スカラー場理論における繰り込み群による量子誤り訂正の構成

桑原 孝明 (Takaaki Kuwahara)
arXiv:2211.05534, 共同研究者: 田中 豪太 [2]，土屋 麻人 [1], 山代 和志,
arXiv:2401.17795, 共同研究者: 那須 亮太 [1], 田中 豪太 [2]，土屋 麻人 [1]

2024 年 5 月 22 日, 京都大学 ウェルカムセミナー

[1] 静岡大学, [2] 明治学院大学

自己紹介

経歴	2024 年 3 月 博士（理学）静岡大学
	2024 年 4 月- 現職
出身	静岡市
キーワード	量子重力、バルク再構成、符号問題、テンソルネットワーク、テンソル繰り込み群

概要

動機

AdS/CFT の文脈における，境界上の場の理論からのバルク重力の構成 (Bulk reconstruction)

結果

- スカラー場について波動汎関数が従う厳密繰り込み群方程式を導出
- スカラー場の摂動論において，繰り込み群により量子誤り訂正を実現する例の構築 (本講演の主題)

内容

序論

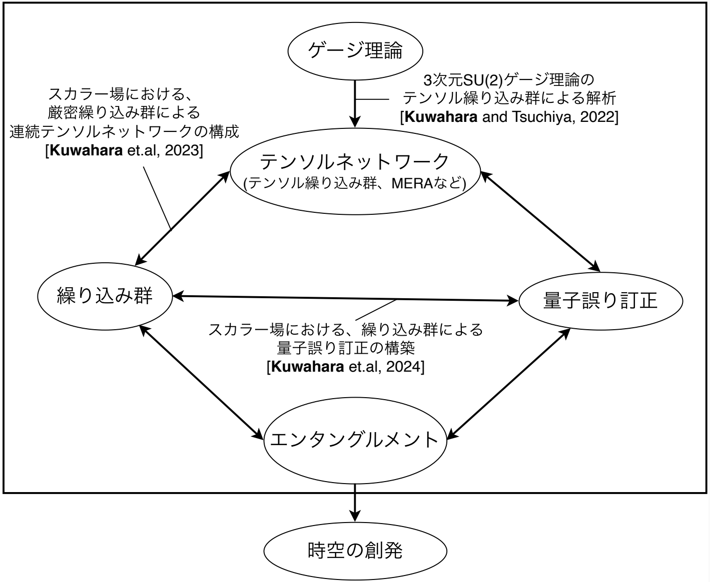
厳密繰り込み群による連続テンソルネットワーク

量子誤り訂正と AdS/CFT

量子誤り訂正条件

結論

バルク再構成に向けて


ゲージ理論
3次元SU(2)ゲージ理論の
テンソル繰り込み群による解析
[**Kuwahara** and Tsuchiya, 2022]
スカラー場における、
厳密繰り込み群による
連続テンソルネットワークの構成
[**Kuwahara** et.al, 2023]
テンソルネットワーク
(テンソル繰り込み群、MERAなど)
繰り込み群
量子誤り訂正
スカラー場における、繰り込み群による
量子誤り訂正の構築
[**Kuwahara** et.al, 2024]
エンタングルメント
時空の創発

AdS/CFT 対応 [Maldacena, 1999]

AdS/CFT 対応

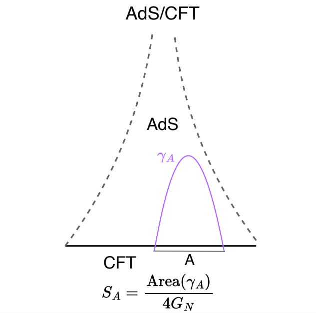
AdS 上の重力理論は，その境界の CFT と等価 [Maldacena, 1999]

古典重力 $\Leftrightarrow$ ラージ N 強結合ゲージ理論

笠-高柳公式 [Ryu and Takayanagi, 2006]

$$S_A = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G_N}$$

エンタングルメント $\Leftrightarrow$ バルク幾何

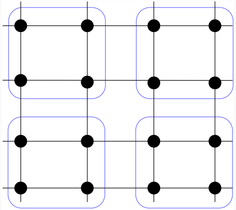


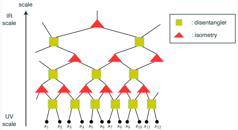
テンソルネットワークとは

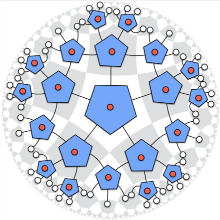
テンソルネットワーク:
分配関数や波動関数をテンソル積で表現したもの: $T \otimes T \otimes \cdots$

