京都大学素粒子論研究室セミナー 2024/12/18

Quantum focusing conjecture in two-dimensional evaporating black holes

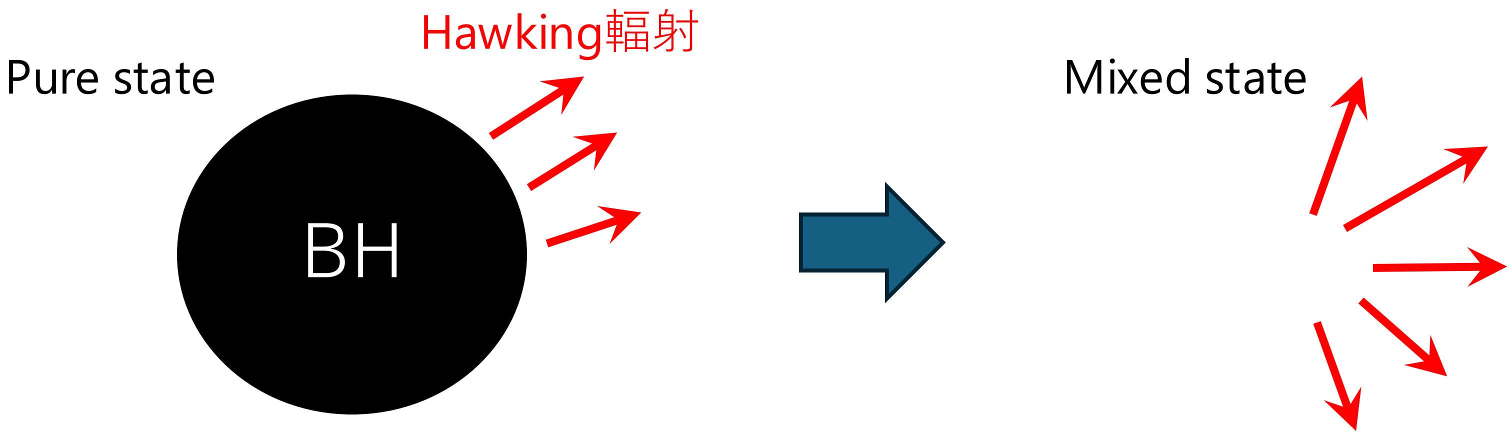
近畿大学　田中亜花音

共同研究者：石橋明浩、松尾善典

Based on arXiv 2403.19136 [JHEP09 (2024)126]

ブラックホールの蒸発過程と熱力学

ブラックホールはHawking 輻射により蒸発する [Hawking,1975]

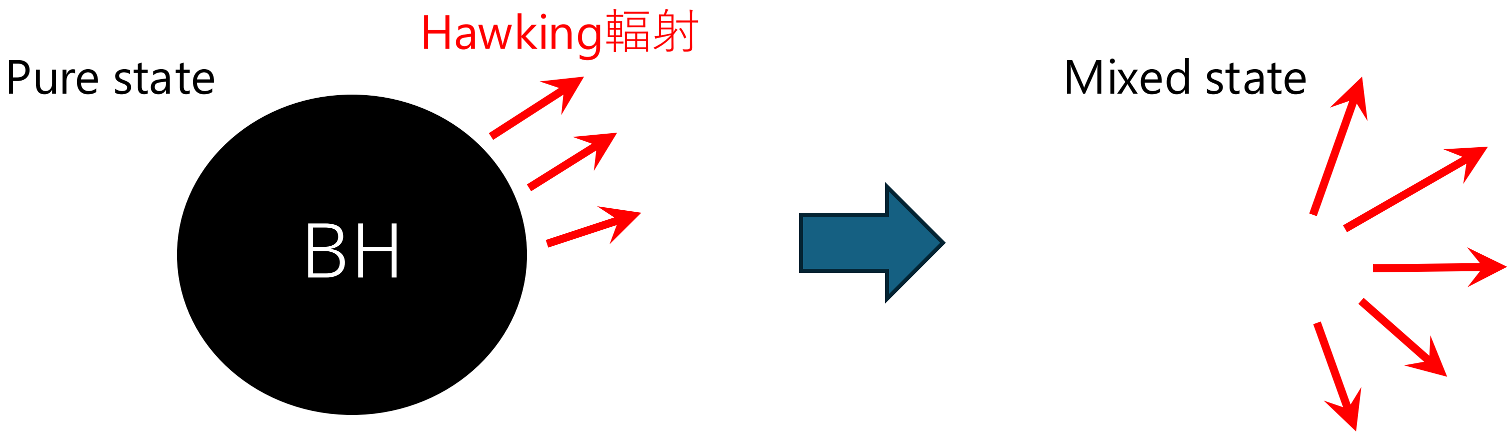


ブラックホール熱力学：

	古典	量子
第1法則	$\frac{\kappa}{8\pi}\delta A = \delta M + \Phi\delta Q + \Omega\delta J$	$\delta S_{\rm gen} = \delta M + \Phi\delta Q + \Omega\delta J$
第2法則	$dA_{\rm BH} \geq 0$	$dS_{\rm gen} \geq 0$

ブラックホールの蒸発過程と熱力学

ブラックホールはHawking 輻射により蒸発する [Hawking,1975]



ブラックホール熱力学：

	古典	量子
第1法則	$\frac{\kappa}{8\pi}\delta A = \delta M + \Phi\delta Q + \Omega\delta J$	$\delta S_{\mathrm{gen}} = \delta M + \Phi\delta Q + \Omega\delta J$
第2法則	$dA_{\mathrm{BH}} \geq 0$	$dS_{\mathrm{gen}} \geq 0$

何をしたか？(詳細はこの後話します)

Quantum focusing conjecture (QFC) は蒸発するblack holeで成り立つか？

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} \leq 0 \qquad \Theta = \frac{1}{A}\frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}$$

一般化エントロピー

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}}{4G_N} + S_{\text{rad}}$$

Page time以降

$\frac{\text{Area}}{4G_N}$ 減少

S_{rad} 減少

→ QFCは破れている可能性あり

先行研究：Y.Matsuo(2023)

Island形成を考慮した
4次元球対称な蒸発BHにおいて
QFCが成り立つ

量子効果を厳密に
取り入れられていない
→

本研究

Island形成を考慮した
量子効果が厳密に取り入れられる
2次元蒸発BHにおいてQFCが成り立つ

Plan to talk

(1) Quantum focusing conjecture

(2) 2次元black hole

(3) 一般化エントロピー

(4) RST modelにおけるQFC (technical part)

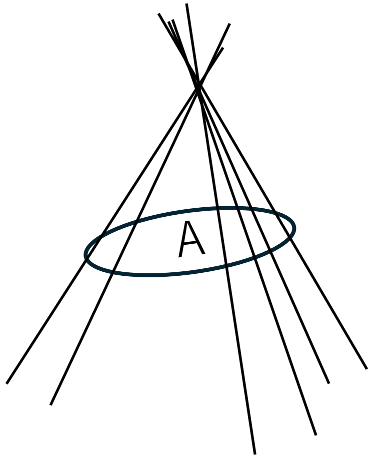
(5) まとめ

(1) Quantum focusing conjecture

Focusing theorem

Null energy condition(NEC)を仮定するとRaychaudhuri方程式は

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma^2 - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \leq 0 \qquad \theta = \frac{1}{A}\frac{dA}{d\lambda}$$



