
有限温度Large-Nゲージ理論における スケーリング則と虚の化学ポテンシャルへの応用

京都大学素粒子論研究室セミナー

2025年5月14日

森田 健 (静岡大)

Based on

T. Azuma (Setsunan) and TM, PTEP 2024

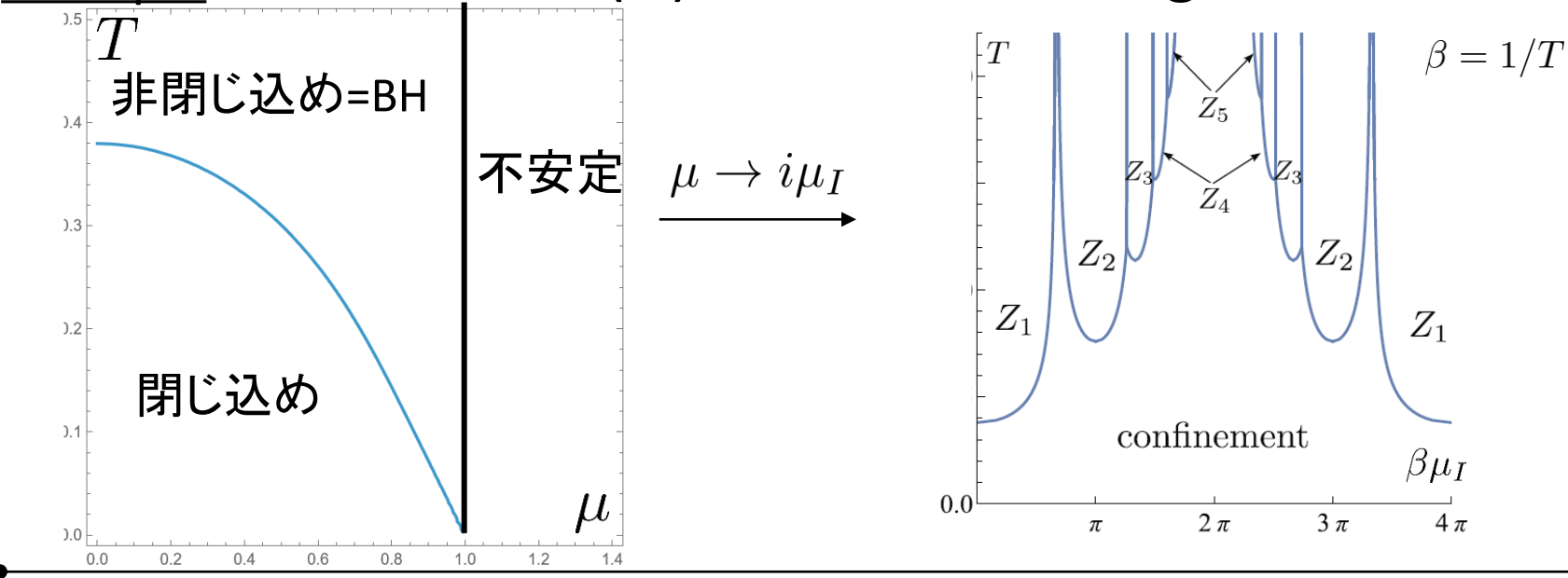
On going work

Introduction

★熱分配関数と虚の化学ポテンシャル

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H + \beta \mu Q} \xrightarrow{\mu \rightarrow i\mu_I} Z = \text{Tr} e^{-\beta H + i\beta \mu_I Q}$$

Example D=4 N=4 U(N) SYM on S3 at large-N



今日のポイント

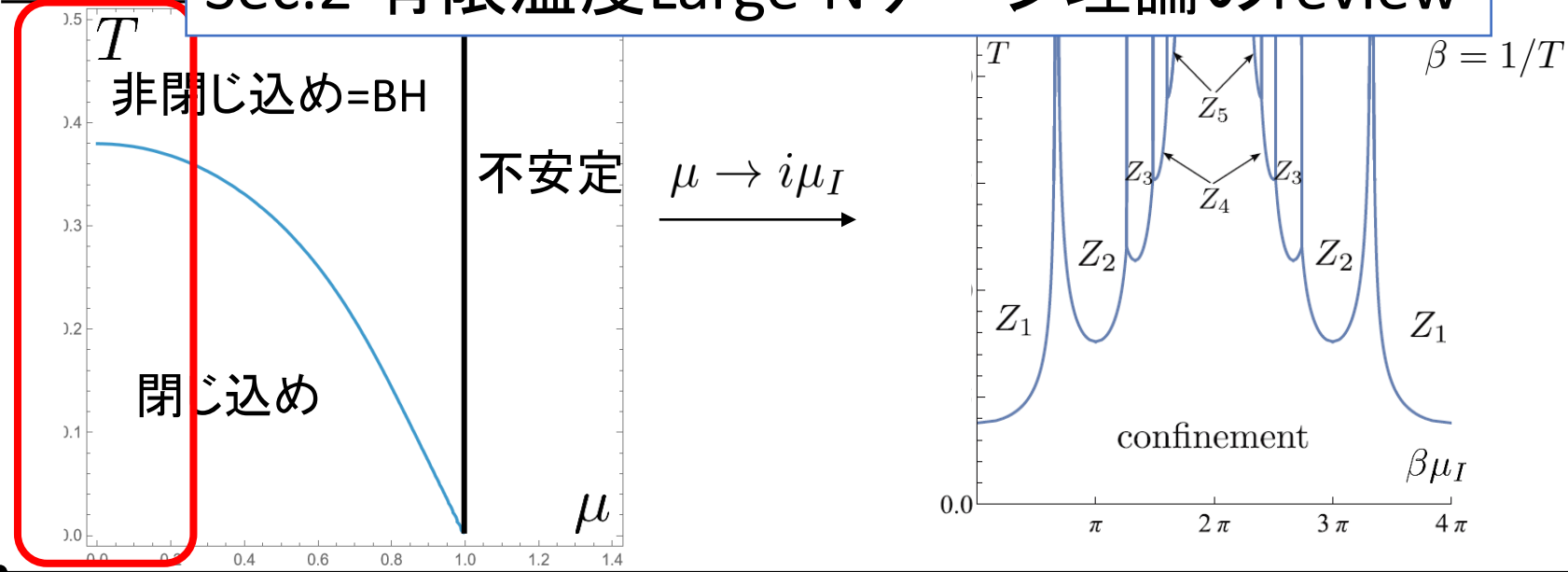
- Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル → 豊富な相構造
- Large-Nゲージ理論のスケールリング則
- gauge/gravity対応

Introduction

★熱分配関数と虚の化学ポテンシャル

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H + \beta \mu Q} \xrightarrow{\mu \rightarrow i\mu_I} Z = \text{Tr} e^{-\beta H + i\beta \mu_I Q}$$

Example Sec.2 有限温度Large-Nゲージ理論のreview



今日のポイント

- Sec.4 • Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル → 豊富な相構造
- Sec.3 • Large-Nゲージ理論のスケールリング則
- Sec.5 • gauge/gravity対応

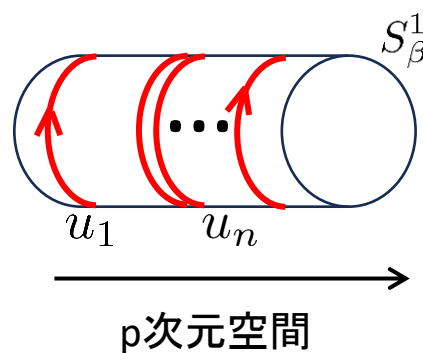
2.有限温度Large-Nゲージ理論のreview

Gross-Pisarski-Yaffe 1981

(p+1)-dim Large-N U(N) ゲージ場 + adjoint matter at large-N

$$S = \frac{N}{\lambda} \int_0^\beta d\tau \int d^p x \text{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \dots \right)$$

$\left\{ \begin{array}{l} \lambda : \text{'t Hooft coupling} \\ p=0,1,2,3,\dots \end{array} \right.$

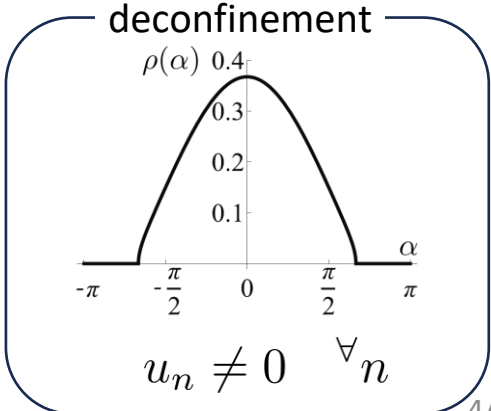
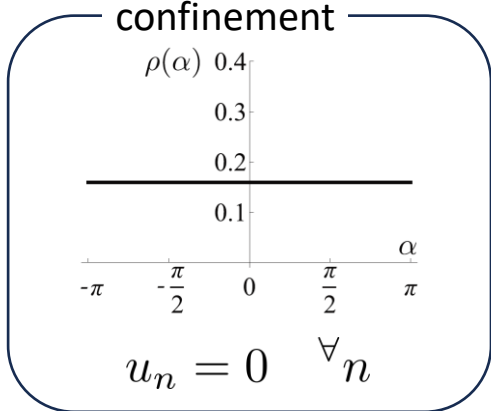


Order parameter:
(主に2つ)

- n巻きPolyakov loop
$$u_n = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(P e^{i \int_0^\beta A_\tau d\tau} \right)$$
- A_τ の固有値分布関数
$$\rho(\alpha) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(\alpha - \alpha_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n e^{-in\beta\alpha}$$

T	Entropy	Z_N 対称性
非閉じ込め deconfinement	$O(N^2)$	破れる
相転移		
閉じ込め confinement	$O(1)$	破れない

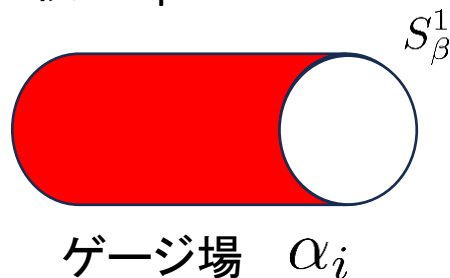
diagonal gauge: $A_\tau = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_i}{d\tau} = 0 \\ \alpha_i = \alpha_i + 2\pi/\beta \end{array} \right.$



★弦理論だとT-dualをとったブレーンの分布の変化

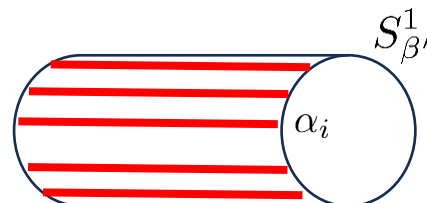
Aharony-Marsano-Minwalla-Wiseman 2004
Mandal-T.M. 2011

(p+1)-dim U(N) ゲージ理論
= N枚のDpブレーン上の理論



T-dual on S_β^1
 $\beta \rightarrow \beta' = \frac{2\pi}{\beta}$

N枚のDp-1ブレーン上の理論



Dp-1ブレーンの位置 α_i [$\rho(\alpha)$ ブレーンの分布]

$\left\{ \begin{array}{l} \beta' \text{ 小} \rightarrow \text{一様分布} \rightarrow \text{confinement} \\ \beta' \text{ 大} \rightarrow \text{局在} \rightarrow \text{deconfinement} \end{array} \right.$

cf. GL相転移, 液滴転移

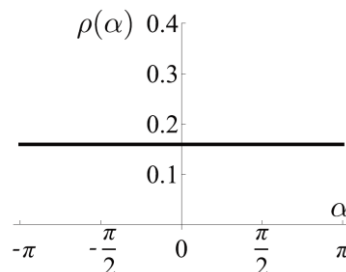
Miyamoto-Maeda 2008
Azuma-Morita-Takeuchi 2014

T
非閉じ込め
deconfinement
— 相転移
閉じ込め
confinement

Entropy	Z_N 対称性
$O(N^2)$	破れる
$O(1)$	破れない

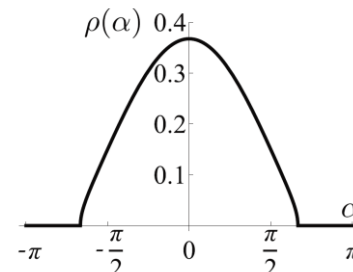
diagonal gauge: $A_\tau = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha_i}{d\tau} = 0 \\ \alpha_i = \alpha_i + 2\pi/\beta \end{array} \right.$

confinement



$$u_n = 0 \quad \forall n$$

deconfinement



$$u_n \neq 0 \quad \forall n$$

2.有限温度Large-Nゲージ理論のreview

Gross-Pisarski-Yaffe 1981

★ 低エネルギー有効理論による解析

$$S = \frac{N}{\lambda} \int_0^\beta d\tau \int d^p x \text{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \dots \right)$$

↓ (形式的に)order parameterのAτ以外を積分 $u_n = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(P e^{i \int_0^{n\beta} A_\tau d\tau} \right)$

Polyakov loop有効理論 (LG theory): $V(\beta, \{u_n\})$

Constraint: 巻き付き数保存 $u_n u_m u_l \rightarrow n + m + l = 0$

$$V(\beta, \{u_n\}) = \epsilon(\beta) + \sum_{n=1}^\infty \underline{a_n(\beta)} u_n u_{-n} + \sum_{n,m} \underline{b_{nm}(\beta)} u_n u_m u_{-n-m} + h.c + \dots$$

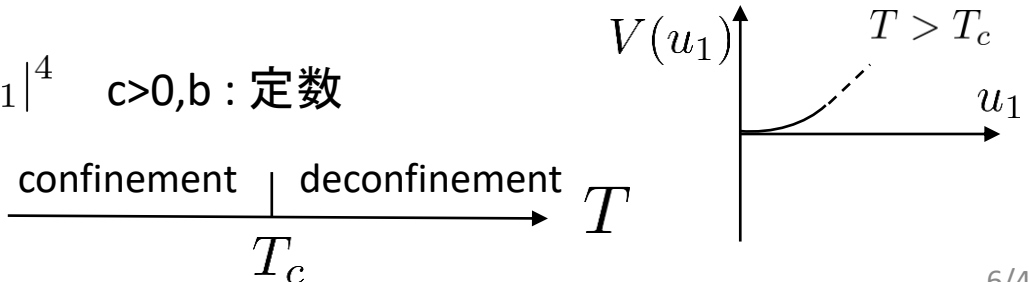
係数: $\epsilon(\beta), a_n(\beta), b_{nm}(\beta), \dots$ これらがわかれば相構造が求まる.