例

1. テンソル繰り込み群 → 特異値分解による情報圧縮を利用した分配関数の計算
2. MERA → 変分法による量子多体系の波動関数の計算
3. HaPPY code → AdS/CFT 対応のバルク再構成を具現化し、量子誤り訂正の性質を備えるトイモデル [Almheiri et al., 2015, Pastawski et al., 2015]



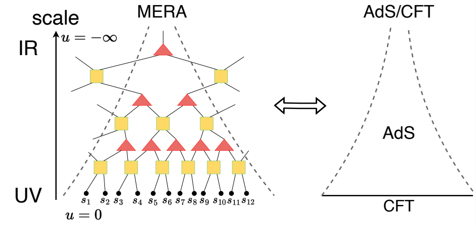




1. テンソル繰り込み群　2.MERA　3.HaPPY code ([Pastawski et al., 2015])

MERA と AdS/CFT [Swingle, 2012]

境界理論が与えられたとき，
バルクの重力理論をどう構築するか？



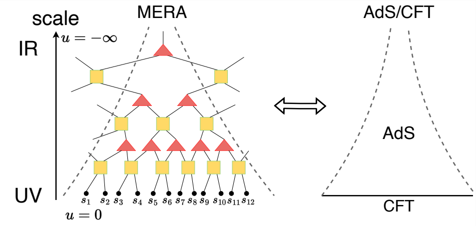
MERA と AdS/CFT の対応 [Nozaki et al., 2012].
バルクの方向は繰り込み群のスケールに対応

MERA と AdS/CFT [Swingle, 2012]

境界理論が与えられたとき，
バルクの重力理論をどう構築するか？
手がかり:MERA[Vidal, 2007] と AdS/CFT との対応
[Swingle, 2012]

MERA:
基底状態の波動関数を求める数値手法

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \sum_{\{s_i\}} \Psi_{s_1 s_2 \cdots} |s_1 s_2 \cdots\rangle \\
&\sim \sum_{\{s_i\}} \Psi^{\mathrm{trial}}_{s_1 s_2 \cdots} |s_1 s_2 \cdots\rangle
\end{aligned}
$$



MERA と AdS/CFT の対応 [Nozaki et al., 2012].
バルクの方向は繰り込み群のスケールに対応

1D MERA のエンタングルメントエントロピー

MERA の手順

1. ディスエンタングラーにより，隣接するサイト間のエンタングルメントを除去
2. アイソメトリーにより，隣接するサイトを effective なサイトに粗視化
3. 変分法を適用して，ディスエンタングラーとアイソメトリーを決定し，基底状態の波動関数 Ψ^{trial} を得る

1D MERA のエンタングルメントエントロピー

MERA の手順

1. ディスエンタングラーにより，隣接するサイト間のエンタングルメントを除去
2. アイソメトリーにより，隣接するサイトを effective なサイトに粗視化
3. 変分法を適用して，ディスエンタングラーとアイソメトリーを決定し，基底状態の波動関数 Ψ^{trial} を得る

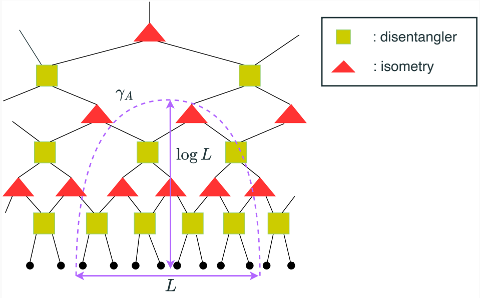
エンタングルメントエントロピーは，最小カット $\min\{\#\mathrm{Bonds}(\gamma_A)\}$ が横切るボンドの数で評価できる
1D MERA の場合: $\min\{\#\mathrm{Bonds}(\gamma_A)\} = \log L$