→Focusing theorem

面積Aをblack holeのhorizonの面積だと思うと $dA_{\mathrm{BH}} \geq 0$

量子効果（例：black hole蒸発）を含むとNECは破れるのでFocusing theoremも破れる

→量子効果を含んでも成り立つようなものが欲しい!!（Quantum focusing conjecture)

一般化エントロピー

Bekensteinによる一般化エントロピーを用いて定義する

$$S_{\rm gen} = \frac{A}{4G_N\hbar} + S_{\rm out} + \text{counterterms}$$

面積項　　輻射

物質場のVon Neumann entropy $S_{\rm out} \equiv -{\rm tr}\rho_{\rm out}\log\rho_{\rm out}$ 　 $\rho_{\rm out} = {\rm tr}_{\rm in}\rho$

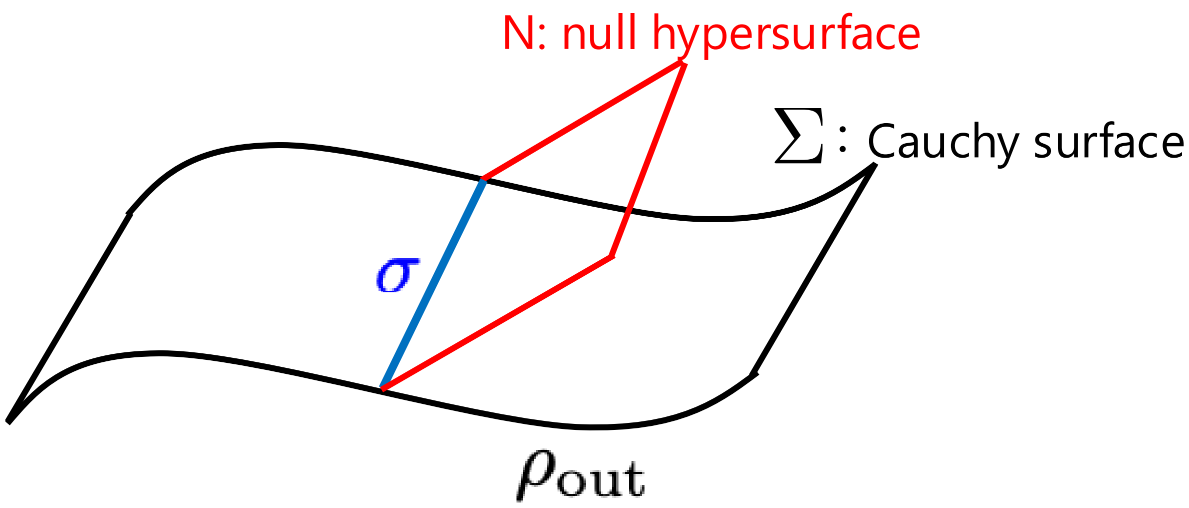
量子効果を含んだ場合にはGeneralized second law(GSL): $dS_{\rm gen} \geq 0$

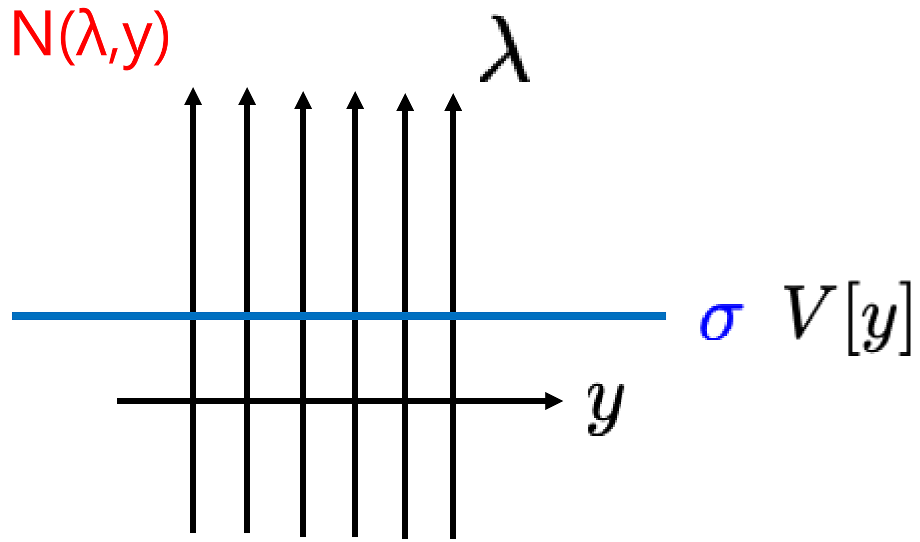
つまり

$$A \to 4G_N\hbar S_{\rm gen}$$

Quantum focusing conjecture

σ (codimension-2 surface)によりCauchy surfaceを２つに分ける



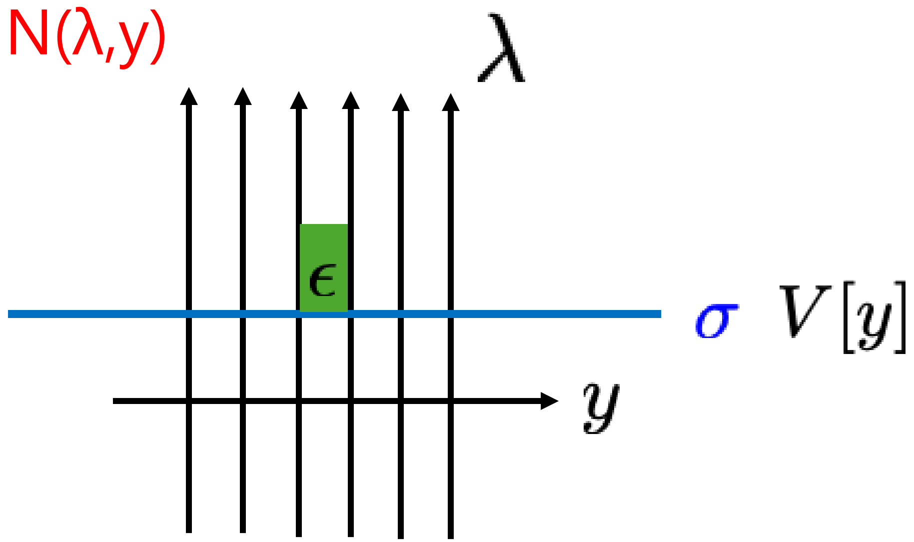


一般化エントロピー：

$$S_{\rm gen}[V(y)] = \frac{A[V(y)]}{4G_N\hbar} + S_{\rm out}[V(y)]$$

Quantum focusing conjecture

$$\left.\frac{dS_{\text{gen}}}{d\epsilon}\right|_{y_1} \equiv \lim_{\epsilon\to 0}\frac{S_{\text{gen}}[V_\epsilon(y)] - S_{\text{gen}}[V(y)]}{\epsilon}$$



