\gamma u^\mu \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = 0\,.$$

→Stückelbergトリックは自由度の移し替えでしかないので、散逸の分の自由度が足りてない。どうすればよい？

散逸系と重力理論

- 重力は全ての自由度と普遍的に結合するため、散逸によって未知の自由度の流出を許さない

→散逸を引き起こす追加のセクター（環境セクター）を導入すべき

- 環境セクター$T_{\mu\nu}^{(env)}$を含んだ理論は以下のように書ける

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(-M_{\rm Pl}^2 G_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\phi)} + \underline{T_{\mu\nu}^{(\rm env)}}\right)\mathcal{G}_a^{\mu\nu} + \left(\Box\phi - \gamma u^\mu\partial_\mu\phi - V'(\phi)\right)\varphi_a + \dots\right],$$

EOMは$g_{a\mu\nu}$とX_a^μについてそれぞれ以下で与えられる

$$M_{\rm Pl}^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(\rm env)}, \quad \nabla^\mu\left(T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(\rm env)}\right) = 0.$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(\rm env)} = -\gamma u^\mu\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi.$$

環境セクターとしての流体

- 環境セクターはどのように導入する？自然に導入される？

→最も自然なのはX_a^μに紐づいたr変数を入れること

- これについてはHydro EFTですでに知られた結果を用いることができる [Crossley-Glorioso-Liu 2015]

- 対応するr変数をX^μとして、これが流体の位置を表す場だとすると、その変換性は以下で与えられる

Physical diffeo: $X^{\mu\prime} = X^\mu + \xi^\mu \,,$

Noise diffeo: $X_a^{\prime\mu} = X_a^\mu + \xi_a^\mu \,.$

ここでX^μはphysical diffeo についてのStückelberg場とみなせる

SK形式とHydro EFT (review)

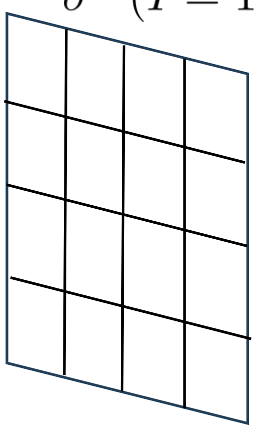
[Crossley-Glorioso-Liu 2015]

SK形式を用いたHydeo EFT

fluid spacetime $h_{sAB}(\sigma)$ $s = 1, 2$

σ^I $(I = 1, 2, 3)$

σ^0

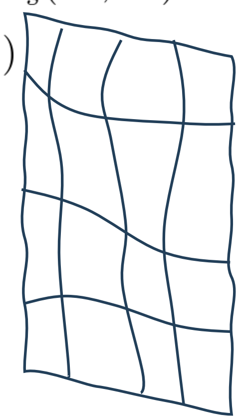


$$h_{sAB}(\sigma) = \frac{\partial X_s^\mu}{\partial \sigma^A} g_{s\mu\nu}(X_s) \frac{\partial X_s^\nu}{\partial \sigma^B}$$

physical spacetime $g_{s\mu\nu}(X_s)$

$X_s^i(\sigma^0, \sigma^I)$

$X_s^0(\sigma^0, \sigma^I)$



空間ラベルの貼り換え： $\sigma^0 \to \sigma^0, \quad \sigma^I \to \sigma'^I(\sigma^I)$
固有時の貼り換え： $\sigma^0 \to f(\sigma^0, \sigma^I), \quad \sigma^I \to \sigma^i$
→ **Fluid diffeo**

Physical diffeo
Noise diffeo

- σ^A $(A = 0, \ldots, 3)$ は流体のラベルX_s^μは流体の時空中の座標

Cf. 世界線理論、世界面理論

Diffeo、KMS対称性、ユニタリ性

- Fluid diffeo, physical diffeo, noise diffeo

- Dynamical KMS 対称性 (Z_2対称性になっている)