エントロピーは，各ボンドが最大限もつれている
ときが最大エントロピー (1 ボンドあたり $S = \log\chi$) となる

$\to S_A \leq \min\{\#\mathrm{Bonds}(\gamma_A)\}\log\chi = (\mathrm{const})\cdot\log L$

$\Rightarrow$ 1 次元臨界系の面積則 $S \sim \log L$
を不等式の形で再現

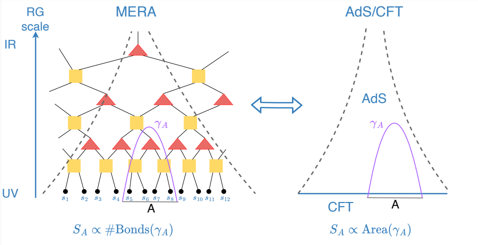
cf. 笠-高柳公式: $S_A = \dfrac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G_N}$



MERA と AdS/CFT

MERA ネットワーク ⇔ 離散的 AdS [Swingle, 2012]
⇓
MERA により、バルク離散幾何の構築が可能

連続幾何を導きたい
⇒ 連続テンソルネットワークを考える
(スケールが連続的なネットワーク)



Correspondence between MERA & AdS/CFT
γ_A : minimal surface of A

厳密繰り込み群による連続テンソルネットワーク構成

- 連続幾何 $\longrightarrow$ 連続テンソルネットワーク
- 古典的幾何を導く強結合理論 $\longrightarrow$ 非摂動理論

$\Rightarrow$ 非摂動的な連続テンソルネットワークが不可欠

非摂動的な連続テンソルネットワークをどのように構築するか？

連続テンソルネットワークの構築

$\Updownarrow$ 等価

波動関数のスケール依存性の導出

(cf. RG スケールはバルク方向に対応)

非摂動的な連続テンソルネットワーク

$\Rightarrow$ 厳密繰り込み群 (ERG) により波動関数に対する汎関数微分方程式を導出する

厳密繰り込み群（汎関数繰り込み群）

有効作用のスケール依存性を非摂動的に記述する汎関数微分方程式（ERG 方程式）を与える枠組み

スカラー場理論における波動関数の ERG 方程式を考える

序論

厳密繰り込み群による連続テンソルネットワーク

量子誤り訂正と AdS/CFT

量子誤り訂正条件

結論

Polchinski 方程式

要請

分配関数は有効カットオフ Λ の微小変化の下で不変

Polchinski 方程式

要請

分配関数は有効カットオフ Λ の微小変化の下で不変

$$0 = -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \int \mathcal{D}\phi e^{-S_\Lambda[\phi]}$$

$$\Rightarrow -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} e^{-S_\Lambda[\phi]} = \int_p \frac{\delta}{\delta \phi(p)} \left[G_\Lambda[\phi](p) e^{-S_\Lambda[\phi]} \right]$$

Λ: 有効カットオフ, S_Λ: 有効作用

$G_\Lambda[\phi](p)$: UV 正則化,
連続的なブロッキング (粗視化) に対応

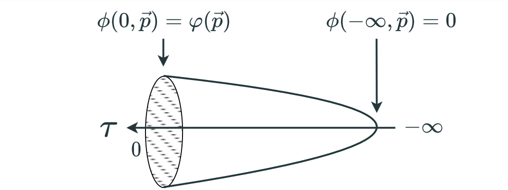
Polchinski 方程式

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} e^{-S_{\mathrm{int}}} = -\frac{1}{2} \int_p \dot{C}_\Lambda(p) \frac{\delta^2}{\delta \phi(p) \delta \phi(-p)} e^{-S_{\mathrm{int}}}$$

作用 $S_\Lambda = S_0 + S_{\mathrm{int}}$ の相互作用項 S_{int} に対する汎関数微分方程式

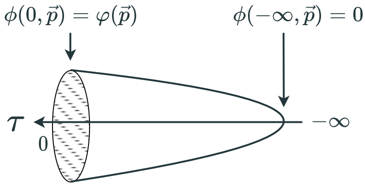
波動汎関数の経路積分表示

$$\Psi_\Lambda[\varphi(\vec{p})] = \langle \varphi(\vec{p}) | \Psi_\Lambda \rangle$$
$$= \int_{\phi(0,\vec{p})=\varphi(\vec{p})} D\phi \; e^{-\int_{-\infty}^{0} d\tau L_\Lambda[\phi]}$$
$$\left(= \int_{\phi(0,\vec{p})=\varphi(\vec{p})} D\phi \; e^{-\underline{\int_0^{+\infty}} d\tau L_\Lambda[\phi]} \right)$$