Quantum expansion :

$$\Theta = \frac{1}{A}\frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}$$

Quantum focusing conjecture

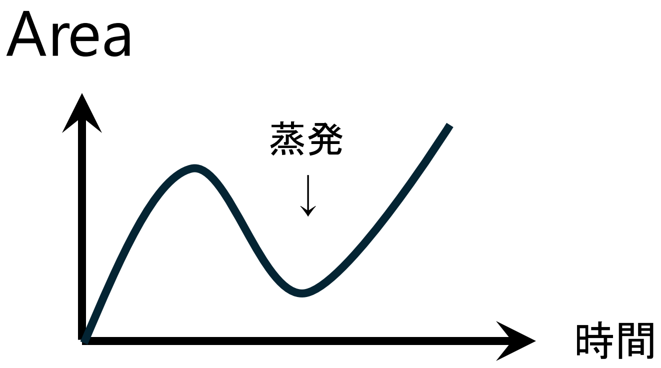
定義： $$\frac{d\Theta}{d\lambda} \leq 0$$

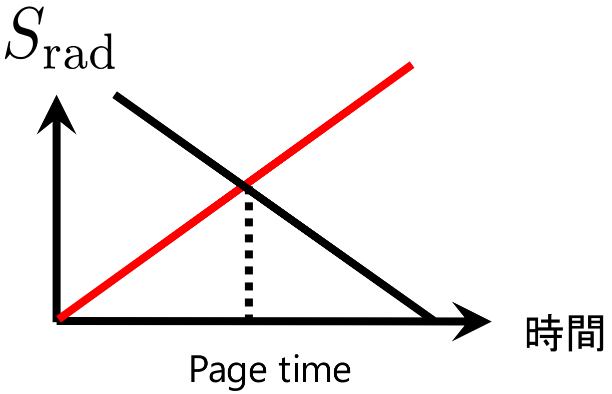
$$\Theta = \frac{1}{A}\frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}$$

Question：QFCは蒸発するblack holeで成り立つか？

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}}{4G_N} + S_{\text{rad}}$$

両方とも減少する（$S_{\text{gen}} \leq 0$）のでQFCは破れている?





Quantum focusing conjecture

先行研究 [Y.Matsuo(2023)]：Island形成を考慮した4次元球対称な蒸発BHにおいて
QFCが成り立つ

<u>先行研究の問題点</u>

- 4次元の量子重力理論は完成されていない
- 量子効果を時空のダイナミクスに取り入れることは技術的に困難

→BHの蒸発過程は近似的なモデル、正当化可能か？

$$S_{\text{gen}} = \frac{A}{4G_N} + S_{EE}$$

時空 ⟺ ? 量子論

Quantum focusing conjecture

解決案

- 2次元時空では半古典Einstein方程式が厳密に解ける
- 4次元の熱力学的性質を全て引き継ぐ

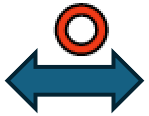
	4次元	2次元
第1法則	$\delta S_{\text{gen}} = \delta M + \Phi\delta Q + \Omega\delta J$	$\delta S_{\text{2D}} = \delta M - \frac{1}{2}\delta\int_{\Sigma}(\nabla T)^2\xi^a d\Sigma_a$
第2法則	$dS_{\text{gen}} \geq 0$	$\delta S_{\text{2D}} \geq 0$

Quantum focusing conjecture

<u>解決案</u>

- 2次元時空では半古典Einstein方程式が厳密に解ける
- 4次元の熱力学的性質を全て引き継ぐ

$$S_{\rm gen} = \frac{A}{4G_N} + S_{EE}$$

時空  量子論

2次元BHでQFCが成り立つかを確認したい

(2) 2次元Black hole

CGHS model

Action: 古典的なdilaton gravity [G.Callan et al,1991]

$$I_{\mathrm{CGHS}} = \frac{1}{2\pi}\int d^2x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\{R+4(\nabla\phi)^2+4\lambda^2\}$$

ϕ :dilaton λ :長さのスケールを持つパラメータ

計量(conformal gauge)： $ds^2 = -e^{2\rho}dx^+dx^-$ $\rho(x^+,x^-)$

運動方程式

$$\begin{cases} e^{-2\phi}(4\partial_+\rho\partial_+\phi - 2\partial_+^2\phi) = T_{++} \\ e^{-2\phi}(4\partial_-\rho\partial_-\phi - 2\partial_-^2\phi) = T_{--} \\ e^{-2\phi}(2\partial_+\partial_-\phi - 4\partial_+\phi\partial_-\phi - e^{2\rho}) = 0 \\ -4\partial_+\partial - \phi + 4\partial_+\partial_-\phi + 2\partial_+\partial_-\rho + e^{2\rho} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\partial_+\partial_-(\rho - \phi) = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{\rho = \phi}$

CGHS model

運動方程式を整理すると $-\partial_+\partial_- e^{-2\phi} = 1 \quad -2\partial_\pm^2 e^{-2\phi} = T_{\pm\pm} \qquad (\rho = \phi)$

- 真空に $x^+ = x_0^+$ でingoingな物質場が入射すると仮定する

$$T_{++} = \frac{M}{x_0^+}\delta(x^+ - x_0^+) \qquad T_{--} = 0$$

$x^+ < x_0^+$ のとき

$$ds^2 = \frac{1}{x^+x^-}dx^+dx^- = -d\sigma^+d\sigma^- \qquad \text{(linear dilaton vacuum)}$$

$x^+ > x_0^+$ のとき

$$ds^2 = \frac{1}{M - x^+(x^- + \frac{M}{x_0^+})}dx^+dx^- \qquad \text{(black hole解)}$$

$$= \frac{1}{1 - v(u+1)}dudv$$

RST model

古典的な物質場→量子論的な物質場へ

Action: dilaton gravity + quantum effect [G.Russo et al,1991]

$$
\begin{cases}
I_{\text{CGHS}} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int d^2x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\{R+4(\nabla\phi)^2+4\lambda^2\} \\
I_{\text{Q}} = -\dfrac{c}{12\pi}\displaystyle\int dx^+dx^-\partial_+\rho\partial_-\rho \\
I_{\text{RST}} = \dfrac{c}{48\pi}\displaystyle\int d^2x\sqrt{-g}\phi R
\end{cases}
$$

← Conformal anomaly $\langle T^{\mu}{}_{\mu}\rangle = \dfrac{c}{12}R$

← $\rho=\phi$ の対称性を回復

C: central charge　ϕ : dilaton場　R :Ricci scalar

RST model

- Linear dilaton vacuumに物質場のshock waveを入射させてBHを形成するような状況を考える

New field variable： $\Omega = e^{-2\phi} + \frac{c}{24}\phi$

運動方程式: $\partial_+\partial_-\Omega + 1 = 0 \qquad -\partial_\pm^2\Omega = \frac{c}{24}t_\pm$