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(X) = \Theta g_{\mu\nu}(X)\,, \quad \tilde{g}_{a\mu\nu}(X) = \Theta g_{a\mu\nu}(X) + i\Theta \mathcal{L}_{\beta_0} g_{\mu\nu}(X)$$
$$\tilde{X}^{\mu}(\sigma) = \Theta X^{\mu}(\sigma)\,, \quad \tilde{X}^{\mu}_a(\sigma) = \Theta X^{\mu}_a(\sigma) - i\Theta\beta^{\mu}(\sigma) + i\beta_0^{\mu}$$
$$\tilde{\mathcal{G}}_{a\mu\nu}(X) = \Theta \mathcal{G}_{a\mu\nu}(X) + i\Theta \mathcal{L}_{\beta} g_{\mu\nu}(X)$$

$\Theta:$ T/PT/CPT transformation $\qquad \beta^{\mu} \equiv \beta u^{\mu}\,, \quad \beta_0^{\mu} \equiv \beta_0 \delta_0^{\mu}$

- ユニタリ性

$$S^{*}_{\text{eff}}[X_1, X_2; g_1, g_2] = -S_{\text{eff}}[X_2, X_1; g_2, g_1]\,,$$
$$S_{\text{eff}}[X_1, X_2 = X_1; g_1, g_2 = g_1] = S_{\text{eff}}[X, X_a = 0; g, g_a = 0] = 0\,,$$
$$\text{Im}\ S_{\text{eff}} \geq 0 \Leftrightarrow |e^{iS_{\text{eff}}}| \leq 1, \quad \text{for any } X_{1,2}\,, g_{1,2}$$

Hydro EFTの対称性に基づく基本量

- まず、流体の四元ベクトルがfluid diffeoのもとで不変

$$u^\mu(\sigma) = \frac{1}{b}\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^0}$$

$$b = \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma^0}\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma^0}}, \quad u_\mu u^\mu = -1.$$

- $\mathcal{G}_{a\mu\nu}$がnoise diffeoのもとで不変

$$\mathcal{G}_{a\mu\nu} = g_{a\mu\nu} + \nabla_\mu X_{a\nu} + \nabla_\nu X_{a\mu} \ ,$$

→ よって基本量は:

$$\mathcal{G}_{a\mu\nu}, \quad u^\mu, \quad \Delta^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu, \quad \beta(\sigma)$$

Hydro EFTの作用 (perfect fluid)

- 最もシンプルな例を見てみる(0-th order):

$$S_{\mathrm{eff}(0)} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T^{\mu\nu}_{(\mathrm{hydro})}\mathcal{G}_{a\mu\nu}$$

$$T^{\mu\nu}_{(\mathrm{hydro})} = \rho_0(\beta)u^\mu u^\nu + p_0(\beta)\Delta^{\mu\nu}$$

ρ_0: energy density

p_0: pressure

- X_a^μの変分が流体のEOMにあたる保存則を与える

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu}_{(\mathrm{hydro})} = 0$$

- dynamical KMS 対称性を課すと、熱力学恒等式が導かれる

$$\tilde{\mathcal{G}}_{a\mu\nu}(X) = \Theta\mathcal{G}_{a\mu\nu}(X) + i\Theta\mathcal{L}_\beta g_{\mu\nu}(X) \Longrightarrow \tilde{S}_{\mathrm{eff}(0)} = S_{\mathrm{eff}(0)} + \int d^4x\, T^{(\mathrm{hydro})}_{\mu\nu}\nabla^\mu\beta^\nu$$

$$\Longrightarrow T^{(\mathrm{hydro})}_{\mu\nu}\nabla^\mu\beta^\nu = \nabla^\mu(p_0\beta_\mu) + \underbrace{\left(\rho_0 + p_0 + \beta\frac{\partial}{\partial\beta}p_0\right)}_{\text{不変性からゼロ} \Leftrightarrow \text{熱力学恒等式}}$$

Hydro EFTの作用 (1-st order)