(assume $L_\Lambda \in \mathbb{R} \to \Psi_\Lambda \in \mathbb{R}$)

波動汎関数の経路積分表示



$$
\begin{aligned}
\Psi_\Lambda[\varphi(\vec{p})] &= \langle \varphi(\vec{p}) | \Psi_\Lambda \rangle \\
&= \int_{\phi(0,\vec{p})=\varphi(\vec{p})} D\phi \; e^{-\int_{-\infty}^{0} d\tau L_\Lambda[\phi]} \\
&\left(= \int_{\phi(0,\vec{p})=\varphi(\vec{p})} D\phi \; e^{-\underline{\int_0^{+\infty}} d\tau L_\Lambda[\phi]} \right)
\end{aligned}
$$

(assume $L_\Lambda \in \mathbb{R} \to \Psi_\Lambda \in \mathbb{R}$)

$$
\Psi_\Lambda^2[\varphi] = \int \mathcal{D}\phi \prod_{\vec{p}} \delta[\phi(0,\vec{p}) - \varphi(\vec{p})] e^{-S_\Lambda[\phi]}
$$

波動汎関数 Ψ_Λ に対する ERG 方程式

基底状態の波動関数についての ERG 方程式

$$-\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\Psi_\Lambda = -\frac{1}{2}\int_{\vec{p}}\dot{C}_\Lambda(0,\vec{p})\left\{\frac{\delta^2\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})\delta\varphi(-\vec{p})}+\frac{1}{\Psi_\Lambda}\frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})}\frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(-\vec{p})}\right\}$$
$$-\int_{\vec{p}}\frac{\dot{C}_\Lambda(0,\vec{p})}{C_\Lambda(0,\vec{p})}\varphi(\vec{p})\frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})}-\frac{V}{2}\Psi_\Lambda\int_{\vec{p}}\frac{\dot{C}_\Lambda(0,\vec{p})}{C_\Lambda(0,\vec{p})}$$

$\Rightarrow$ 連続テンソルネットワークを記述

このネットワークがバルク再構成を記述することを示すには，以下が必要:

- エンタングルメント構造
- geometry の構造 (cf. Fisher metric[Nozaki et al., 2012])

しかし，厳密繰り込み群の解析は難しい

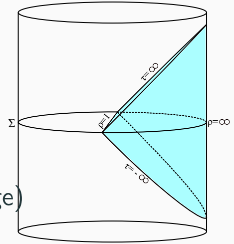
一般に，バルク再構成は量子誤り訂正と関係する
ERG 方程式の摂動解について量子誤り訂正との関係を調べる

AdS-Rindler 再構成

AdS-Rindler 再構成:

$$\phi(x) = \int dY K(x;Y)\mathcal{O}(Y), \quad x \in W_C[A],$$

$W_C[A]$: AdS-Rindler wedge(causal wedge)

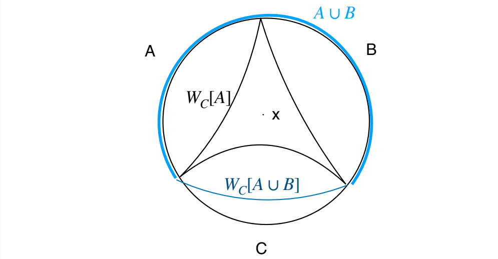


[Almheiri et al., 2015]

バルク演算子 $\phi(x)$ は，$x \in W_C[A]$ のとき，境界演算子 $\mathcal{O}(Y)$ から再構成できる

AdS-Rindler reconstruction and bulk locality paradox

CFT の時間一定面 Σ を考える



AdS-Rindler 再構成を考えると，バルク演算子 $\phi(x)$ は A, B, C からは構成不可能だが，
$A \cup B$, $B \cup C$, $C \cup A$ からは構成可能 $(\phi_{AB}, \phi_{BC}, \phi_{CA})$
しかし，局所性より $[\phi_{AB},\ \mathcal{O}_C] = 0$．A,B,C の巡回置換もまた同様．
もし $\phi_{AB}, \phi_{BC}, \phi_{CA}$ が同一な演算子とすると，
Schur の補題から任意のバルク演算子は単位演算子になってしまう $\Rightarrow$ paradox
これを解決するため，量子誤り訂正を導入