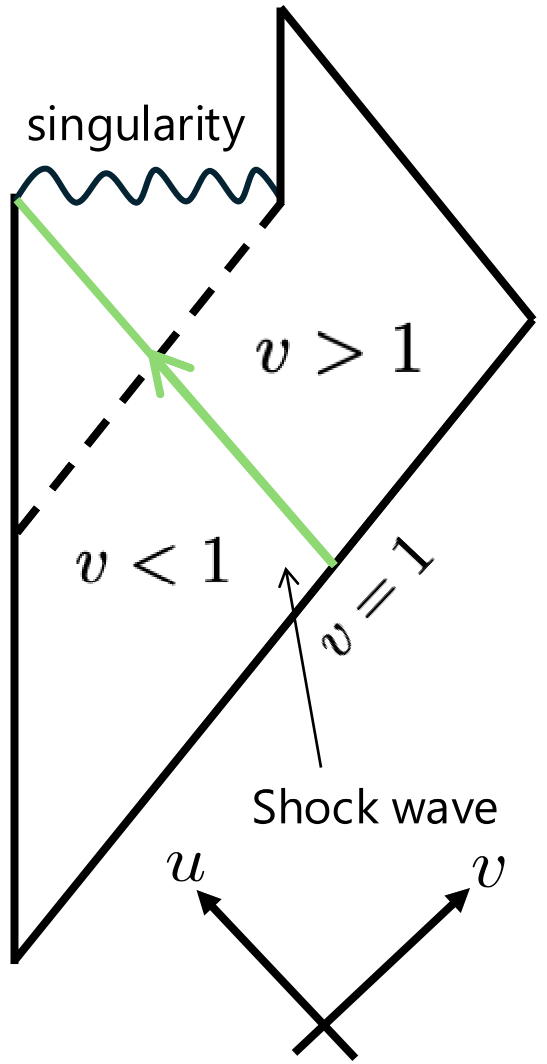
$v < 1$ のとき

$\Omega = M[-uv - \epsilon\log(-Muv)]$ ➡ $ds^2 = -d\sigma^+ d\sigma^-$

$v > 1$ のとき

$\Omega = M(1 - v(u+1) - \epsilon\log(-Muv))$ ➡ $ds^2 = \frac{1}{1-v(u+1)}dudv + O(\epsilon)$

Expansion parameter: $\epsilon = \frac{c}{48M} \ll 1$



(3) 一般化エントロピー

一般化エントロピー

Island rule：

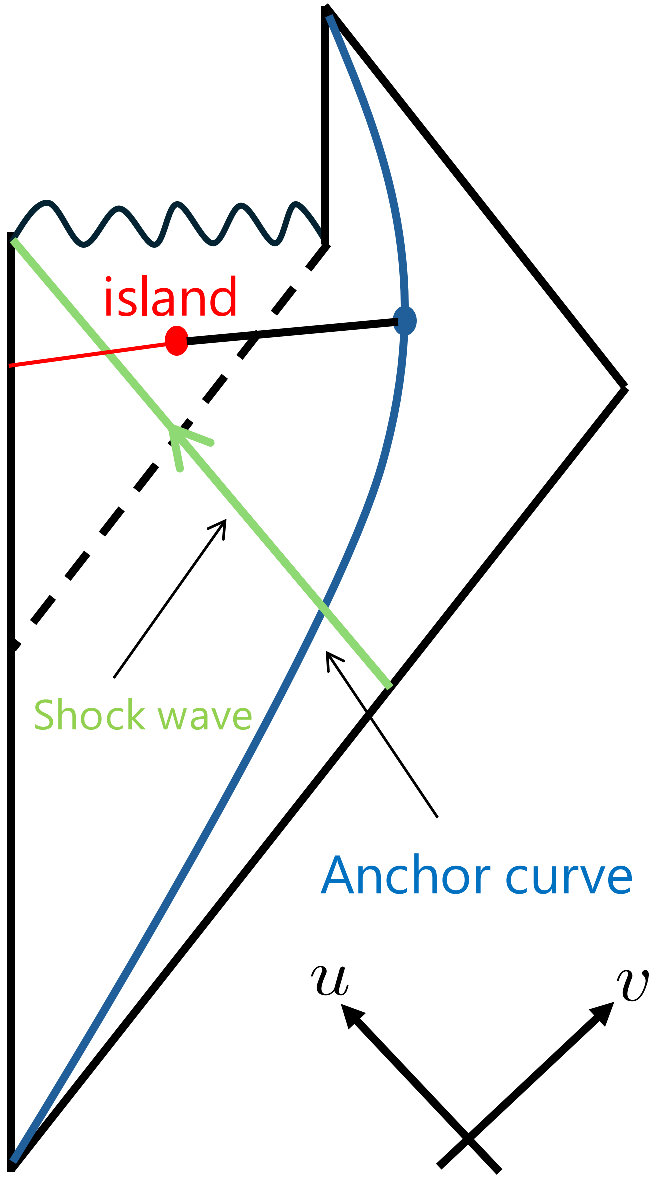
$$S_{\text{gen}} = \min\left\{\text{ext}\left[\sum_{A,I}\frac{\text{Area}}{4G_N} + S_{\text{bulk}}\right]\right\}$$

<u>RST BHの場合</u>　[F.F.Gautason et al,2020]

$$S_{\text{gen}} = \frac{\text{Area}(I)}{4G_N} + \frac{\text{Area}(A)}{4G_N} + S_{\text{bulk}}[\mathcal{S}_{AI}]$$

Von Neumann entropy

$$\begin{cases} \dfrac{\text{Area}(I)}{4G_N} = 2(\Omega(I) - \Omega_{\text{crit}}) \\ S_{\text{bulk}}[\mathcal{S}_{\text{AI}}] = \dfrac{c}{6}\log\left|d(A,I)^2 e^{\rho(\text{A})} e^{\rho(\text{I})}\right|_{t_\pm=0} \end{cases}$$