- ・ 可解な模型では厳密に求まる. ex) SUSY, 弱結合, etc.
- ・ 現象論的に決める. ex) 4dim pure YM
- ・ large-N $\epsilon(\beta) = \epsilon$ Gocksch-Neri (1983)
(large-N volume independenceの一種)

簡単な模型: Alvarez-Gaume-Gomez-Liu-Wadia 2005

$$V(\beta, \{u_n\}) = \epsilon + c(T_c - T)|u_1|^2 + b|u_1|^4 \quad c>0, b: \text{定数}$$

- $T < T_c$: $u_1 = 0$ 閉じ込め
- $T > T_c$: $u_1 \neq 0$ 非閉じ込め



2.有限温度Large-Nゲージ理論のreview

Gross-Pisarski-Yaffe 1981

★ 低エネルギー有効理論による解析

$$S = \frac{N}{\lambda} \int_0^\beta d\tau \int d^p x \text{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \dots \right)$$

↓ (形式的に)order parameterのAτ以外を積分 $u_n = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(P e^{i \int_0^{n\beta} A_\tau d\tau} \right)$

Polyakov loop有効理論 (G theory): $V(\beta, \{u_n\})$

Constraint: 巻き あとで紹介するLarge-Nでのスケーリング則を用いるとこれらの係数に更に強い制限が加わる.

$$V(\beta, \{u_n\}) = \epsilon(\beta) + \sum_{n=1}^\infty \underline{a_n(\beta)} u_n u_{-n} + \sum_{n,m} \underline{b_{nm}(\beta)} u_n u_m u_{-n-m} + h.c + \dots$$

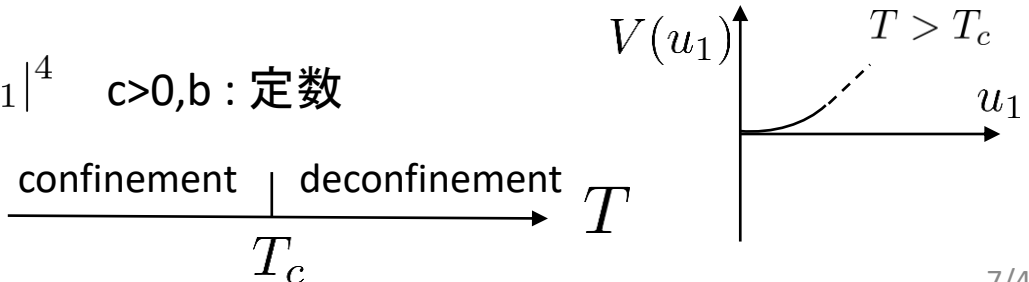
係数: $\epsilon(\beta), a_n(\beta), b_{nm}(\beta), \dots$ これらがわかれば相構造が求まる.

- ・ 可解なモデルでは厳密に求まる. ex) SUSY, 弱結合, etc.
- ・ 現象論的に決める. ex) 4dim pure YM
- ・ large-N $\epsilon(\beta) = \epsilon$ Gocksch-Neri (1983)
(large-N volume independenceの一種)

簡単な模型: Alvarez-Gaume-Gomez-Liu-Wadia 2005

$$V(\beta, \{u_n\}) = \epsilon + c(T_c - T)|u_1|^2 + b|u_1|^4 \quad c>0, b: \text{定数}$$

$\begin{cases} T < T_c : & u_1 = 0 & \text{閉じ込め} \\ T > T_c : & u_1 \neq 0 & \text{非閉じ込め} \end{cases}$



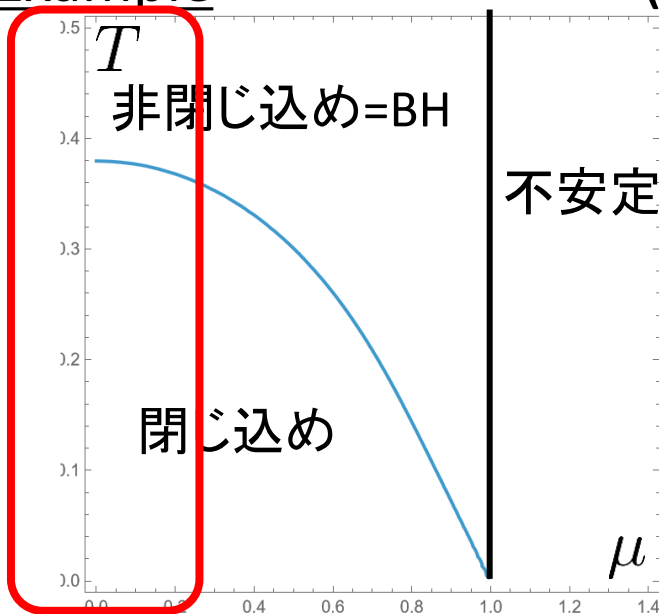
目次

★熱分配関数と虚の化学ポテンシャル

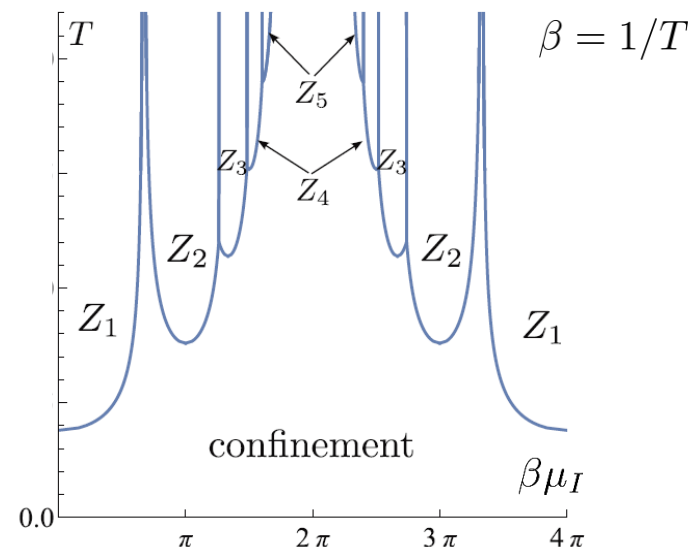
$$Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{-\beta H + \beta \mu Q} \quad \mu \rightarrow i\mu_I \quad Z = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A_\mu e^{-\beta H + i\beta \mu_I Q}$$

• Sec.2 有限温度Large-Nゲージ理論のreview

Example $D=4$ $N=4$ $U(N)$ SYM on $S^1 \times S^3$ at large- N



$$\mu \rightarrow i\mu_I \rightarrow$$



今日のポイント

- Sec.4 • Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル → 豊富な相構造
- Sec.3 • Large-Nゲージ理論のスケールリング則
- Sec.5 • gauge/gravity対応

Sec.3 Large-Nゲージ理論のスケーリング則

3.1 Loop equation at finite temperature

3.2 Scaling relation in loop equation

3.3 Polyakov有効理論への応用

3.1 Loop equation at finite temperature

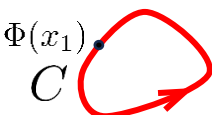
★ Building blocks of gauge theory

→ Loop operator for contour $C := W(C)$

$$\frac{1}{N} \text{Tr} \left[\text{P exp} \left(i \int_C A_\mu dx^\mu \right) \right], \quad \frac{1}{N} \text{Tr} \left[\text{P exp} \left(i \int_C A_\mu dx^\mu \right) \Phi(x_1) \right], \quad \dots$$



C

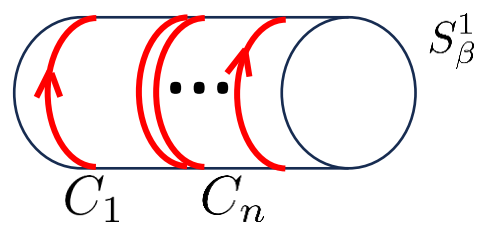


$\Phi(x_1)$
 C

$\underbrace{\hspace{15em}}_{:= W(C_0)}$

$U(N)$ $p+1$ -dim YM theory ($p \geq 0$)
(+ adjoint matters $\Phi(x)$)

★ Winding loop operators
at finite temperature



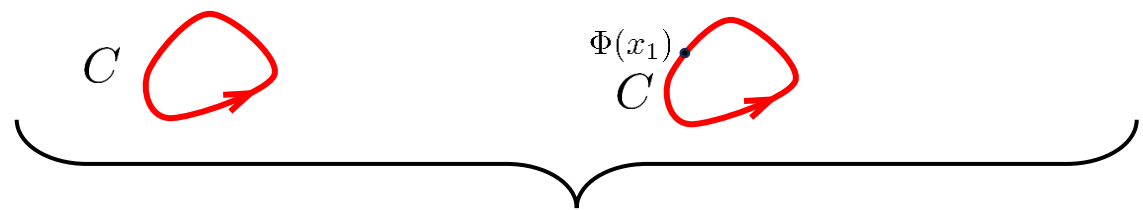
C_n : Contour winding n times
 $:= W(C_n)$

3.1 Loop equation at finite temperature

★ Building blocks of gauge theory

→ Loop operator for contour $C := W(C)$

$$\frac{1}{N} \text{Tr} \left[\text{P exp} \left(i \int_C A_\mu dx^\mu \right) \right], \quad \frac{1}{N} \text{Tr} \left[\text{P exp} \left(i \int_C A_\mu dx^\mu \right) \Phi(x_1) \right], \quad \dots$$



$$:= W(C_0)$$

★ Loop equation (Schwinger-Dyson eq.): non-perturbative correlation for $W(C)$

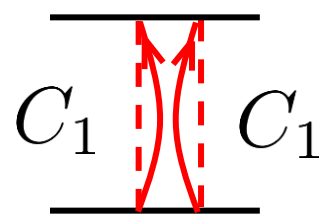
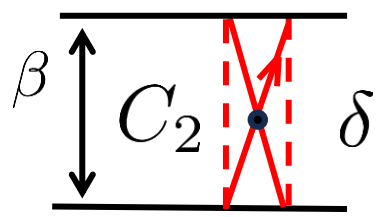
Roughly, the following expression:

Makeenko-Migdal (1979), Eguchi-Kawai (1982), Gocksch-Neri (1983)

$$\langle \delta W(C_m) \rangle = \sum_k \langle W(C_{m-k}) \rangle \langle W(C_k) \rangle + O(1/N^2)$$

$\delta \doteq$ A local insertion of an Euler-Lagrange eq..

ex) m=2



Features

- Conservation of the winding number.
- Large-N factorization.
- No explicit temperature dependence. (δ is independent of temperature).

3.1 Loop equation at finite temperature

★ Building blocks of gauge theory

→ Temperature ← non-zero $\langle W(C_n) \rangle$

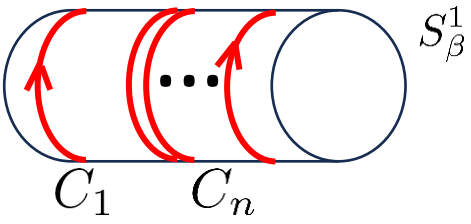
$\frac{1}{N} \text{Tr}$

$W(C_1)$ is an “open” Wilson line.
 → This can be non-zero due to the periodicity $A_\mu(\tau + \beta) = A_\mu(\tau)$.

$\langle W(C_1) \rangle \neq 0 \rightarrow$ Temperature dependence in the loop equations.