量子誤り訂正符号の例: qutrit code

Alice から Bob に 1 qutrit の量子状態 $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i |i\rangle$ を送りたい．
データにエラーが起こってスピンが壊れたときに元のデータを復元するには？

量子誤り訂正符号の例: qutrit code

Alice から Bob に 1 qutrit の量子状態 $|\psi\rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i |i\rangle$ を送りたい．
データにエラーが起こってスピンが壊れたときに元のデータを復元するには？
$\Rightarrow$ 状態の冗長化（符号化）$|\psi\rangle \mapsto |\tilde{\psi}\rangle$

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_{i=0}^{2} a_i |\tilde{i}\rangle, \quad \{|\tilde{i}\rangle\}$$: 符号部分空間 (code subspace)

を送ればよい．

$$|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|000\rangle + |111\rangle + |222\rangle)$$
$$|\tilde{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|012\rangle + |120\rangle + |201\rangle)$$
$$|\tilde{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|021\rangle + |102\rangle + |210\rangle)$$

復号化

3 つ目の qutrit が壊れ，
符号化データを受け取った Bob が最初の 2 つの qutrit のみ読み取れたとする．

最初の 2 つの qutrit のみに作用するユニタリー変換 U_{12}：

$$\begin{array}{ccc} |00\rangle \to |00\rangle & |11\rangle \to |01\rangle & |22\rangle \to |02\rangle \\ |01\rangle \to |12\rangle & |12\rangle \to |10\rangle & |20\rangle \to |11\rangle \\ |02\rangle \to |21\rangle & |10\rangle \to |22\rangle & |21\rangle \to |20\rangle \end{array}$$

を符号化データ $|\tilde{\psi}\rangle$ に作用させると，

$$(U_{12} \otimes I_3)\,|\tilde{\psi}\rangle = \underbrace{|\psi\rangle}_{\text{original data}} \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle)$$

$\Rightarrow$ 誤りが訂正できた
この符号部分空間とエラーは，一般の誤り訂正条件 (Knill-Laflamme 条件) を満たす

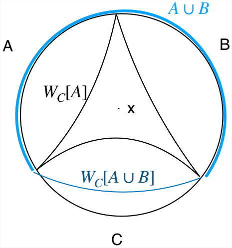
誤り訂正条件

$\langle\tilde{i}|E_a E_b|\tilde{j}\rangle \propto \delta_{ij}$
$\{E_a\}$: エラー演算子

Quantum error correction and AdS/CFT

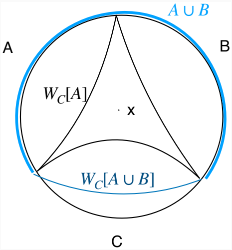
$\tilde{O}$ は一般に 3 つの qutrit に非自明に作用するが，ユニタリー変換した演算子 $O_{12} \equiv U_{12}^{\dagger} O U_{12}$ は最初の 2 つの qutrit のみに非自明に作用する．
同様にして O_{23}, O_{31} も作れる
符号部分空間上ではいずれの演算子も同様に働く (同じ行列要素)

O_{12}, O_{23}, O_{31} は，
AdS-Rindler 再構成から作られるバルク演算子 $\phi(x)$ の表現
$\phi_{AB}, \phi_{BC}, \phi_{CA}$ と対応
それぞれ異なる演算子だが，符号部分空間上では同様に働く



Quantum error correction and AdS/CFT

$\tilde{O}$ は一般に 3 つの qutrit に非自明に作用するが，ユニタリー変換した演算子 $O_{12} \equiv U_{12}^{\dagger} O U_{12}$ は最初の 2 つの qutrit のみに非自明に作用する．
同様にして O_{23}, O_{31} も作れる
符号部分空間上ではいずれの演算子も同様に働く (同じ行列要素)



O_{12}, O_{23}, O_{31} は，
AdS-Rindler 再構成から作られるバルク演算子 $\phi(x)$ の表現
$\phi_{AB}, \phi_{BC}, \phi_{CA}$ と対応
それぞれ異なる演算子だが，符号部分空間上では同様に働く