- Dynamical KMS不変性を保ちながら、以下のように書ける

$$S_{\mathrm{eff}(1)} = S_{\mathrm{eff}(0)} + \frac{i}{4}\beta^{-1}\zeta\Delta^{\mu\nu}\hat{\mathcal{G}}_{a\mu\nu}\Delta^{\alpha\beta}\mathcal{G}_{a\alpha\beta} + \frac{i}{2}\beta^{-1}\eta\left(\Delta^{\alpha(\mu}\Delta^{\nu)\beta} - \frac{1}{3}\Delta^{\mu\nu}\Delta^{\alpha\beta}\right)\hat{\mathcal{G}}_{a\mu\nu}\mathcal{G}_{a\alpha\beta}$$

$$\mathcal{G}_{a\mu\nu}(X) \equiv g_{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{X_a^\mu} g_{\mu\nu} \qquad \hat{\mathcal{G}}_{a\mu\nu}(X) \equiv \Theta\tilde{\mathcal{G}}_{a\mu\nu}(X) \qquad \tilde{\mathcal{G}}_{a\mu\nu}(X) = \Theta\mathcal{G}_{a\mu\nu}(X) + i\Theta\mathcal{L}_\beta g_{\mu\nu}(X)$$

ζ : viscosity η : shear $\zeta, \eta > 0$ **←ユニタリ性**

- エントロピーカレントの増大則がユニタリ性から出てくる

$$\nabla_\mu s^\mu = \frac{\beta}{2}\eta\sigma^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \beta\zeta(\nabla_\mu u^\mu)^2 \geq 0$$

$$s^\mu = p_0\beta^\mu - T^{\mu\nu}_{(\mathrm{hydro})}\beta_\nu \qquad T^{(\mathrm{hydro})}_{\mu\nu} = \rho_0 u_\mu u_\nu + p_0\Delta_{\mu\nu} - \eta\sigma_{\mu\nu} - \zeta\nabla_\alpha u^\alpha\Delta_{\mu\nu}\,.$$

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \Delta^{\mu\lambda}\Delta^{\nu\rho}\left(\nabla_\lambda u_\rho + \nabla_\rho u_\lambda - \frac{2}{3}g_{\lambda\rho}\nabla_\alpha u^\alpha\right)$$

SK形式における
散逸する動的重力と流体

流体を含む散逸理論

- もとの散逸理論に戻り、環境セクターとして流体を導入する

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\left(-M_{\rm Pl}^2 G_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(\rm hydro)}\right)\mathcal{G}_a^{\mu\nu} + \left(\Box\phi - \gamma(\beta)u^\mu\partial_\mu\phi - V'(\phi)\right)\varphi_a\right],$$

$$T_{\mu\nu}^{(\rm hydro)} \equiv \rho_0(\beta)u_\mu u_\nu + p_0(\beta)(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad \text{(ideal fluids)}\,.$$

- $g_{a\mu\nu}$とϕ_aそれぞれについてのEOMは

$$M_{\rm Pl}^2 G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(\phi)} + T_{\mu\nu}^{(\rm hydro)}\,, \quad \Box\phi - \gamma u^\mu\partial_\mu\phi - V'(\phi) = 0\,,$$

またX_a^μについては

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(\rm hydro)} = -\gamma u^\mu\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\,.$$

→よって**散逸系!**

Decoupling regime (Open limit) (1/2)

- ここまでは環境を通じた閉じた系だったが、開放系は記述できるのか

→環境からシステムへのバックリアクションが十分小さいとき、系は開放系と見なせて、環境は熱浴としてふるまう

- 以下のような配位を考える

$$u^\mu = \bar{u}^\mu + \delta u^\mu \,, \quad \beta = \bar{\beta} + \delta\beta \,.$$

- この時作用は以下の項を含む

$$S \ni -\big(\gamma(\bar{\beta}) + \gamma'(\bar{\beta})\delta\beta\big)\big(\bar{u}^\mu + \delta u^\mu\big)\,\partial_\mu\phi\,\big(\phi_a + X_a^\nu\partial_\nu\phi\big)$$

環境と系のdecoupling regimeは以下で決まる

$$|\gamma'(\bar{\beta})\delta\beta| \ll \left|\gamma(\bar{\beta})\right| \,, \quad |\delta u| \ll 1 \,, \quad |X_a\partial\phi| \ll |\phi_a| \,.$$

Decoupling regime (Open limit) (2/2)