$U(N)$ $p+1$ -dim YM theory ($p \geq 0$)
 (+ adjoint matters $\Phi(x)$)

★ Winding loop operators at finite temperature



C_n : Contour winding n times
 $:= W(C_n)$

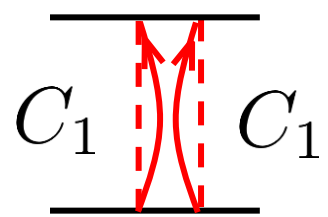
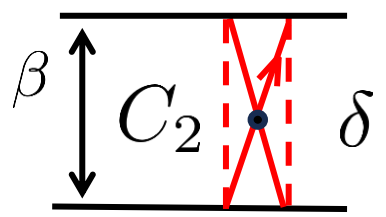
★ Loop equation (Schwinger-Dyson eq.): non-perturbative correlation for $W(C)$

Roughly, the following expression: Makeenko-Migdal (1979), Eguchi-Kawai (1982), Gocksch-Neri (1983)

$$\langle \delta W(C_m) \rangle = \sum_k \langle W(C_{m-k}) \rangle \langle W(C_k) \rangle + O(1/N^2)$$

$\delta \doteq$ A local insertion of an Euler-Lagrange eq..

ex) $m=2$



Features

- Conservation of the winding number.
- Large-N factorization.
- No explicit temperature dependence. (δ is independent of temperature).

Sec.3 Large-Nゲージ理論のスケーリング則

3.1 Loop equation at finite temperature

3.2 Scaling relation in loop equation

3.3 Polyakov有効理論への応用

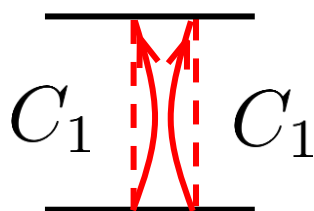
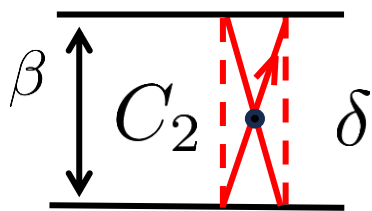
3.2 Scaling relation in loop equation

★ Loop equation

$$\langle \delta W(C_m) \rangle = \sum_k \langle W(C_{m-k}) \rangle \langle W(C_k) \rangle + O(1/N^2)$$

$\delta \doteq$ A local insertion of an Euler-Lagrange eq..

ex) $m=2$



Features

- Conservation of the winding number.
- Large-N factorization.
- No explicit temperature dependence. (δ is independent of temperature).

Scaling relation: For any natural number m , we can show

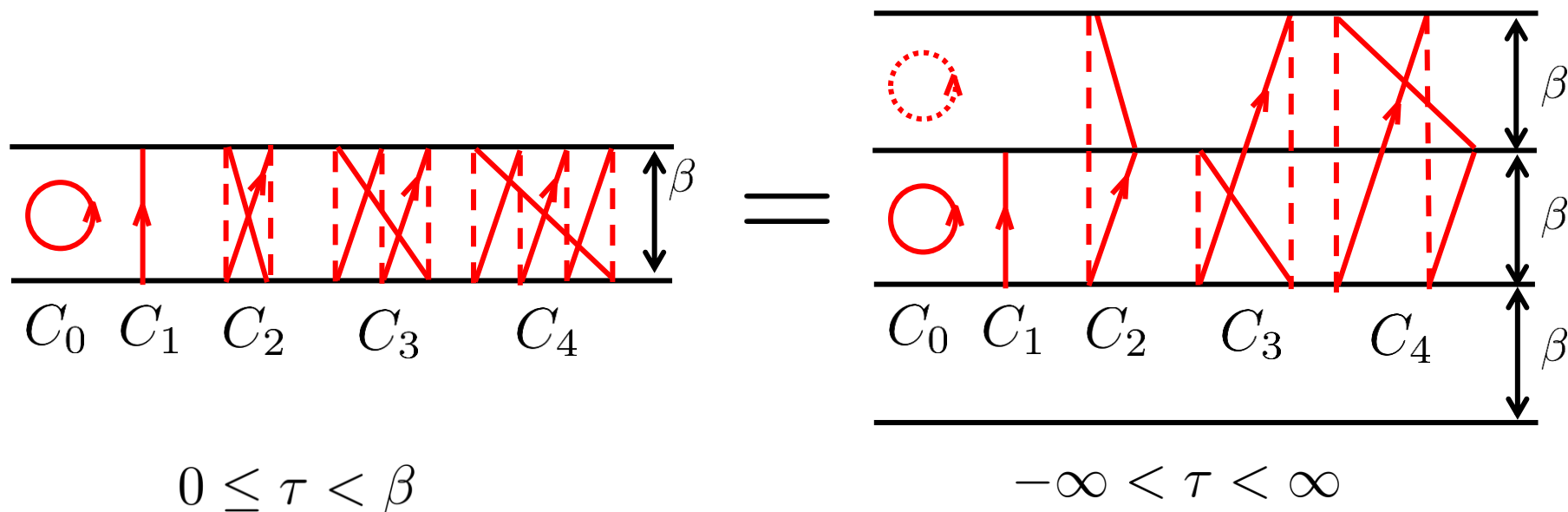
Loop equation at β with the substitution $\begin{cases} \langle W(C_{nm}) \rangle \rightarrow \langle W(C_n) \rangle \\ \langle W(C_n) \rangle = 0 \quad (n \notin m\mathbf{Z}) \end{cases}$

= Loop equation at $m\beta$ ($N \rightarrow \infty$)

3.2 Scaling relation in loop equation

ex) $m=2$ case

Mirror images



$$0 \leq \tau < \beta$$

$$-\infty < \tau < \infty$$

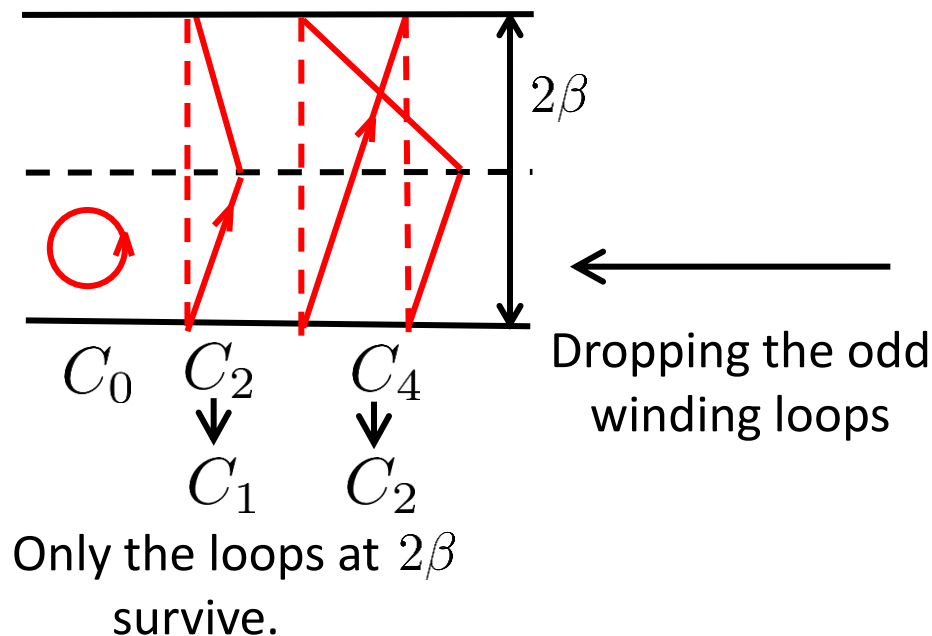
Scaling relation: For any natural number m , we can show

Loop equation at β with the substitution $\begin{cases} \langle W(C_{nm}) \rangle \rightarrow \langle W(C_n) \rangle \\ \langle W(C_n) \rangle = 0 \quad (n \notin m\mathbf{Z}) \end{cases}$

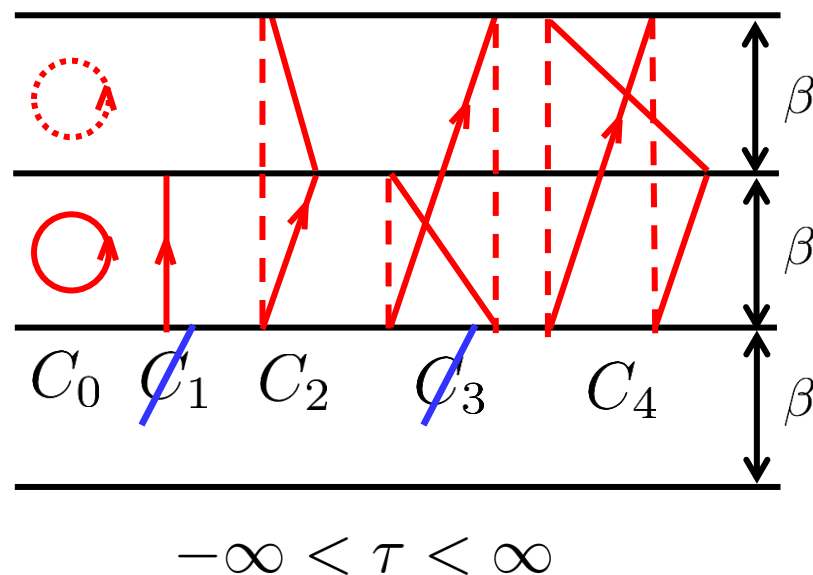
$$= \text{Loop equation at } m\beta \quad (N \rightarrow \infty)$$

3.2 Scaling relation in loop equation

ex) $m=2$ case



Mirror images



Scaling relation: For any natural number m , we can show

Loop equation at β with the substitution
$$\begin{cases} \langle W(C_{nm}) \rangle \rightarrow \langle W(C_n) \rangle \\ \langle W(C_n) \rangle = 0 \quad (n \notin m\mathbf{Z}) \end{cases}$$

= Loop equation at $m\beta$ ($N \rightarrow \infty$)

3.2 Scaling relation in loop equation

Scaling relation: For any natural number m , we can show

Loop equation at β with the substitution $\begin{cases} \langle W(C_{nm}) \rangle \rightarrow \langle W(C_n) \rangle \\ \langle W(C_n) \rangle = 0 \quad (n \notin m\mathbf{Z}) \end{cases}$

= Loop equation at $m\beta$ $(N \rightarrow \infty)$

これから言えること: loop方程式の解の生成ができる.

逆温度 $m\beta$

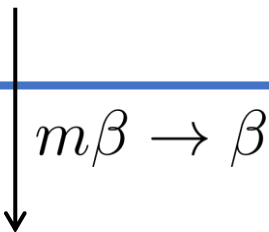
$\langle W(C_n) \rangle(m\beta)$
loop方程式の解があったとする

逆温度 β

$$\begin{cases} \langle W(C_{nm}) \rangle(\beta) = \langle W(C_n) \rangle(m\beta) \\ \langle W(C_n) \rangle(\beta) = 0 \quad (n \notin m\mathbf{Z}) \end{cases}$$

これも必ずloop方程式を満たす.

温度 $T=1/\beta$



解 $\langle W(C_n) \rangle(T)$

温度 $mT=m/\beta$

解の生成 $\begin{cases} \langle W(C_{nm}) \rangle(mT) = \langle W(C_n) \rangle(T) \\ \langle W(C_n) \rangle(mT) = 0 \quad (n \notin m\mathbf{Z}) \end{cases}$

注) 解が安定とは限らない.

3.2 Scaling relation in loop equation

★ A_τ の固有値分布関数 ρ で考えると直感的にわかりやすい.

温度 T

解 $u_n(T)$

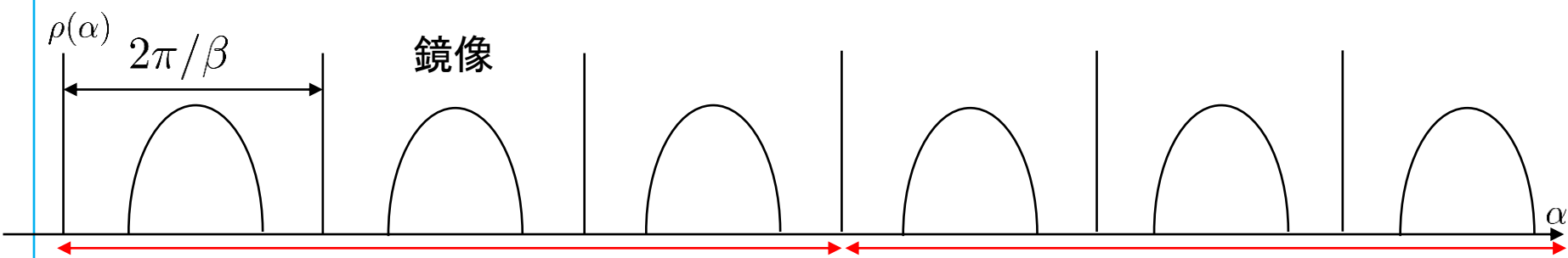
$\rightarrow$ 解

温度 mT

$\begin{cases} u_{mn}(mT) = u_n(T) \\ \text{その他} = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} u_n = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(P e^{i \int_0^{n\beta} A_\tau d\tau} \right) \\ \rho(\alpha) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta(\alpha - \alpha_k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n e^{-in\beta\alpha} \end{cases}$

例) $m=3$ の場合



3つ分の領域を基本領域とみなす

$2\pi/\beta \times 3 = 2\pi/(\beta/3) \rightarrow$ 温度 $3T$ の領域と見なせる.