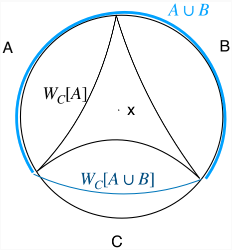
AdS/CFT の符号部分空間は

$$|\Omega\rangle, \phi_i(x)|\Omega\rangle, \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)|\Omega\rangle, \ldots \quad (|\Omega\rangle：基底状態)$$

の線形結合

Quantum error correction and AdS/CFT

$\tilde{O}$ は一般に 3 つの qutrit に非自明に作用するが，ユニタリー変換した演算子 $O_{12} \equiv U_{12}^\dagger O U_{12}$ は最初の 2 つの qutrit のみに非自明に作用する．
同様にして O_{23}, O_{31} も作れる
符号部分空間上ではいずれの演算子も同様に働く (同じ行列要素)



O_{12}, O_{23}, O_{31} は，
AdS-Rindler 再構成から作られるバルク演算子 $\phi(x)$ の表現
$\phi_{AB}, \phi_{BC}, \phi_{CA}$ と対応
それぞれ異なる演算子だが，符号部分空間上では同様に働く

AdS/CFT の符号部分空間は

$$|\Omega\rangle, \phi_i(x)|\Omega\rangle, \phi_i(x_1)\phi_j(x_2)|\Omega\rangle, \ldots \quad (|\Omega\rangle：基底状態)$$

の線形結合

$\Rightarrow$ バルクの創発は，量子誤り訂正で記述される
局所性は符号部分空間上でのみ課せば Schur の補題は成り立たず，
バルクの自明理論を導かない　$\square$

連続テンソルネットワークによるバルク再構成に向けて

ERG に基づく連続テンソルネットワークはバルクを再構成できるか？
$\Rightarrow$ (厳密) 繰り込み群により量子誤り訂正条件を構成

first step として，ϕ^4 理論の ERG 方程式の摂動解を考える

$$-\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\Psi_\Lambda = -\frac{1}{2}\int_{\vec{p}}\dot{C}_\Lambda(0,\vec{p})\left\{\frac{\delta^2\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})\delta\varphi(-\vec{p})} + \frac{1}{\Psi_\Lambda}\frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})}\frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(-\vec{p})}\right\}$$
$$-\int_{\vec{p}}\frac{\dot{C}_\Lambda(0,\vec{p})}{C_\Lambda(0,\vec{p})}\varphi(\vec{p})\frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})} - \frac{V}{2}\Psi_\Lambda\int_{\vec{p}}\frac{\dot{C}_\Lambda(0,\vec{p})}{C_\Lambda(0,\vec{p})}$$

Quantum error correction(QEC) condition

Knill-Laflamme condition(誤り訂正条件)

$$\langle \tilde{i}|E_a^\dagger E_b|\tilde{j}\rangle = M_{ab} \langle \tilde{i}|\tilde{j}\rangle$$

$|\tilde{i}\rangle$: 符号部分空間の基底

E_a, E_b : エラー演算子

M_{ab} : Hermite 行列

Encoding a qudit at a point[Furuya et al., 2022]

コヒーレント演算子 $D(irf_0)$ で張られる空間を符号部分空間とする

(f_0: 実関数, r: level (from 0 to $q-1$))

$\sim$ delta function at x_0 with width ϵ:

$$|r, x_0\rangle \equiv D(irf_0)\,|\Omega\rangle$$

エラー演算子: $D(iqf_0)$

e.g. ガウス波束

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon^2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\epsilon^2}} \\ \langle r', x_0 | r, x_0\rangle &= \langle D(i(r-r'))f_0\rangle \\ &= \delta_{rr'} \\ \langle r', x_0 | D(iqf_0) | r, x_0\rangle &= \delta_{r', r+q} \qquad \Rightarrow \text{誤り訂正可能} \end{aligned}$$

符号化

q-level state $|r\rangle$: IR 領域のコヒーレント状態

基底状態の繰り込み群のフロー U

$$|\Psi\rangle_\Lambda = U(\Lambda, \Lambda_{\mathrm{UV}})\,|\Psi\rangle_{\Lambda_{\mathrm{UV}}}$$