Island configuration

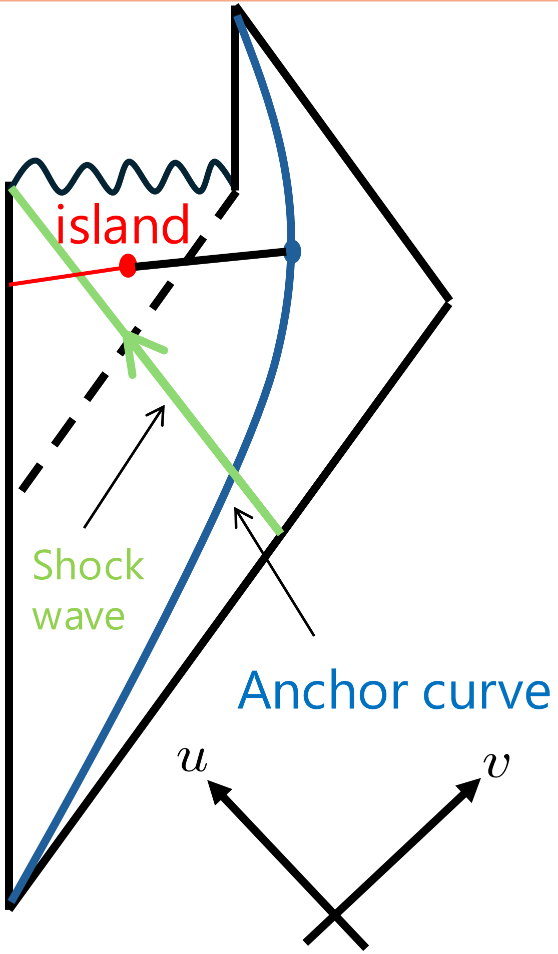
Hawking 輻射 part :

$$S_{\text{gen}}^{\text{island}} = 2M\left\{1 - v_I(1+u_I) - \epsilon \log(-Mv_Iu_I)\right\} + \frac{c}{12}\log\left[\left(\log\frac{v_A}{v_I}\log\frac{u_A}{u_I}\right)^2 \frac{v_Au_A}{1-v_A(1+u_A)}\frac{v_Iu_I}{1-v_I(1+u_I)}\right]$$

Islandの位置(v_I, u_I)を定めるために鞍点を求める $\quad \epsilon = \frac{c}{48M} \ll 1$

$$0 = -2M(1+u_I) + \frac{c}{12v_I}\frac{1}{1-v_I(1+u_I)} - \frac{c}{24v_I} - \frac{c}{6v_I\log\left(\frac{v_A}{v_I}\right)}$$

$$0 = -2Mv_I + \frac{c}{12v_I}\frac{1-v_I}{1-v_I(1+u_I)} - \frac{c}{24u_I} - \frac{c}{6v_I\log\left(\frac{u_A}{u_I}\right)}$$



Island configuration

Hawking 輻射 part：

$$S_{\rm gen}^{\rm island} = 2M\left\{1 - v_I(1+u_I) - \epsilon\log(-Mv_Iu_I)\right\} + \frac{c}{12}\log\left[\left(\log\frac{v_A}{v_I}\log\frac{u_A}{u_I}\right)^2 \frac{v_Au_A}{1-v_A(1+u_A)}\frac{v_Iu_I}{1-v_I(1+u_I)}\right]$$

Islandの位置(v_I, u_I)を定めるために鞍点を求める　　$\epsilon = \frac{c}{48M} \ll 1$

$$0 = -2M(1+u_I) + \frac{c}{12v_I}\frac{1}{1-v_I(1+u_I)} - \frac{c}{24v_I} - \frac{c}{6v_I\log\left(\frac{v_A}{v_I}\right)}$$

$$0 = -2Mv_I + \frac{c}{12v_I}\frac{1-v_I}{1-v_I(1+u_I)} - \frac{c}{24u_I} - \frac{c}{6v_I\log\left(\frac{u_A}{u_I}\right)}$$

⇨ $(v_I(1+u_I))^2 - (1-\epsilon)v_I(1+u_I) + \epsilon = 0$　　$\log\frac{u_A}{u_I} = 4(1+u_I)$

Island configuration

Hawking 輻射 part :

$$S_{\rm gen}^{\rm island} = 2M\left\{1 - v_I(1+u_I) - \epsilon\log(-Mv_Iu_I)\right\} + \frac{c}{12}\log\left[\left(\log\frac{v_A}{v_I}\log\frac{u_A}{u_I}\right)^2 \frac{v_Au_A}{1-v_A(1+u_A)}\frac{v_Iu_I}{1-v_I(1+u_I)}\right]$$

Islandの位置(v_I, u_I)を定めるために鞍点を求める $\epsilon = \dfrac{c}{48M} \ll 1$

$$0 = -2M(1+u_I) + \frac{c}{12v_I}\frac{1}{1-v_I(1+u_I)} - \frac{c}{24v_I} - \frac{c}{6v_I\log\left(\frac{v_A}{v_I}\right)}$$

$$0 = -2Mv_I + \frac{c}{12v_I}\frac{1-v_I}{1-v_I(1+u_I)} - \frac{c}{24u_I} - \frac{c}{6v_I\log\left(\frac{u_A}{u_I}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad (v_I(1+u_I))^2 - (1-\epsilon)v_I(1+u_I) + \epsilon = 0 \qquad \log\frac{u_A}{u_I} = 4(1+u_I)$$

$\Rightarrow$

Island解

$$u_I = -1 + \frac{\epsilon}{v_I} + O(\epsilon^2) \qquad v_I = -\frac{3\epsilon}{(u_A+1)} + O(\epsilon^2)$$

Island configuration and No-Island configuration

一般化エントロピーの近似式（island解を代入）

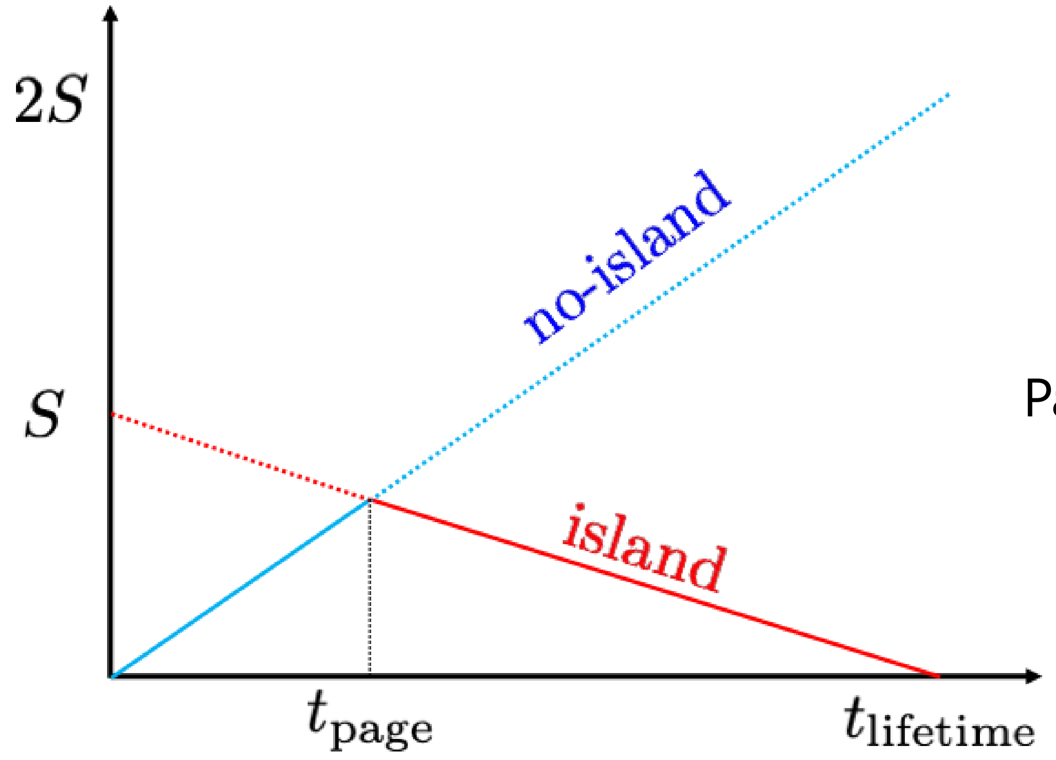
Island: $$S_{\text{gen}}^{\text{island}} = 2M - \frac{c}{24}(t_A - \tilde{\sigma}_A) + \frac{c}{6}\tilde{\sigma}_A + \cdots$$