$\rho_{\text{NEW}}(\alpha) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 \rho(\alpha + 2\pi k/\beta)$
($N \rightarrow N/3$ at each segment.)

$\leftarrow$ We can show $\begin{cases} u_{3n} \neq 0 \\ \text{(the others)}=0 \end{cases}$

温度 $T=1/\beta$

温度 $mT=m/\beta$

解 $\langle W(C_n) \rangle(T)$



解の生成 $\begin{cases} \langle W(C_{nm}) \rangle(mT) = \langle W(C_n) \rangle(T) \\ \langle W(C_n) \rangle(mT) = 0 \quad (n \notin m\mathbf{Z}) \end{cases}$

注) 解が安定とは限らない.

Sec.3 Large-Nゲージ理論のスケーリング則

3.1 Loop equation at finite temperature

3.2 Scaling relation in loop equation

3.3 Polyakov有効理論への応用

ちょっと復習

$$S = \frac{N}{\lambda} \int_0^\beta d\tau \int d^p x \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \dots \right)$$

↓ (形式的に) order parameterのAτ以外を積分

$$u_n = \frac{1}{N} \operatorname{Tr} \left(P e^{i \int_0^\beta A_\tau d\tau} \right)$$

Polyakov loop有効理論 (LG theory): $V(\beta, \{u_n\})$

Constraint: 巻き付き数保存 $u_n u_m u_l \rightarrow n + m + l = 0$

$$V(\beta, \{u_n\}) = \underbrace{\epsilon(\beta)} + \sum_{n=1}^\infty \underbrace{a_n(\beta)} u_n u_{-n} + \sum_{n=1}^\infty \underbrace{b_n(\beta)} u_n^2 u_{-n}^2 + \sum_{n,m} \underbrace{c_{nm}(\beta)} u_n u_m u_{-n-m} + h.c + \dots$$

この有効作用が求まれば, 系の熱力学的な性質がわかる.

Scaling relation

Loop equation at β with the substitution $\begin{cases} \langle W(C_{nm}) \rangle \rightarrow \langle W(C_n) \rangle \\ \langle W(C_n) \rangle = 0 \quad (n \notin m\mathbf{Z}) \end{cases}$

= Loop equation at $m\beta$ $(N \rightarrow \infty)$

→ $V(\beta, \{u_n\})$ has to satisfy the following relation for any m :

$$V(\beta, \{u_n\})|_{u_n=0 \ (n \notin m\mathbf{Z}), \ u_{mn} \rightarrow u_n} = V(m\beta, \{u_n\})$$

→ $V(\beta, \{u_n\}) = \epsilon(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a_n(\beta)} u_n u_{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{b_n(\beta)} u_n^2 u_{-n}^2 + \dots$

{

$\epsilon(\beta) = \epsilon \quad \leftarrow \text{Gocksch-Neri (1983)}$

$a_n(\beta) = a_1(n\beta)$

$b_n(\beta) = b_1(n\beta)$

$\dots$

All the coefficients are strongly constrained.

$$V(\beta, \{u_n\}) = \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n\beta) u_n u_{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_1(n\beta) u_n^2 u_{-n}^2 + \dots$$

$$V(\beta, \{u_n\}) = \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} a_1(n\beta) u_n u_{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_1(n\beta) u_n^2 u_{-n}^2 + \cdots$$

★ Effective potential → physical quantities

Ex) u_n in the confinement phase: $u_n = \frac{1}{N} \text{Tr} \left(P e^{i \int_0^{n\beta} A_\tau d\tau} \right)$

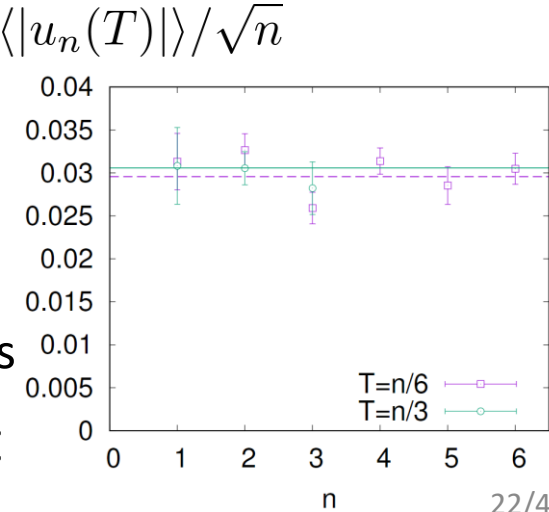
$\langle |u_1(T)| \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \langle |u_n(nT)| \rangle \rightarrow$ 閉じ込めを起こす全てのadjoint Large-N
ゲージ理論で成立.
(fermionがあると一部修正)

Note) $\{u_n\}$ are zero in the confinement phase, but their ratios are finite.

Ex) Bosonic BFSS matrix model (Monte-Carlo)

$$S = \int_0^\beta dt \text{Tr} \left\{ \sum_{I=1}^D \frac{1}{2} (D_t X^I)^2 - \sum_{I,J=1}^D \frac{g^2}{4} [X^I, X^J]^2 \right\} \quad D=3, N=30$$

Line: scaling relation
Dots: numerical results
→ Good agreement

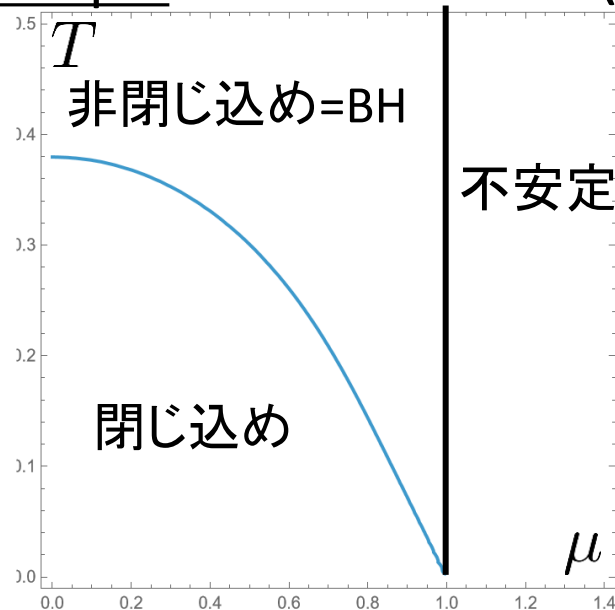


目次

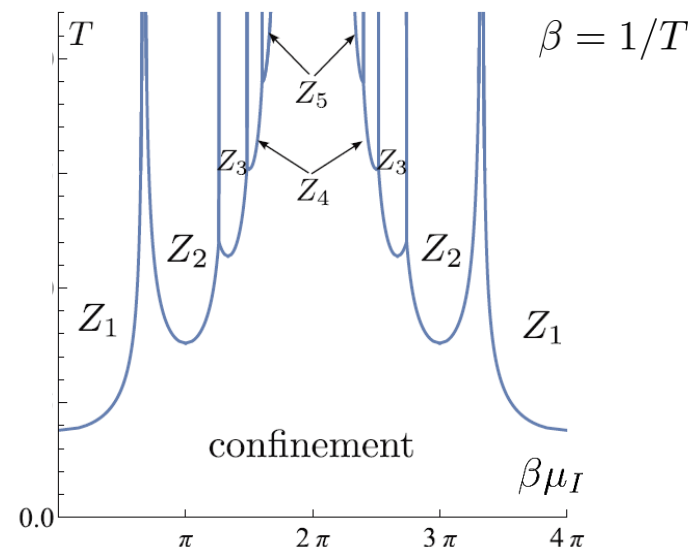
★熱分配関数と虚の化学ポテンシャル

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H + \beta \mu Q} \xrightarrow{\mu \rightarrow i\mu_I} Z = \text{Tr} e^{-\beta H + i\beta \mu_I Q}$$

Example D=4 N=4 U(N) SYM on S³ at large-N



$$\mu \rightarrow i\mu_I$$



今日のポイント

- Sec.4 • Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル → 豊富な相構造
- Sec.3 • Large-Nゲージ理論のスケールリング則
- Sec.5 • gauge/gravity対応

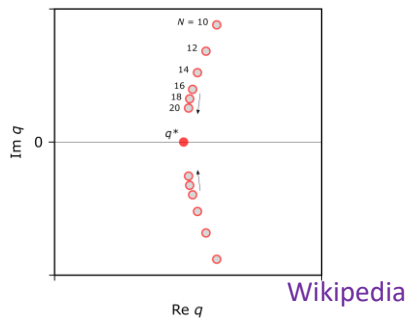
虚の化学ポテンシャルの紹介 実 → 複素数: 見えないものが見えてくる.

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H + \beta \mu Q} \xrightarrow{\mu \rightarrow i\mu_I} Z = \text{Tr} e^{-\beta H + i\beta \mu_I Q}$$

Motivation

- **Lee-Yang theory** (Ising model):
Poles in $\mu + i\mu_I \rightarrow$ Partition function

cf. Wada-Kitazawa-Kanaya 2025 京大プレスリリース



- **Sign problem** in MC: Complex action (**real μ**) $\rightarrow$ Real action (**imaginary μ**)

- $\mu_I =$ **AB phase** (holonomy):

$$e^{i\beta \mu_I q} = e^{iq \int_0^\beta a_\tau d\tau}, \quad a_\tau = \mu_I : \text{the gauge field corresponds to the charge } Q.$$

$\rightarrow$ string(no global symmetry)だと全ての電荷はゲージ対称性に付随するので、
虚の化学ポテンシャルはbackground gauge field $\rightarrow$ **physical**.

- $\mu_I =$ **periodicity**:

Thermal分配関数 $\rightarrow$ SUSY分配関数も可能

$$a_\tau = \mu_I \quad \phi(\tau + \beta) = \pm \phi(\tau) \xrightarrow{\text{gauge trans.}} a_\tau = 0 \quad \phi(\tau + \beta) = \pm e^{iq\beta \mu_I} \phi(\tau)$$

- Complex metric (About angular velocity) (Euclidean AdS-Kerr is allowed. [Witten 2021](#))

$$\begin{array}{ccc} \text{Euclidean Kerr} & ds_E^2 = \cdots + i\omega d\tau d\phi + \cdots & \xrightarrow{\omega \rightarrow i\omega_I} ds^2 = \cdots - \omega_I d\tau d\phi + \cdots \\ dt \rightarrow id\tau & \text{complex metric} & \text{real metric} \end{array}$$

虚の化学ポテンシャルの紹介 実 → 複素数: 見えないものが見えてくる.