$U^\dagger$ を用いて符号化を定義

$$|\tilde{r}\rangle = U^\dagger(\Lambda, \Lambda_{\mathrm{UV}})\,|r\rangle$$

ϕ^4 理論の摂動 1 次の範囲で誤り訂正条件を満たすことを示す

自由スカラー場理論

エネルギースケール Λ の ERG 方程式の摂動 0 次の解:

$$\Psi_\Lambda^{(0)}[\varphi] = \mathcal{N}_\Lambda \exp\left[-\frac{1}{2}\varphi \cdot K^{-1}\omega_\Lambda \cdot \varphi\right]$$

$\mathcal{N}_\Lambda$: **規格化定数** ($\int \mathcal{D}\varphi \left|\Psi_\Lambda^{(0)}[\varphi]\right|^2 = 1$)

符号部分空間とエラー演算子

符号部分空間: UV でのコヒーレント状態

$$\mathrm{span}(\{|rf_0\rangle\}_{\Lambda_{\mathrm{UV}}}),$$

f: **任意の実関数**

エラー演算子: IR(近傍) でのコヒーレント演算子

$$\{E_{\Lambda_{\mathrm{IR}},a}\} = \{D(g)|g\colon \text{arbitrary real function}\}$$

生成消滅演算子

生成消滅演算子:

$$a_\Lambda^{(0)}(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\omega_\Lambda(p^2)}{K(p^2)}}\varphi(p) + \sqrt{\frac{K(p^2)}{\omega_\Lambda(p^2)}}\frac{\delta}{\delta\varphi(-p)}\right)$$

$$a_\Lambda^{\dagger(0)}(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{\omega_\Lambda(p^2)}{K(p^2)}}\varphi(-p) - \sqrt{\frac{K(p^2)}{\omega_\Lambda(p^2)}}\frac{\delta}{\delta\varphi(p)}\right)$$

$$[a_\Lambda^{(0)}(p), a_\Lambda^{\dagger(0)}(q)] = \tilde{\delta}(p-q)$$

where $\omega_\Lambda(p^2) \equiv \sqrt{p^2 + \Lambda^{-2}m^2}$.

変換した演算子のスケーリング則:

$$a_{\Lambda_0}^{(0)}(p) + a_{\Lambda_0}^{\dagger(0)}(-p) = \sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_0}(p^2)}{\omega_\Lambda(p^2)}}\left\{a_\Lambda^{(0)}(p) + a_\Lambda^{\dagger(0)}(-p)\right\}$$

$$a_{\Lambda_0}^{(0)}(p) - a_{\Lambda_0}^{\dagger(0)}(-p) = \sqrt{\frac{\omega_\Lambda(p^2)}{\omega_{\Lambda_0}(p^2)}}\left\{a_\Lambda^{(0)}(p) - a_\Lambda^{\dagger(0)}(-p)\right\}$$

自由スカラー場のコヒーレント状態

コヒーレント状態:

$$|f\rangle = \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(f \cdot a_\Lambda^{\dagger(0)} - f^* \cdot a_\Lambda^{(0)})\right]|\Psi\rangle$$

$|\Psi\rangle$: 基底状態

$$_\Lambda\langle f'|f\rangle_\Lambda = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_p \left(|f'(p)|^2 - 2f'(p)f^*(p) + |f(p)|^2\right)\right]$$

$f = rf_0, \quad f_0$: 任意の実関数 ととる

$$|rf_0\rangle_\Lambda = \exp\left[-\frac{r}{\sqrt{2}}f_0 \cdot (a_\Lambda^{(0)} - a_\Lambda^{\dagger(0)})\right]|\Psi\rangle .$$

$$_\Lambda\langle rf_0|rf_0\rangle_\Lambda = \exp\left[-\frac{1}{2}(r-r')^2\int_p |f_0(p)|^2\right]$$

$$\sim \delta_{rr'} \quad \text{when} \int_p |f_0(p)|^2 \gg 1$$

自由スカラー場の誤り訂正

エラー演算子は IR 領域のコヒーレント状態を作る演算子で定義:

$$D(g)_\Lambda = \exp\left[\frac{i}{\sqrt{2}} g \cdot (a_\Lambda^{(0)} - a_\Lambda^{\dagger(0)})\right]$$