No-Island: $$S_{\text{gen}}^{\text{no-island}} = \frac{c}{12}\log\left[\left(\log\frac{v_A}{v_0}\log\frac{u_A}{u_0}\right)^2 \frac{v_A u_A}{1 - v_A(1+u_A)}\right] = \frac{c}{12}(t_A - \tilde{\sigma}_A) + \frac{c}{6}\tilde{\sigma}_A + \cdots$$

座標系: $v_A = e^{\tilde{\sigma}_A + t_A} \quad u_A = -1 - e^{\tilde{\sigma}_A - t_A}$

Page curve

$$S_{\rm gen}^{\rm island} \sim 2M - \frac{c}{24}(t_A - \tilde{\sigma}_A) + \frac{c}{6}\tilde{\sigma}_A \qquad S_{\rm gen}^{\rm no\text{-}island} \sim \frac{c}{12}(t_A - \tilde{\sigma}_A) + \frac{c}{6}\tilde{\sigma}_A$$



Page time: $t_{\rm page} = \frac{1}{3\epsilon} = \frac{16M}{c}$

$$\epsilon = \frac{c}{48M} \ll 1$$

Page curveを再現する！

(4) RST modelにおけるQFC (technical part)

RST modelにおけるQFC

RST modelにおけるQuantum expansionの定義：

$$\Theta \equiv \frac{1}{2\Omega}\frac{dS_{\text{gen}}}{d\lambda}$$

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} \leq 0 \qquad \Omega = e^{-2\phi} + \frac{c}{24}\phi$$

一般化エントロピー

$$\begin{aligned} S_{\text{gen}}^{\text{island}} =& 2M\left\{1 - v_I(1+u_I) - \epsilon\log(-Mv_Iu_I)\right\} \\ &+ 2M\left\{1 - v_A(1+u_A) - \epsilon\log(-Mv_Au_A)\right\} \\ &+ \frac{c}{12}\log\left[\left(\log\frac{v_A}{v_I}\log\frac{u_A}{u_I}\right)^2 \frac{v_Au_A}{1-v_A(1+u_A)}\frac{v_Iu_I}{1-v_I(1+u_I)}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{\text{gen}}^{\text{no-island}} =& 2M\left\{1 - v_A(1+u_A) - \epsilon\log(-Mv_Au_A)\right\} \\ &+ \frac{c}{12}\log\left[\left(\log\frac{v_A}{v_0}\log\frac{u_A}{u_0}\right)^2 \frac{v_Au_A}{1-v_A(1+u_A)}\right] \end{aligned}$$

$$\epsilon = \frac{c}{48M} \ll 1$$

RST modelにおけるQFC

$(\mathrm{I})\ \epsilon \ll -v_{\mathrm{A}}(1+u_{\mathrm{A}}) \ll 1$ (Near the horizon)

<u>Ω の近似</u>

$$\Omega(A) \simeq M - \frac{c}{48}\log v_A$$

$$\Omega(I) \simeq M + \frac{c}{48}\log(-1-u_A)$$

<u>Bulkエントロピー</u>

$$S_{\mathrm{bulk}}^{\mathrm{island}} \simeq \frac{c}{12}\log v_A + \frac{c}{12}\log(-1-u_A)$$

$$S_{\mathrm{bulk}}^{\text{no-island}} \simeq \frac{c}{12}\log v_A$$

<u>一般化エントロピー</u>

$$S_{\mathrm{gen}}^{\mathrm{island}} \simeq 4M + \frac{c}{8}\log(-u_A-1) + \frac{c}{24}\log v_A$$

$$S_{\mathrm{gen}}^{\text{no-island}} \simeq 2M + \frac{c}{24}\log v_A$$

$$\epsilon = \frac{c}{48M} \ll 1$$

RST modelにおけるQFC

$$\text{(I)}\ \epsilon \ll -v_{\rm A}(1+u_{\rm A}) \ll 1 \quad \text{(Near the horizon)}$$

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} \leq 0 \qquad \Theta \equiv \frac{1}{2\Omega}\frac{dS_{\rm gen}}{d\lambda}$$

Generalized second law

$$\partial_{v_{\rm A}} S_{\rm gen}^{\rm island} = \frac{c}{24}\frac{1}{v_A} \geq 0 \qquad \partial_{v_{\rm A}} S_{\rm gen}^{\rm no\text{-}island} = \frac{c}{24}\frac{1}{v_A} \geq 0$$

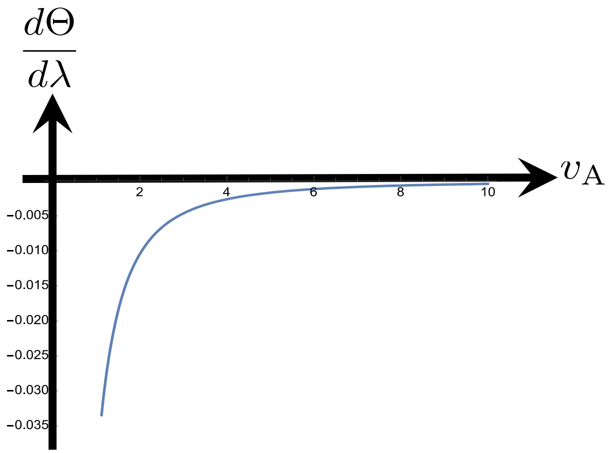
(GSLは成立)

Quantum focusing conjecture $\Omega = e^{-2\rho} + c\rho/24 = M + O(\epsilon)$

高次の項は無視して1次のオーダーまで計算

$$\partial_+^2 S_{\rm gen}^{\rm island} = -\left(\frac{\partial v_{\rm A}}{\partial x^+}\right)^2 \frac{c}{24}\frac{1}{v_{\rm A}^2} < 0$$

$$\partial_+^2 S_{\rm gen}^{\rm no\text{-}island} = -\left(\frac{\partial v_{\rm A}}{\partial x^+}\right)^2 \frac{c}{24}\frac{1}{v_{\rm A}^2} < 0$$



QFCは成立

RST modelにおけるQFC

(II) $-v_{\rm A}(1+u_{\rm A}) = O(1)$ (Away from the horizon)