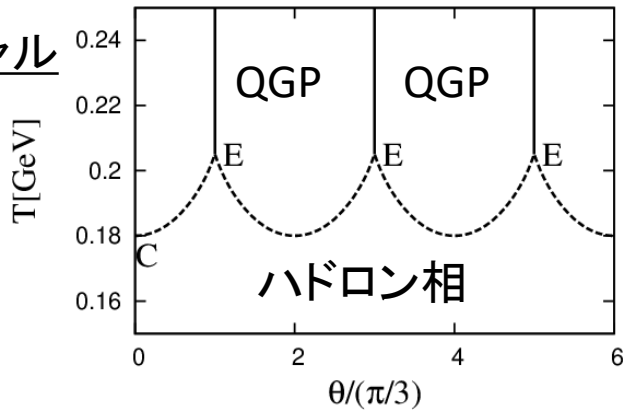
例: QCD

SU(3) QCD (massless)

Kouno et al, JPG 2009

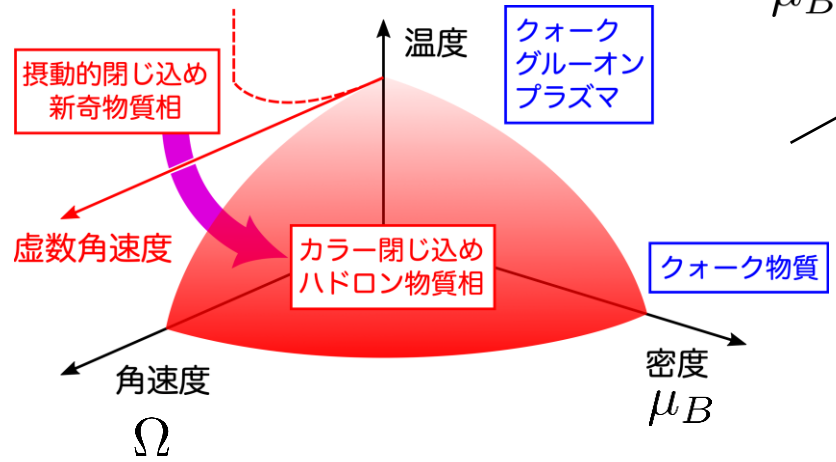
虚のバリオン化学ポテンシャル

Roberge-Weiss 1986



$$\mu_B \rightarrow i\mu_{BI}$$

QCD相図

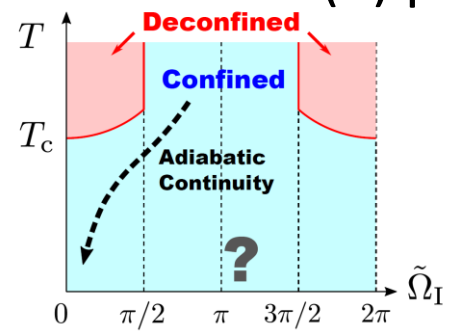


虚の角速度 (=回転に対する化学ポテンシャル)

Chen-Fukushima-Shimada, PRL 2022

$$\Omega \rightarrow i\Omega_I$$

SU(3) pure YM



東京大学プレスリリース
(陳・嶋田・福嶋, 2022) より

Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル

4. Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル

Azuma-T.M. 2024

例) D=4 N=4 U(N) SYM on **S3** at large-N

(10dim SYM $\rightarrow$ 4dim $\curvearrowright$ reduction)

S3の半径=1

$$S = \frac{N}{\lambda} \int d^4x \text{Tr} \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \sum_{I=1}^6 \left(\frac{1}{2} (D_\mu \phi_I)^2 + \frac{1}{2} (\phi_I)^2 \right) - \frac{1}{4} [\phi_I, \phi_J]^2 + \text{fermions} \right)$$

★ Two limits: $\begin{cases} \lambda \ll 1 & \text{Free SYM(解析可能). 定性的にSUGRAと同様の相構造} \\ & \text{Sundborg 2000, Aharony-Marsano-Minwalla-Papadodimas-Raamsdonk 2004} \\ & \text{Murata-Nishioka-Tanahashi-Yumisaki 2008} \\ \lambda \gg 1 & \text{Holography} \rightarrow \text{SUGRAで解ける.} \end{cases}$

★ 保存量

5個の交換する保存量 $\begin{cases} 3\text{個のR電荷: } Q_1, Q_2, Q_3 \\ 2\text{個のS3上の角運動量: } J_1, J_2 \end{cases}$

10dimの視点だと
全て角運動量

(全ての保存量は似た性質)

$\rightarrow$ 5個の化学ポテンシャル $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \Omega_1, \Omega_2$

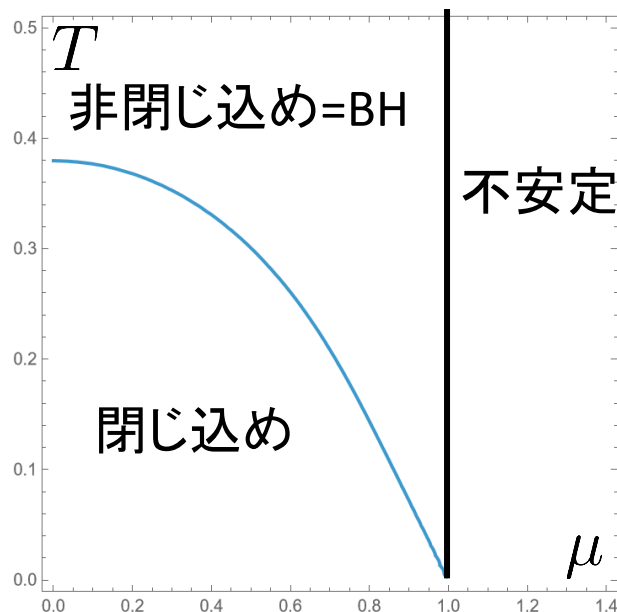
$$Z = \text{Tre}^{-\beta H + \sum_{a=1}^3 \beta \mu_a Q_a + \sum_{b=1}^2 \beta \Omega_b J_b}$$

4. Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル

Azuma-T.M. 2024

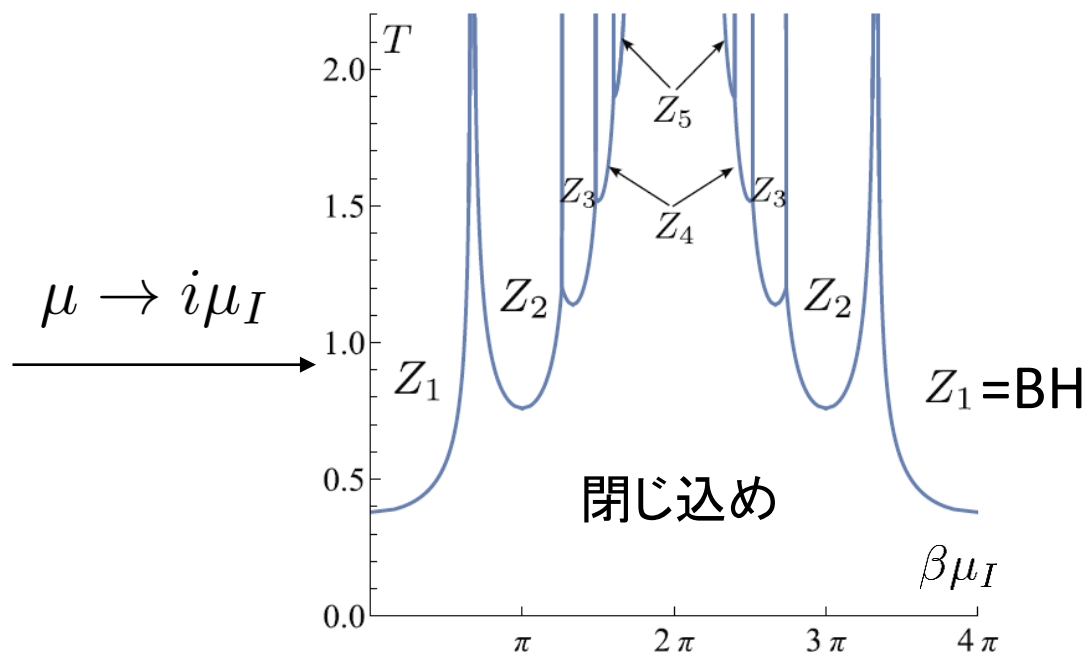
μ : (実)化学ポテンシャル

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu, \Omega_a = 0$$



μ_I : 虚の化学ポテンシャル

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = i\mu_I, \Omega_a = 0$$



Hawking and H. S. Reall 2000, Basu-Wadia 2006

Yamada-Yaffe 2006

Murata-Nishioka-Tanahashi-Yumisaki 2008

Choi-Jain-Kim-Krishna-Lee-Minwalla-Patelc 2024

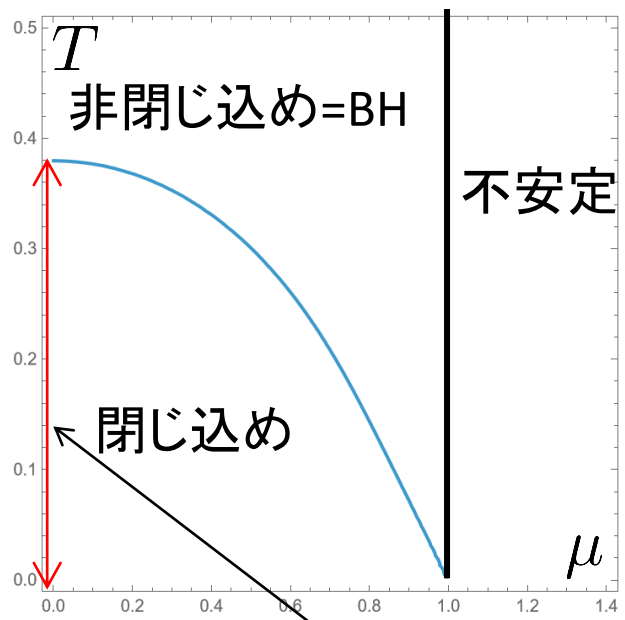
ポイント:

- ・強結合 ($\lambda \gg 1$) と弱結合 ($\lambda \ll 1$) は定性的に似ている.
- ・「角運動量」と「R電荷」は定性的に似ている.

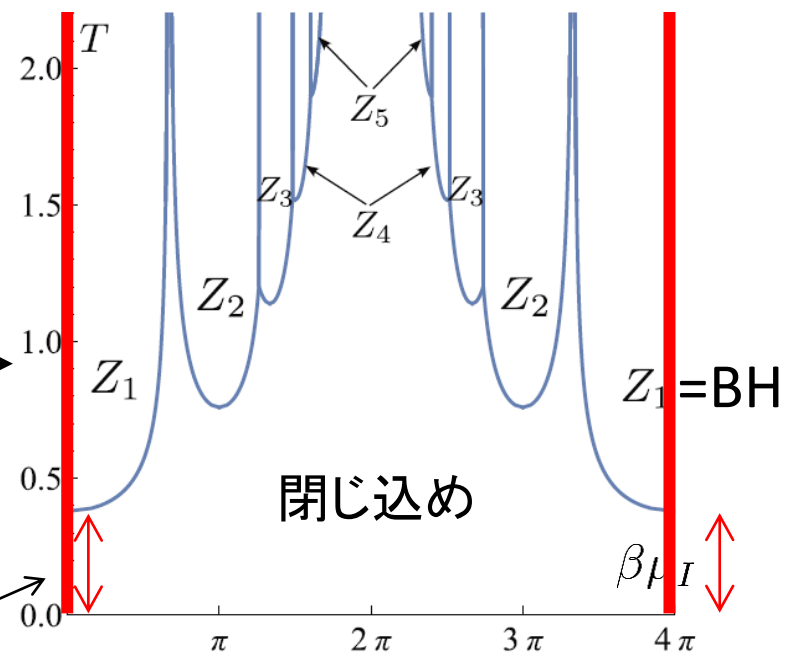
4. Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル
Azuma-T.M. 2024

μ : (実)化学ポテンシャル
 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu, \Omega_a = 0$

μ_I : 虚の化学ポテンシャル
 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = i\mu_I, \Omega_a = 0$



$\mu \rightarrow i\mu_I$



$\mu = 0$ は一致

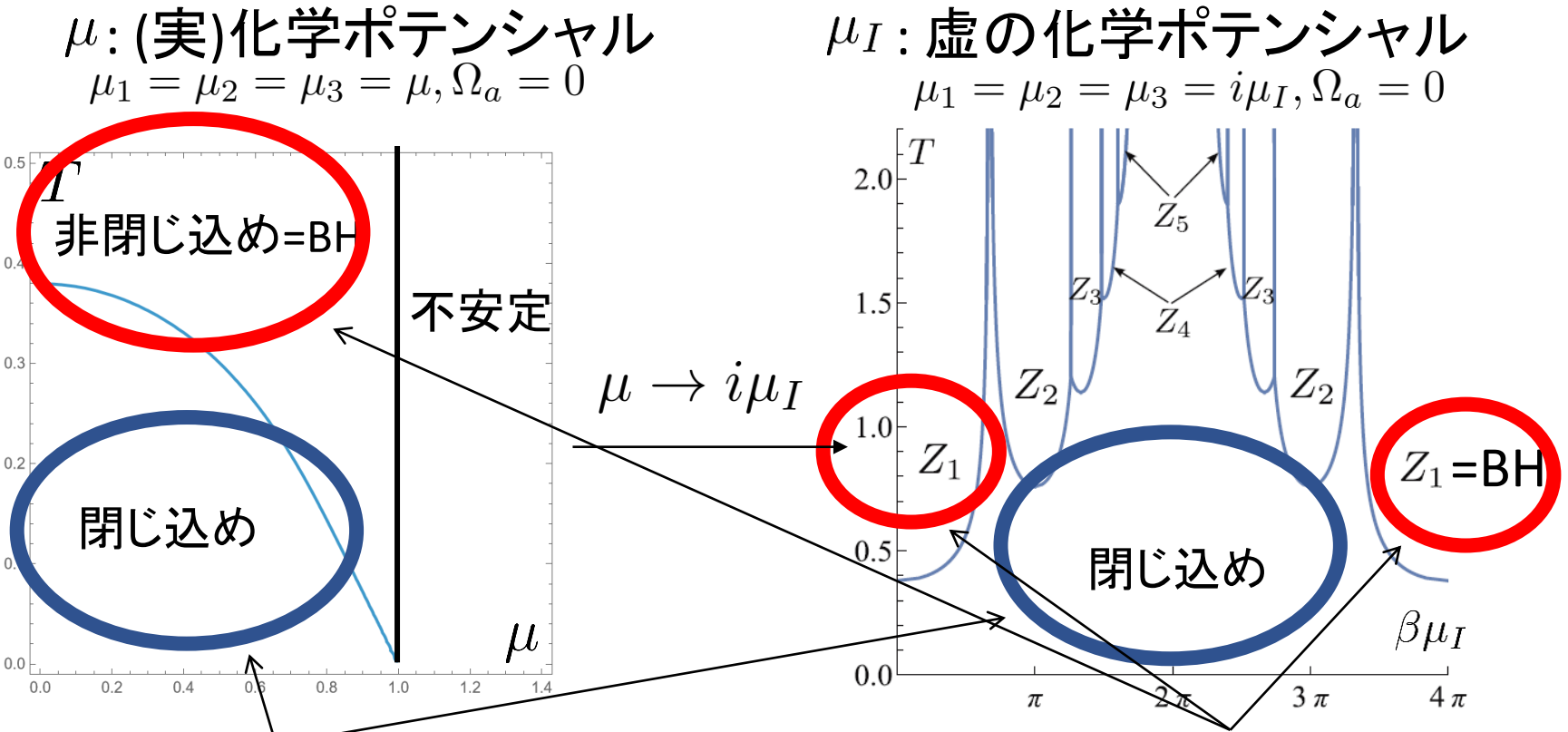
周期性 $\beta\mu_I \simeq \beta\mu_I + 4\pi$