- 流体のゆらぎについての運動項は

$$S \ni (\rho_0 + p_0)\, \partial\pi\partial X_a \,,$$

$$\delta u \sim \partial\pi$$

これらをカノニカルに規格化すると

$$\pi_c \sim \sqrt{\rho_0 + p_0}\, \pi \,, \quad X_{ac} \sim \sqrt{\rho_0 + p_0}\, X_a \,.$$

- decoupling regimeの条件は

$$|\partial X_{ac}|, |\partial\pi_c| \ll \sqrt{\rho_0 + p_0} \,,$$

これはざっくりいうと典型的なエネルギースケールEに対して

$$E^4 \ll \rho_0(\bar{\beta}) + p_0(\bar{\beta}) \,.$$

散逸的重力理論(gravitational wave)

- 一旦環境セクター抜きの散逸入り重力理論を考えてみる

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[-M_{\mathrm{Pl}}^2(G_{\mu\nu}+\gamma K_{\mu\nu})\right]\mathcal{G}_a^{\mu\nu} + \dots\,,$$

$$\Delta_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu\,,\quad K_{\mu\nu} = \Delta_\mu{}^\rho \nabla_\rho u_\nu\,.$$

- noise diffeo不変性が以下を要求する

$$\nabla_\mu K^{\mu\nu} = 0\,.$$

u^μが測地線方程式を満たす場合には

$$\Delta^{\mu\nu}\nabla_\mu K_{\nu\rho} = 0\,.$$

- この条件は微分の1次のもので、初期条件のような制約しか与えない

→任意の初期条件での時間発展は与えられず、典型的には散逸が許されない

散逸重力と流体

- 環境セクターを含む散逸理論を考えてみる

$$S = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[-M_{\rm Pl}^2(G_{\mu\nu}+\gamma K_{\mu\nu})+T_{\mu\nu}^{(\rm hydro)}\right]\mathcal{G}_a^{\mu\nu}+\ldots\,,$$

$$\Delta_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+u_\mu u_\nu\,,\quad K_{\mu\nu}=\Delta_\mu{}^\rho\nabla_\rho u_\nu\,.$$

- 環境セクターは以下のように導入する

$$T_{\mu\nu}^{(\rm hydro)}=\rho_0 u_\mu u_\nu+p_0\Delta_{\mu\nu}-\left[2\eta\left(K_{\mu\nu}-\frac{1}{3}g_{\mu\nu}K\right)+\zeta\Delta_{\mu\nu}K\right]\,.$$

η : shear　　ζ : viscosity

重力の散逸は流体の散逸と同定できる

- 平坦時空周りでは、散逸的重力波の方程式が出てくる

$$S=\frac{M_{\rm Pl}^2}{4}\int d^4x\left[-\left(\ddot{h}_{ij}^{\rm TT}+\gamma\dot{h}_{ij}^{\rm TT}-\partial_k^2 h_{ij}^{\rm TT}\right)h_{aij}^{\rm TT}+i\frac{\gamma}{\beta}h_{aij}^{\rm TT}h_{aij}^{\rm TT}\right]\qquad \gamma=\frac{2\eta}{M_{\rm Pl}^2}$$

動的ブラックホール熱力学

※これまでの部分とやや独立

動的ブラックホール熱力学

- 非平衡重力理論の観点で流体を導入してきた

- 重力理論に関する非平衡効果をみる

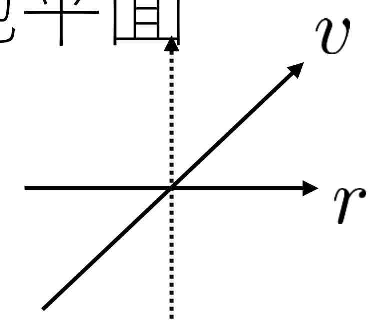
→動的ブラックホール熱力学

- SK形式は有限温度系の実時間発展に有用なので、応用としてブラックホール熱力学を考える(その点でこのパートは不完全ではあるが、将来的な展望として紹介する)

- SKEFTから導入された流体によってブラックホールが囲まれている状況を考える

- このパートが元々のモチベーションだった

ブラックホール熱力学と見かけの地平面



- 以下の非定常BH時空を考える

$$ds^2 = -e^{2h(v,r)}\left(1 - \frac{2GM(v,r)}{r}\right)dv^2 + 2e^{h(v,r)}dvdr + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)$$