一般化エントロピーの近似式

$$
\begin{aligned}
S_{\rm gen}^{\rm island} \simeq\ & 4M + \frac{c}{24} + \frac{c}{24}\log(u_A+1) - \frac{c}{24}\log\left[-1-\frac{1}{3}(u_A+1)\right] \\
& + \frac{c}{6}\log\left[\log\frac{-v_A(u_A+1)}{3\epsilon}\right] + \frac{c}{6}\log\left(\log\frac{-3u_A}{4+u_A}\right) + \frac{c}{24}\log u_A \\
& - \frac{c}{12}\log\left[1-v_A(1+u_A)\right] - \frac{c}{12}\log(-u_A-1) + \frac{c}{12}\log(-4-u_A) \\
& - 2Mv_A(1+u_A) + \frac{c}{24}\log v_A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\rm gen}^{\text{no-island}} \simeq\ & 2M - 2Mv_A(1+u_A) + \frac{c}{24}\log v_A + \frac{c}{24}\log u_A \\
& + \frac{c}{6}\log\left(\log\frac{v_A}{v_0}\right) + \frac{c}{6}\log\left(\log\frac{u_A}{u_0}\right) - \frac{c}{12}\log\left[1-v_A(1+u_A)\right]
\end{aligned}
$$

RST modelにおけるQFC

$$\text{(II)} \quad -v_{\rm A}(1+u_{\rm A}) = O(1)$$ (Away from the horizon)

<u>Generalized second law</u>

$$\partial_{v_A} S_{\rm gen}^{\rm island} = \frac{c}{6}\frac{1}{\log\left[\frac{-v_A(u_A+1)}{3\epsilon}\right]}\frac{1}{v_A} + \frac{c}{12}\frac{1+u_A}{1-v_A(1+u_A)} - 2M(1+u_A) + \frac{c}{24}\frac{1}{v_A}$$

$$\partial_{v_{\rm A}} S_{\rm gen}^{\text{no-island}} = \frac{c}{6}\frac{1}{\log\left(\frac{v_A}{v_0}\right)}\frac{1}{v_A} + \frac{c}{12}\frac{1+u_A}{1-v_A(1+u_A)} - 2M(1+u_A) + \frac{c}{24}\frac{1}{v_A}$$

RST modelにおけるQFC

$$(\mathrm{II}) \quad -v_{\mathrm{A}}(1+u_{\mathrm{A}}) = O(1)$$ (Away from the horizon)

Generalized second law

$$\partial_{v_A} S_{\mathrm{gen}}^{\mathrm{island}} = \frac{c}{6}\frac{1}{\log\left[\frac{-v_A(u_A+1)}{3\epsilon}\right]}\frac{1}{v_A} + \frac{c}{12}\frac{1+u_A}{1-v_A(1+u_A)} - 2M(1+u_A) + \frac{c}{24}\frac{1}{v_A}$$

正負？

$$\partial_{v_A} S_{\mathrm{gen}}^{\mathrm{no\text{-}island}} = \frac{c}{6}\frac{1}{\log\left(\frac{v_A}{v_0}\right)}\frac{1}{v_A} + \frac{c}{12}\frac{1+u_A}{1-v_A(1+u_A)} - 2M(1+u_A) + \frac{c}{24}\frac{1}{v_A}$$

正負？

RST modelにおけるQFC

$$\text{(II)} \quad -v_{\rm A}(1+u_{\rm A}) = O(1) \qquad \text{(Away from the horizon)}$$

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} \leq 0 \qquad \Theta \equiv \frac{1}{2\Omega}\frac{dS_{\rm gen}}{d\lambda}$$

Generalized second law

$$\partial_{v_A} S_{\rm gen}^{\rm island} = \frac{c}{6}\frac{1}{\log\left[\frac{-v_A(u_A+1)}{3\epsilon}\right]}\frac{1}{v_A} + \frac{c}{12}\frac{1+u_A}{1-v_A(1+u_A)} - 2M(1+u_A) + \frac{c}{24}\frac{1}{v_A}$$

正負の判定がしたい

関係

$$-(1+u_{\rm A}) > -\frac{1+u_{\rm A}}{1-v_{\rm A}(1+u_{\rm A})} \quad \Rightarrow \quad -2M(1+u_{\rm A}) > -\frac{c}{12}(1+u_{\rm A}) > -\frac{c}{12}\frac{1+u_{\rm A}}{1-v_{\rm A}(1+u_{\rm A})}$$

よって

$$\partial_{v_A} S_{\rm gen}^{\rm island} \geq 0$$

GSLは成立

No-islandの場合も同様の議論で成り立つ

RST modelにおけるQFC

$$\text{(II)} \quad -v_{\rm A}(1+u_{\rm A}) = O(1)$$ (Away from the horizon)

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} \le 0 \qquad \Theta \equiv \frac{1}{2\Omega}\frac{dS_{\rm gen}}{d\lambda}$$

Quantum focusing conjecture

確かめるべき式は

$$\partial_v\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_v S\right) \le 0$$

計算すると（ϵの1次のオーダーまで）

$$\begin{aligned}\partial_v\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_v S\right) &= \left(\partial_v\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\right)\partial_v S_{\rm gen}^{\rm island} + \partial_v^2 S_{\rm gen}^{\rm island} \\ &= -\frac{c}{24}\frac{1}{v^2[1-v(u+1)]^2\left\{\log\left[-\frac{v(u+1)}{3\epsilon}\right]\right\}^2} \\ &\quad\times\left[\left\{1-v(u+1)\right\}^2\left\{2+\log\left(-\frac{v(u+1)}{3\epsilon}\right)\right\}^2+\left\{\log\left[-\frac{v(u+1)}{3\epsilon}\right]\right\}^2(u+1)^2v^2\left\{\log M\left[1-v(u+1)\right]-3\right\}\right]\end{aligned}$$

RST modelにおけるQFC

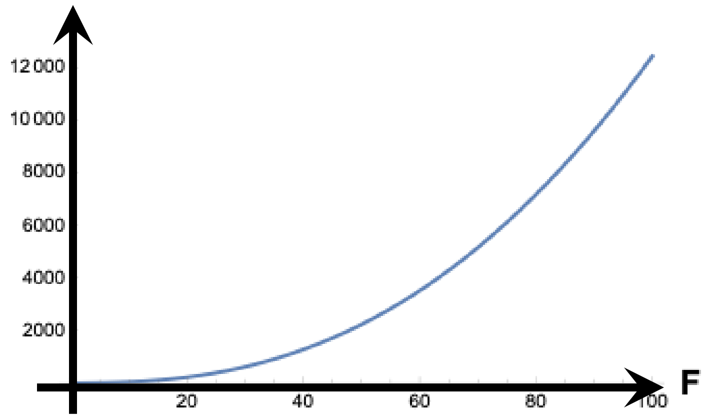
$$\text{(II)} \quad -v_{\rm A}(1+u_{\rm A}) = O(1)$$ (Away from the horizon)