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H + \underline{i\beta\mu_I Q}}$$

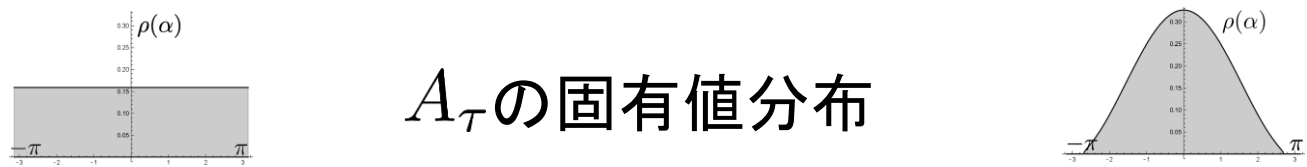
Qの最小単位: fermion 1/2

荷電共役 $\beta\mu_I \rightarrow -\beta\mu_I$

4. Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル
Azuma-T.M. 2024



閉じ込め相
非閉じ込め相 (=BH)



破れない
 $O(1)$

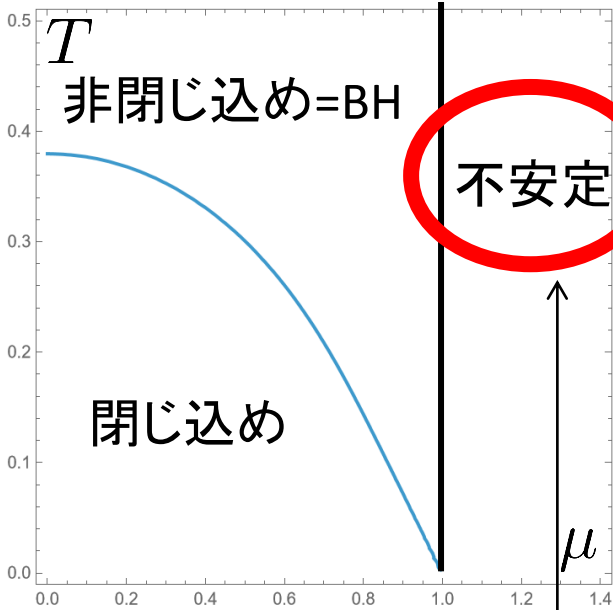
Z_N 対称性
エントロピー

破れる
 $O(N^2)$

4. Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル

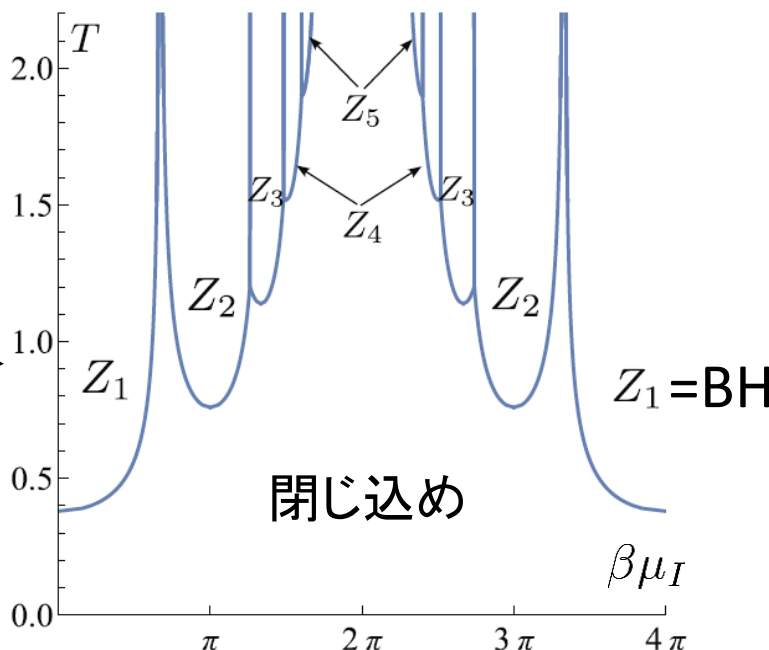
Azuma-T.M. 2024

μ : (実)化学ポテンシャル
 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu, \Omega_a = 0$



μ_I : 虚の化学ポテンシャル
 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = i\mu_I, \Omega_a = 0$

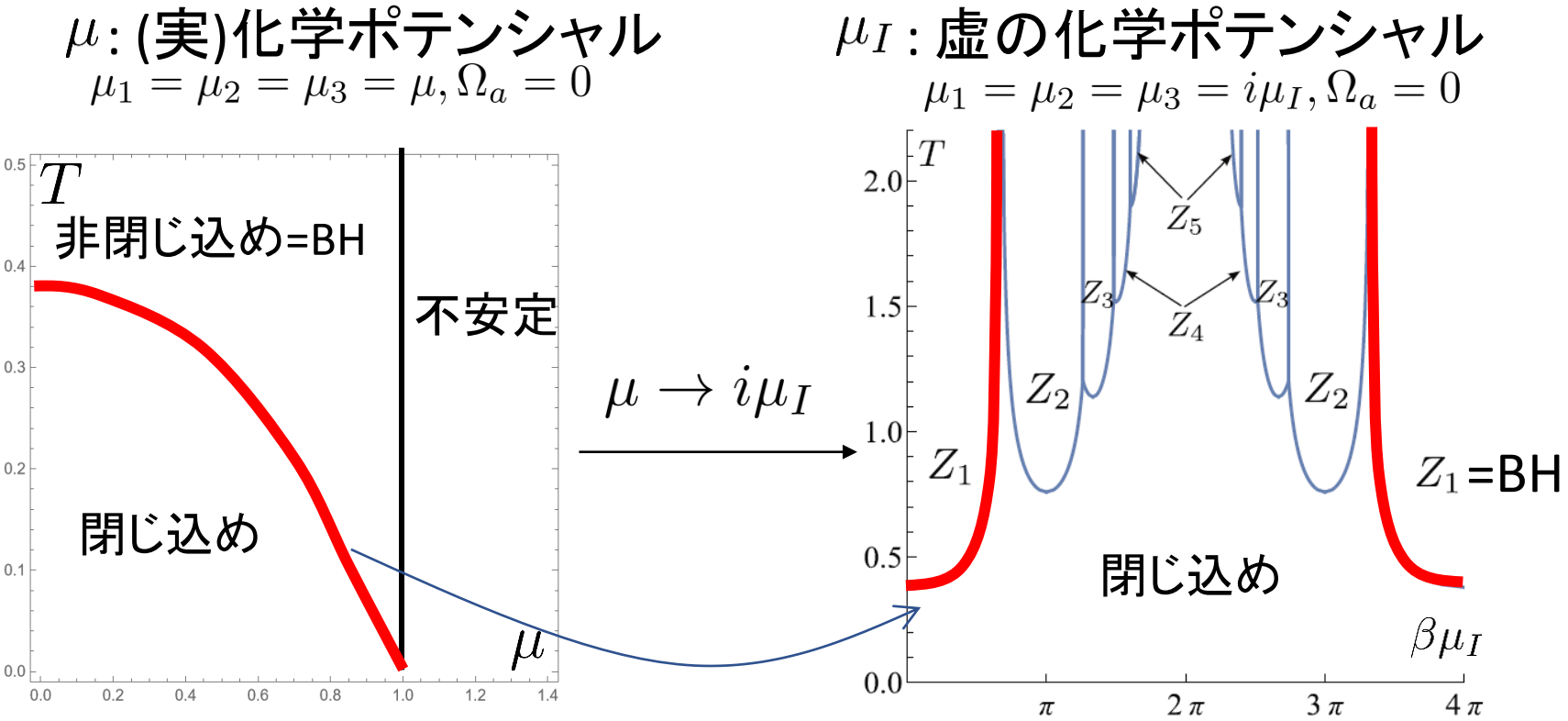
$\mu \rightarrow i\mu_I$



あまり早く回すと系は不安定化

5次元SUGRAが破綻し, 10次元では安定な配位が存在するという予想

4. Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル
Azuma-T.M. 2024



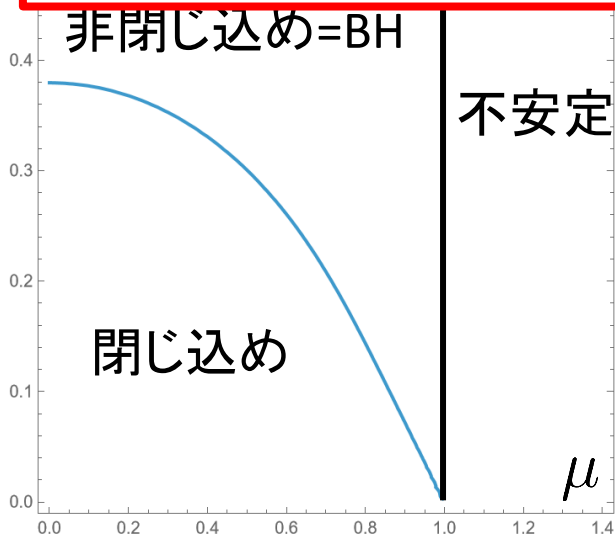
閉じ込め・非閉じ込め相転移曲線 → 解析接続で得られる.

$$\mu \rightarrow i\mu_I$$

μ : (実)化学ポテンシャル

スケーリング則

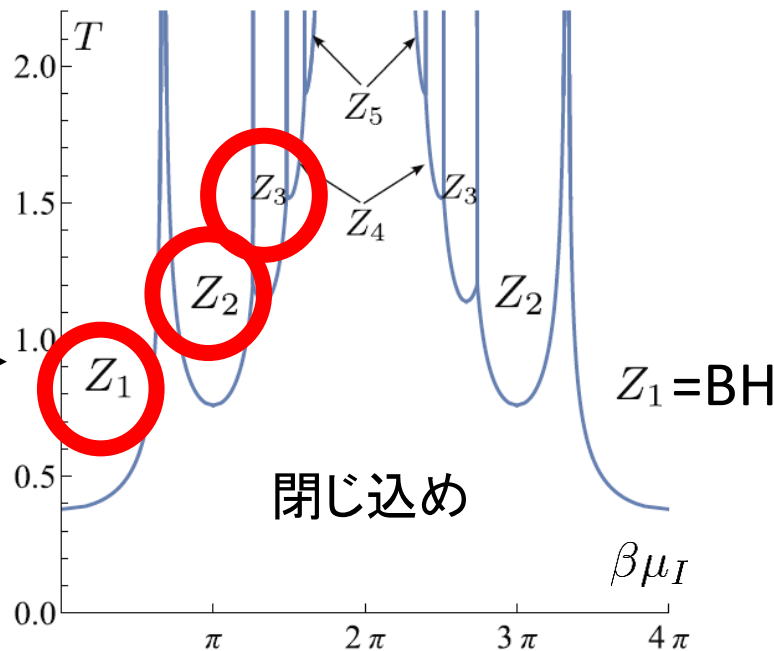
→ Zm型非閉じ込め相が出現.