- 見かけの地平面の位置は以下で与えられる:

$$r_{\mathrm{H}}(v) = 2GM_{\mathrm{BH}}(v)\,, \quad M_{\mathrm{BH}}(v) = M\left(v, r_{\mathrm{H}}(v)\right)\,,$$

- 熱力学第一法則が導ける [Hayward'98]:

$$\dot{M}(v, r_{\mathrm{H}}(v)) = \dot{M}_{\mathrm{BH}}(v) - \frac{M'(v, r_{\mathrm{H}}(v))}{4\pi r_{\mathrm{H}}(v)^2}\dot{V}_{\mathrm{BH}}(v) \qquad V_{\mathrm{BH}} \equiv \frac{4\pi r_{\mathrm{H}}^3}{3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\delta Q = \delta U - \delta W$$

動的ブラックホールの温度

- 動的ブラックホールにおいて以下のKodamaベクトルがKillingベクトルのようにふるまう

$$k^\mu(v,r)\partial_\mu = e^{-h(v,r)}\partial_v$$

- このベクトルの測地線方程式から動的表面重力とそれに付随する温度が導入される[Hayward'98]

$$k^\mu \nabla_\mu k^\nu = \kappa(v) k^\nu$$

$$\Rightarrow \quad \kappa(v) = \frac{1-2GM'(v,r_{\mathrm{H}}(v))}{4GM(v,r_{\mathrm{H}}(v))} \equiv \frac{2\pi}{\beta_{\mathrm{BH}}(v)}$$

β_{BH} : BH temperature defined by surface gravity

一般化されたエントロピー

- 見かけの地平面の面積に基づくブラックホールエントロピーは

$$S_{\rm BH} \equiv \frac{4\pi r_{\rm H}^2}{4G} \,,$$

これが真っ当なことは第一法則からも分かる

$$\dot{S}_{\rm BH} = \frac{1}{\beta_{\rm BH}} \dot{M}(v, r_{\rm H}(v))$$

- 一般化されたエントロピーを定めるために、ブラックホールの外にある流体のエントロピーを計算する

$$S_{\rm mat}(\bar{v}) = \int d^4x \sqrt{-g}\, \delta(v - \bar{v})\, \theta(r - r_{\rm H}(v))\, s^v$$

- 以下の一般化されたエントロピーの時間微分について考察する

$$S_{\rm gen} \equiv S_{\rm mat} + S_{\rm BH}$$

一般化された第二法則

- 一般化されたエントロピーの時間発展は以下で計算できる

$$\frac{dS_{\rm gen}(v)}{dv} \geq 4\pi r_{\rm H}^2 e^h \left(\beta_{\rm BH} - \beta_{\rm eff}\right) T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu + 4\pi r_{\rm H}^2 e^h \beta_{\rm eff} \left(T^{(1)}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu - T_{\rm eff} s^\mu \partial_\mu r_{\rm H}(v) \right)$$

$$\beta_{\rm eff} \equiv -\frac{\beta}{u^\mu k_\mu}$$

- 高次の微分項（下段の部分）はここでは無視する

- Einstein方程式からT_{vv}が熱流を与えるのがわかる

$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = T_{vv} = \frac{\dot{M}(v, r_{\rm H}(v))}{4\pi r_{\rm H}^2}$$

- このエントロピーが時間発展で増大するための条件は？

→ヌルエネルギー条件と合わせて考えてみる

一般化された第二法則

- 一般化されたエントロピーの時間発展は以下で計算できる

$$\frac{dS_{\mathrm{gen}}(v)}{dv} \geq 4\pi r_{\mathrm{H}}^2 e^h \left(\beta_{\mathrm{BH}} - \beta_{\mathrm{eff}}\right) T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu$$
$$+ \cancel{4\pi r_{\mathrm{H}}^2 e^h \beta_{\mathrm{eff}} \left(T^{(1)}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu - T_{\mathrm{eff}} s^\mu \partial_\mu r_{\mathrm{H}}(v)\right)} \qquad \beta_{\mathrm{eff}} \equiv -\frac{\beta}{u^\mu k_\mu}$$