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} \leq 0 \quad \Theta \equiv \frac{1}{2\Omega}\frac{dS_{\rm gen}}{d\lambda}$$

$$\partial_v\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_v S\right) = \left(\partial_v \frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\right)\partial_v S_{\rm gen}^{\rm island} + \partial_v^2 S_{\rm gen}^{\rm island}$$

$$= -\frac{c}{24}\frac{1}{v^2[1-v(u+1)]^2\left\{\log\left[-\frac{v(u+1)}{3\epsilon}\right]\right\}^2}$$

$$\times\left[\left\{1-v(u+1)\right\}^2\left\{2+\log\left(-\frac{v(u+1)}{3\epsilon}\right)\right\}^2+\left\{\log\left[-\frac{v(u+1)}{3\epsilon}\right]\right\}^2(u+1)^2v^2\left\{\log M\left[1-v(u+1)\right]-3\right\}\right]$$



Mが十分大きいとき
QFCは成立

RST modelにおけるQFC

(III) $-v_A(1+u_A) \sim \epsilon$ (Away from the horizon)

$$\frac{d\Theta}{d\lambda} \le 0 \quad \Theta \equiv \frac{1}{2\Omega}\frac{dS_{\rm gen}}{d\lambda}$$

$$\epsilon = \frac{c}{48M} \ll 1$$

Generalized second law

$$\partial_{v_A} S_{\rm gen}^{\rm island} = \frac{c}{6v_A}\frac{1}{\log\left(\frac{v_A}{v_I}\right)} + \frac{c}{12}\frac{1+u_A}{[1-v_A(1+u_A)]} - 2M(1+u_A) + \frac{c}{24}\frac{1}{v_A} \ge 0$$

(II)の場合と同様にGSLは成立

Quantum focusing conjecture

$$\partial_{v_A}\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_{v_A} S_{\rm gen}^{\rm island}\right)$$
$$= \frac{\partial}{\partial v_A}\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_{v_A} S_{\rm gen}^{\rm island}\right) + \frac{\partial v_I}{\partial v_A}\frac{\partial}{\partial v_I}\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_{v_A} S_{\rm gen}^{\rm island}\right) + \frac{\partial u_I}{\partial v_A}\frac{\partial}{\partial u_I}\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_{v_A} S_{\rm gen}^{\rm island}\right),$$
$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial v_A}\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_{v_A} S_{\rm gen}^{\rm island}\right)}_{\text{負}} + \boxed{\frac{\partial v_I}{\partial v_A}}\frac{c}{6v_Av_I\left(\log\frac{v_A}{v_I}\right)^2}$$

負

負になって欲しい

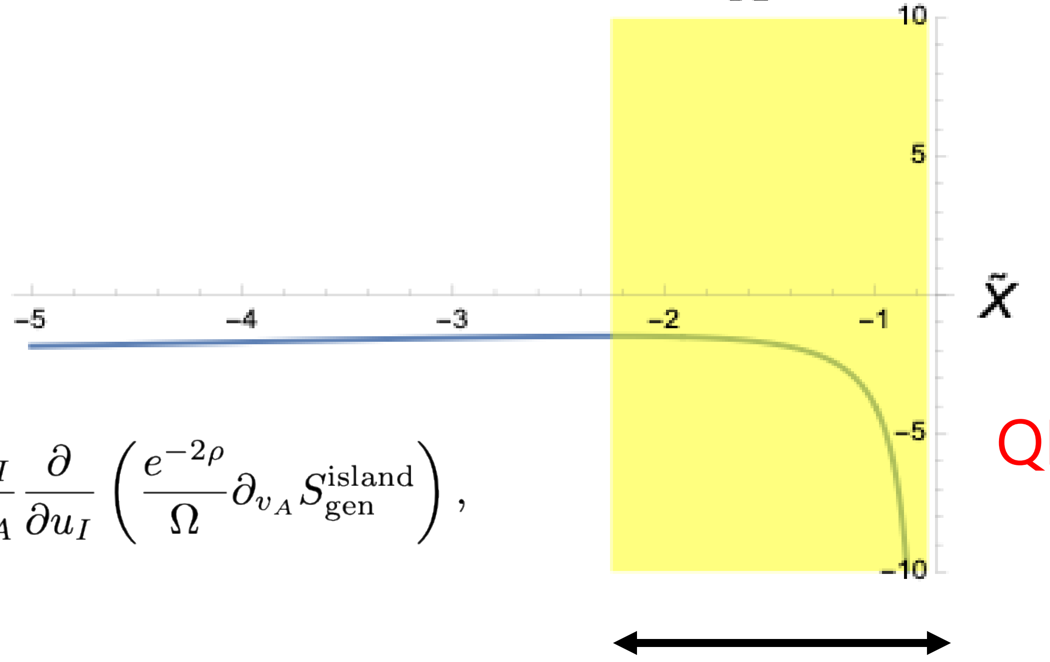
RST modelにおけるQFC

$$\text{(III)} \; -v_A(1+u_A) \sim \epsilon \qquad \text{(Away from the horizon)}$$

$$\epsilon = \frac{c}{48M} \ll 1$$

Islandが存在する範囲との整合から

$$\frac{\partial v_I}{\partial v_A} < 0$$



Islandが存在する範囲

QFCは成立

Quantum focusing conjecture

$$\partial_{v_A}\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_{v_A} S_{\text{gen}}^{\text{island}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial v_A}\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_{v_A} S_{\text{gen}}^{\text{island}}\right) + \frac{\partial v_I}{\partial v_A}\frac{\partial}{\partial v_I}\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_{v_A} S_{\text{gen}}^{\text{island}}\right) + \frac{\partial u_I}{\partial v_A}\frac{\partial}{\partial u_I}\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_{v_A} S_{\text{gen}}^{\text{island}}\right),$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial v_A}\left(\frac{e^{-2\rho}}{\Omega}\partial_{v_A} S_{\text{gen}}^{\text{island}}\right)}_{\text{負}} + \boxed{\frac{\partial v_I}{\partial v_A}}\frac{c}{6 v_A v_I \left(\log \frac{v_A}{v_I}\right)^2}$$

まとめ

・RST black holeでは次の3つの場合においてQuantum focusing conjectureは成り立つ

$$\begin{cases} (\mathrm{I})\ \epsilon \ll -v_{\mathrm{A}}(1+u_{\mathrm{A}}) \ll 1 \\ (\mathrm{II})\ \ -v_{\mathrm{A}}(1+u_{\mathrm{A}}) = O(1) \\ (\mathrm{III})\ -v_A(1+u_A) \sim \epsilon \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{d\Theta}{d\lambda} \leq 0$$

※ただし量子効果に比べて質量が十分大きいとき

・CGHS model(古典)はSchwarzschild解と対応している→ 量子効果を含んだSchwarzschild解でもQFCは成立していると期待できる

Open question

Quantum Null Energy Condition(QNEC) in 2D:

$$e^{-4\rho}T_{++} \geq \frac{d^2 S_{\mathrm{out}}}{d\lambda^2} \Rightarrow$$

・高次元ではQNECはいくつかのケースで破れる

・2次元ではどうか？