$\mu \rightarrow i\mu_I$

μ_I : 虚の化学ポテンシャル

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = i\mu_I, \Omega_a = 0$



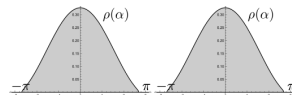
Z_m 型非閉じ込め相が出現

Z_N 対称性 $\rightarrow Z_m$ 対称性

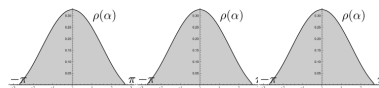
エントロピー: $O(N^2)$



: 通常の新閉じ込め相(Z1)

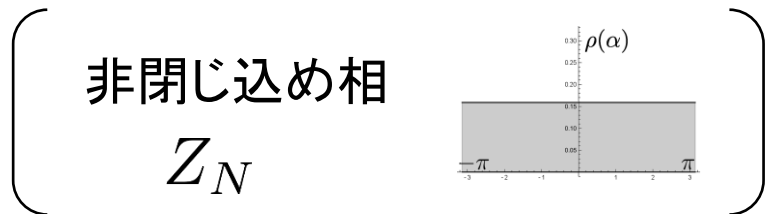


: Z2型非閉じ込め相



: Z3型非閉じ込め相

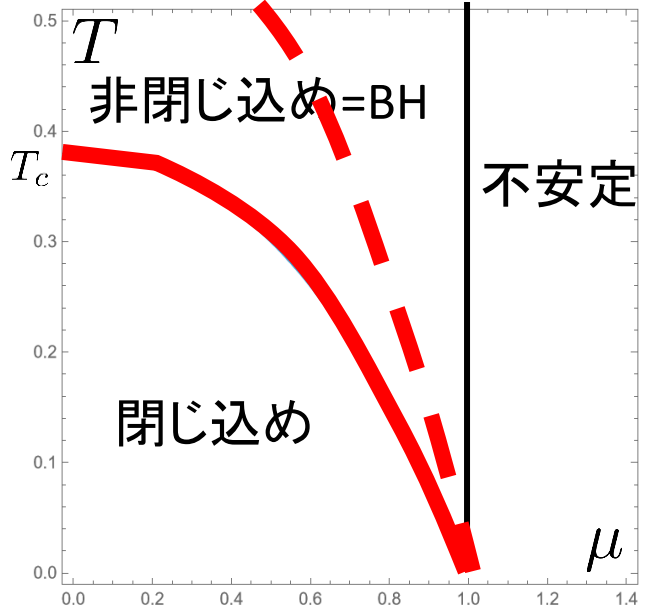
⋮



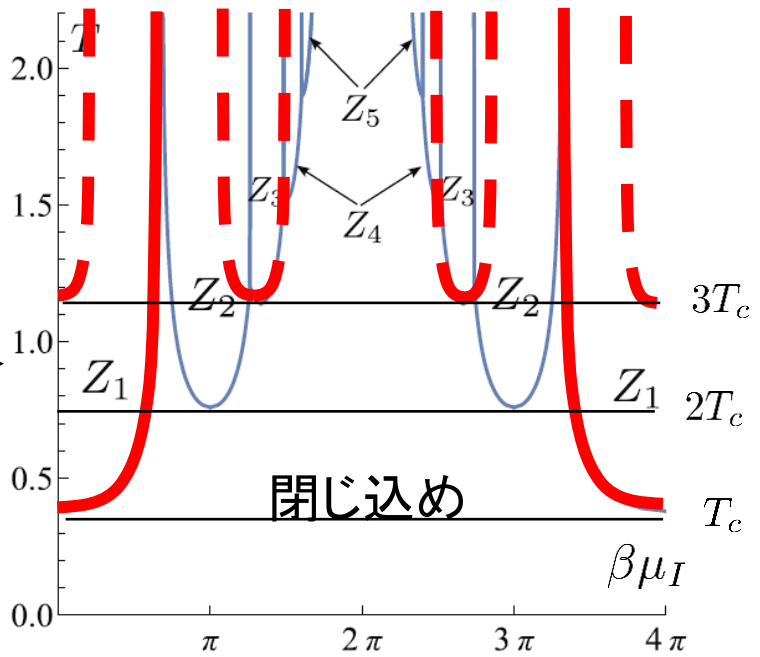
$3T_c$ μ : (実)化学ポテンシャル

μ_I : 虚の化学ポテンシャル

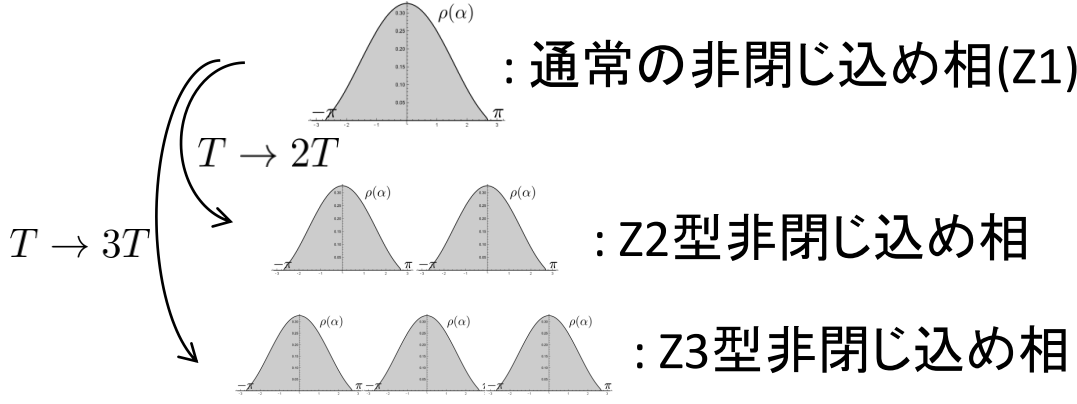
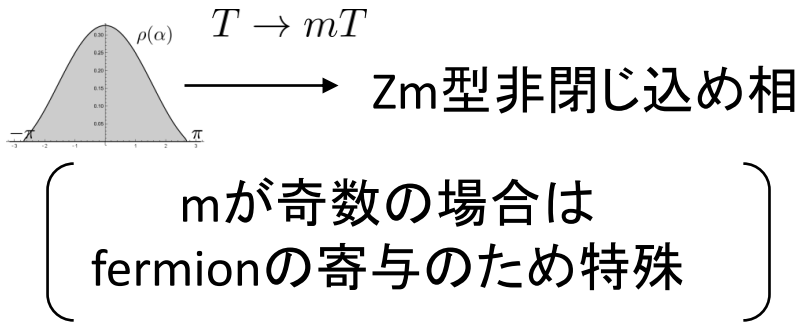
$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = i\mu_I, \Omega_a = 0$$



$$\mu \rightarrow i\mu_I$$



スケーリング則



ただし、各相の自由エネルギーが最小なものが実現

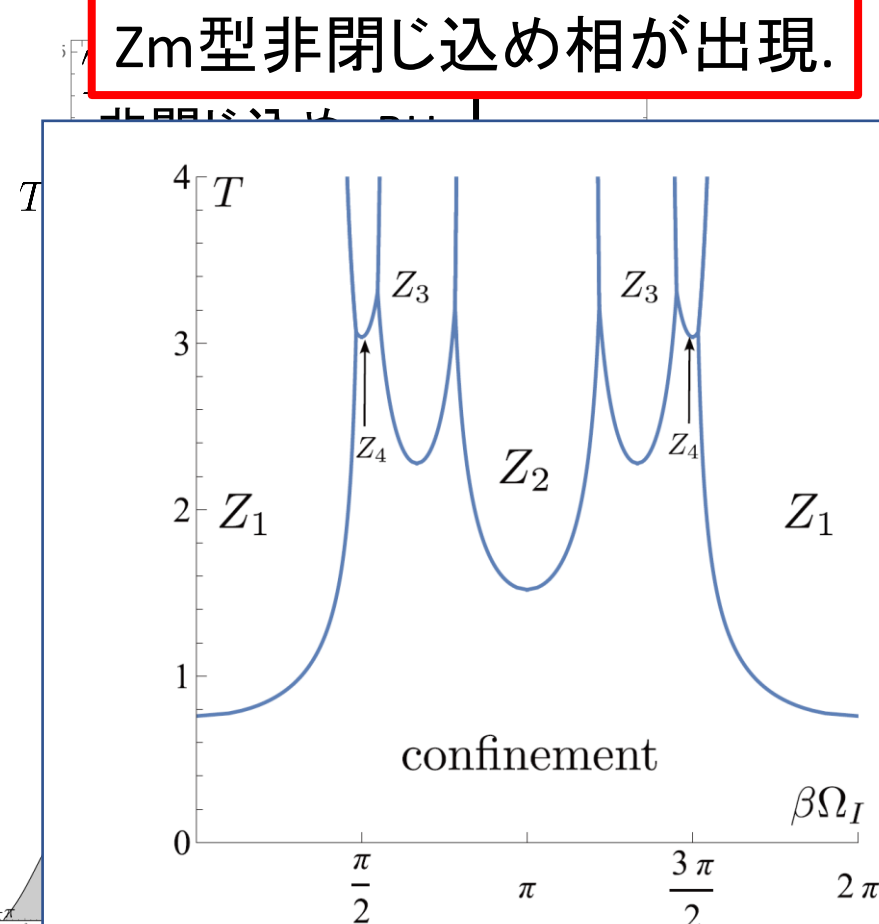
Azuma-T.M. 2024

Azuma-T.M. 2024

Large-Nゲージ理論では
一般に虚の角速度により
 Z_m 型非閉じ込め相が出現.