- 高次の微分項（下段の部分）はここでは無視する

- Einstein方程式からT_{vv}が熱流を与えるのがわかる

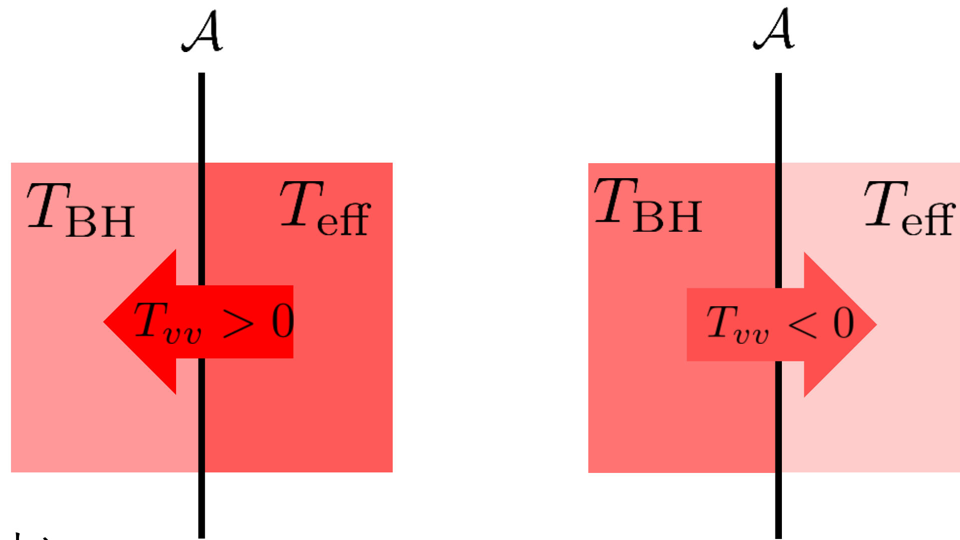
$$T_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = T_{vv} = \frac{\dot{M}(v, r_{\mathrm{H}}(v))}{4\pi r_{\mathrm{H}}^2}$$

- このエントロピーが時間発展で増大するための条件は？
  →ヌルエネルギー条件と合わせて考えてみる

温度勾配とエントロピー生成

- 熱流が高温から低温に流れる場合にエントロピーが増大する！

$$(\beta_{\rm BH} - \beta_{\rm eff})\,T_{vv} \geq 0 \quad \Rightarrow$$



→従来の熱力学のようなふるまい

$$T_{\rm eff} = -u^{\mu}k_{\mu}T$$

- 温度勾配は$-u^{\mu}k_{\mu}$によって強まる傾向にある

流体の流入(k^{μ}とu^{μ}のなす角が大きい) $\Rightarrow\ -u^{\mu}k_{\mu} \to \infty$

流体の流出(k^{μ}とu^{μ}がほぼ平行) $\Rightarrow\ -u^{\mu}k_{\mu} \to 0$

→およそ一般化された第二法則は満たされる！

Summary and outlook (1/2)

- 重力理論へのSKEFTの構成

- 素朴には散逸系でnoise diffeoが壊れる

  → Stückelberg場を用いて回復

- 散逸の自由度として環境セクターが要求される

  → 自然な環境セクターとしてStückelberg場のr変数を導入し、動的にした（ここでは流体を考えた）

- 開放系が実現されるための条件もまた環境セクターとともに決まる

- ブラックホール熱力学において、一般化されたエントロピーの増大は温度勾配で特徴づく

Summary and outlook (2/2)

- あくまでレシピでしかないので、さまざまな拡張考えられる

- Open EFT of inflationの重力波に対して使える

- 環境セクターは必ずしも流体である必要はない

→固体を使ってもいいので、solid inflationをEFT的に構成してもよい

- 重力のデコヒーレンス効果について理解できないか

- 非平衡ブラックホール熱力学になにか示唆を与えられれば面白い

→単純なのならCovariant phase space formalism的なもの