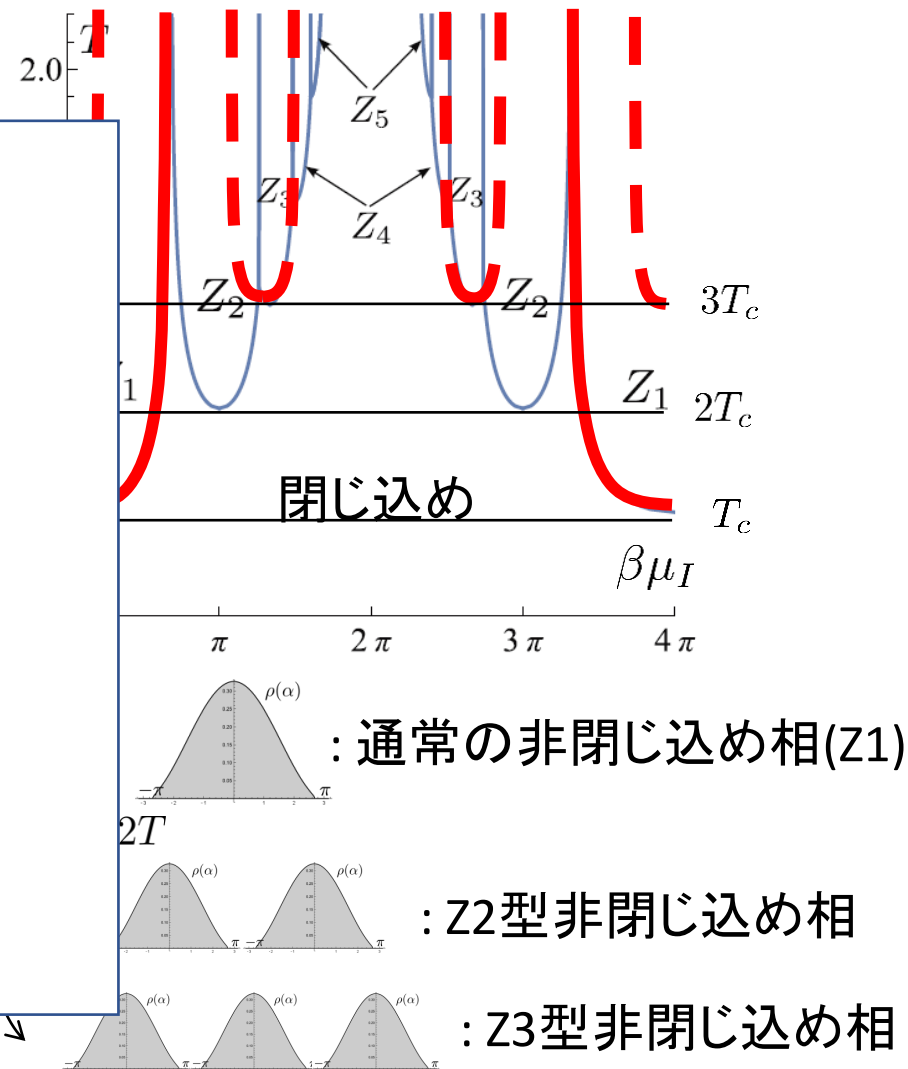
 μ_I : 虚の化学ポテンシャル

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = i\mu_I, \Omega_a = 0$$



4次元 $U(N)$ pure YM on S^3 at large- N

fermionの寄与のため特殊



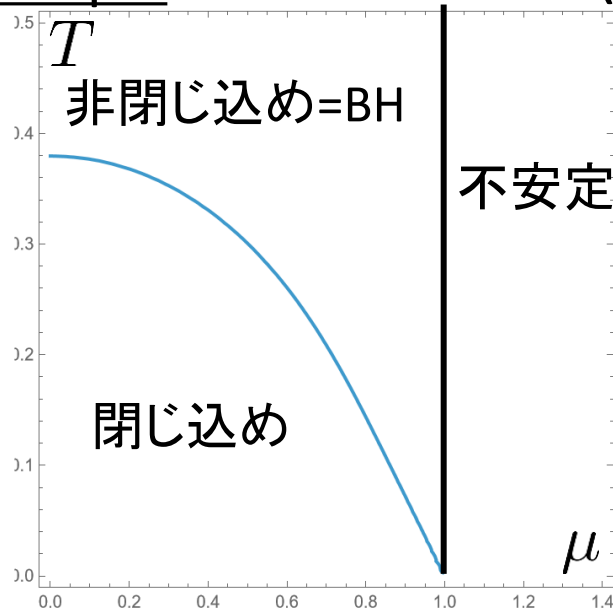
ただし、各相の自由エネルギーが最小なものが実現

目次

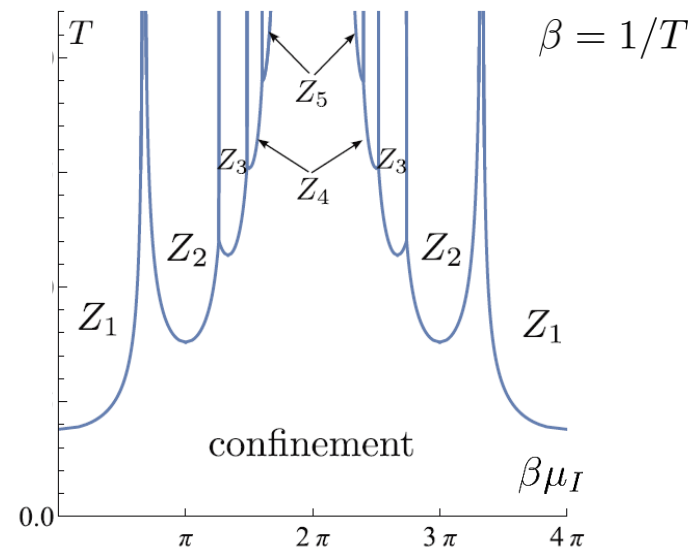
★熱分配関数と虚の化学ポテンシャル

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H + \beta \mu Q} \xrightarrow{\mu \rightarrow i\mu_I} Z = \text{Tr} e^{-\beta H + i\beta \mu_I Q}$$

Example D=4 N=4 U(N) SYM on S³ at large-N



$$\mu \rightarrow i\mu_I$$



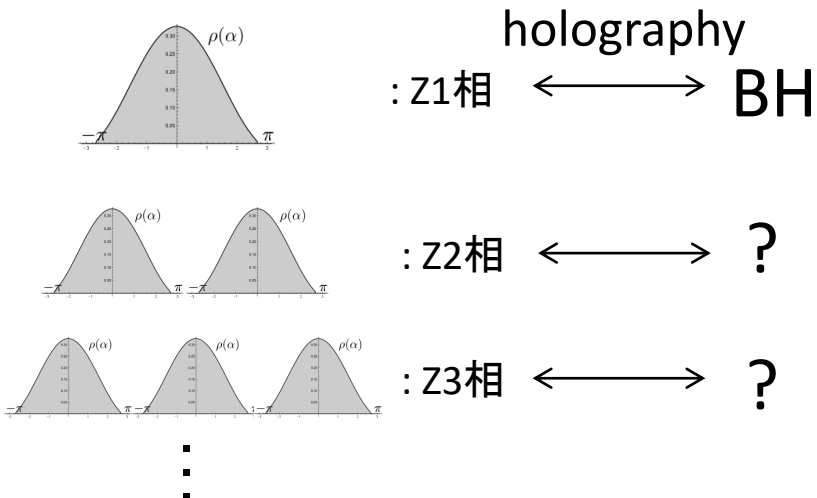
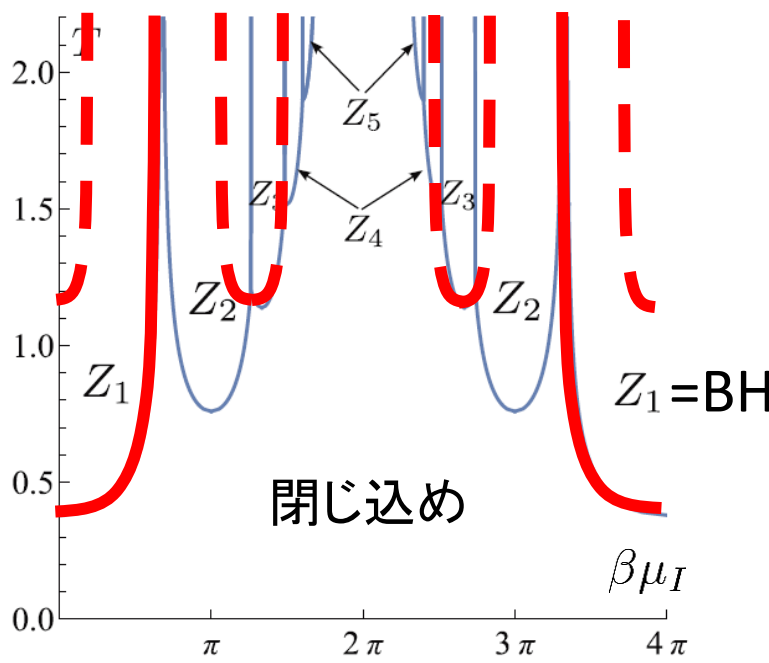
今日のポイント

- Sec.4 • Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル → 豊富な相構造
- Sec.3 • Large-Nゲージ理論のスケールリング則
- Sec.5 • gauge/gravity対応

5. gauge/gravity対応

μ_I : 虚の化学ポテンシャル

$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = i\mu_I, \Omega_a = 0$



Azuma-Morita-Takeuchi 2012
Benjamin-Lee-Pal-Simmons-Duffin-Xu 2024
Azuma-T.M. on going

Large-Nのスケーリング則
(Large-Nで厳密に成立)

gauge/gravity対応を信じると

温度TでBH解
↓
温度mTでZm解が存在するはず
(そのような重力解は未発見)

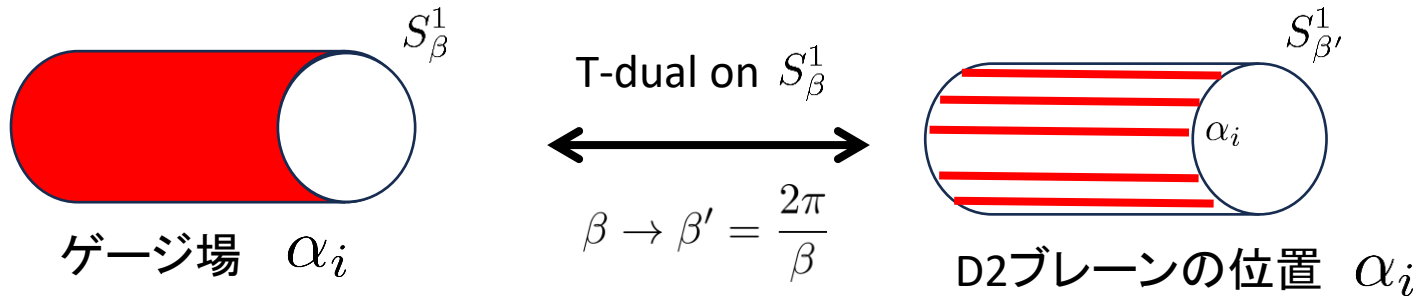
可能性1: 頑張ればZm解がSUGRAでみつかる。
→ Euclidean AdSでは一意性定理が
完全に不成立

可能性2: Zm解はSUGRA解では存在せず
stringyな解
→ gauge/gravity対応不成立
gauge/string対応なら成立

可能性3: AdS/CFT対応不成立

5. gauge/gravity対応

★T-dualをとると理解しやすいが, SUGRA/string解の構成は不明

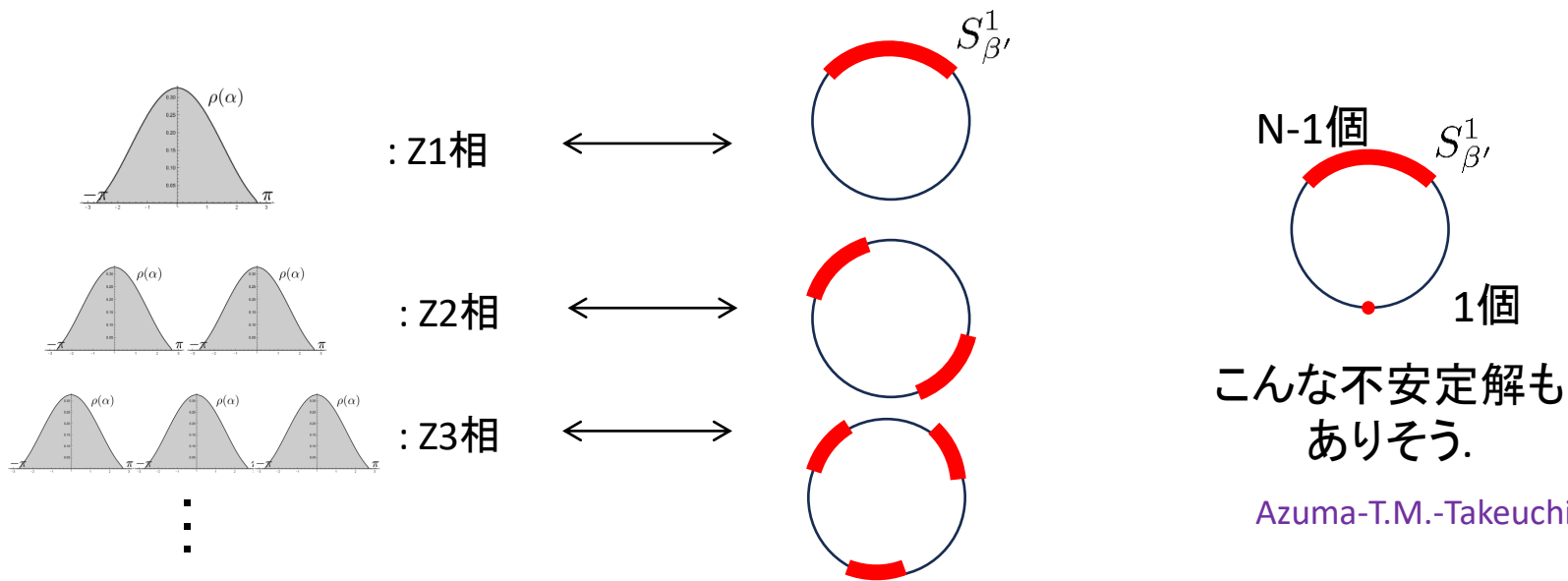


N=4 SYM

D3-brane theory in type-IIB string

D2-brane theory in type-0A string

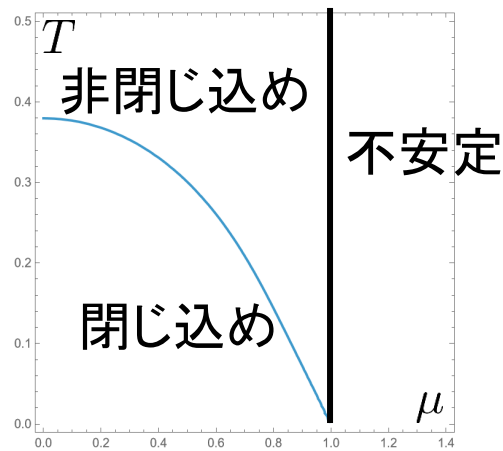
m箇所に局在したD2-brane



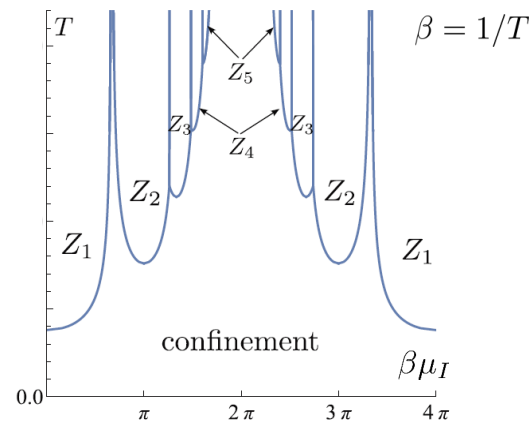
まとめ

まとめ

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H + \beta \mu Q} \xrightarrow{\mu \rightarrow i\mu_I} Z = \text{Tr} e^{-\beta H + i\beta \mu_I Q}$$



$$\xrightarrow{\mu \rightarrow i\mu_I}$$



- Large-Nゲージ理論 + 虚の化学ポテンシャル → 豊富な相構造
- Large-Nゲージ理論のスケーリング則
- gauge/gravity対応 → gauge/string対応?

Future Direction

- SUGRAやstring theoryにおけるスケーリング則の理解と解の構成
- 様々なゲージ理論へのスケーリング則の応用
(今回のスケーリング則は空間 S^1 に対しても成立)
- 虚の化学ポテンシャルのストリング現象論への応用 (非自明な Z_m 対称性)
cf. 細谷機構