Λ_0: bare スケール, g: 実関数, $\omega_\Lambda = \sqrt{m_{\Lambda_0}^2 \Lambda^{-2} + p^2}$

誤り訂正条件 ($D^\dagger(g')D(h') = D(h' - g') \equiv D(g)$):

$$\begin{aligned}
&{}_{\Lambda_{\mathrm{UV}}}\langle r f_0 | D(g)_\Lambda | r' f_0 \rangle_{\Lambda_{\mathrm{UV}}} \\
&= \exp[-\frac{1}{2}\int_p \left[-2(r - r')\sqrt{\frac{\omega_{\mathrm{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}}} g(-p) f_0(p) + \frac{\omega_{\mathrm{UV},p}}{\omega_{\Lambda,p}} |g(p)|^2\right]]_{\mathrm{UV}}\,{}_{\mathrm{UV}}\langle r' f_0 \,|\, r f_0 \rangle
\end{aligned}$$

ω_Λ は RG flow で単調増加するため，IR 極限では g の寄与を無視できる

十分 IR に近づく場合 ($\Lambda/m \to 0$) を考えると，

$${}_{\Lambda_{\mathrm{UV}}}\langle r f_0 | D(g)_\Lambda | r' f_0 \rangle_{\Lambda_{\mathrm{UV}}} \sim {}_{\Lambda_{\mathrm{UV}}}\langle r' f_0 | r f_0 \rangle_{\Lambda_{\mathrm{UV}}}$$

$\Rightarrow$ 誤り訂正可能

ϕ^4 摂動論に対する誤り訂正条件

ERG 方程式の摂動一次の解の誤り訂正可能性を考える

基底状態の波動汎関数:

$$\Psi_\Lambda[\varphi] = \Psi_\Lambda^{(0)}[\varphi] + \alpha\Psi_\Lambda^{(1)}[\varphi] + O(\alpha^2)$$

摂動一次の生成消滅演算子:

$$a_\Lambda(p) = a_\Lambda^{(0)}(p) + \alpha a_\Lambda^{(1)}(p) + O(\alpha^2)$$

$$a_\Lambda(p)^\dagger = a_\Lambda^{\dagger(0)}(p) + \alpha a_\Lambda^{\dagger(1)}(p) + O(\alpha^2)$$

$$\begin{aligned} a_\Lambda^{(1)}(p) &= \frac{\lambda}{3!}\int_{k_i} \frac{\tilde{\delta}(k_1+k_2+k_3+p)}{\omega_\Lambda(k_1^2)+\omega_\Lambda(k_2^2)+\omega_\Lambda(k_3^2)+\omega_\Lambda(p^2)}\sqrt{\frac{K(p^2)}{2\omega_\Lambda(p^2)}}\left(\prod_{i=1}^{3}\sqrt{\frac{K(k_i^2)}{2\omega_\Lambda(k_i^2)}}a_\Lambda^{\dagger(0)}(k_i)\right) \\ &\quad + \left(\frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!}\int_q \frac{6K_\Lambda(q^2)}{2\omega_\Lambda(q^2)}\right)\frac{K(p^2)}{2\omega_\Lambda^2(p^2)}a_\Lambda^{\dagger(0)}(-p) \\ a_\Lambda^{\dagger(1)}(p) &= \frac{\lambda}{3!}\int_{k_i} \frac{\tilde{\delta}(k_1+k_2+k_3+p)}{\omega_\Lambda(k_1^2)+\omega_\Lambda(k_2^2)+\omega_\Lambda(k_3^2)+\omega_\Lambda(p^2)}\sqrt{\frac{K(p^2)}{2\omega_\Lambda(p^2)}}\left(\prod_{i=1}^{3}\sqrt{\frac{K(k_i^2)}{2\omega_\Lambda(k_i^2)}}a_\Lambda^{(0)}(k_i)\right) \\ &\quad + \left(\frac{\delta m^2}{2} + \frac{\lambda}{4!}\int_q \frac{6K_\Lambda(q^2)}{2\omega_\Lambda(q^2)}\right)\frac{K(p^2)}{2\omega_\Lambda^2(p^2)}a_\Lambda^{(0)}(-p) \end{aligned}$$

$$[a_\Lambda(p), a_\Lambda^\dagger(q)] = \tilde{\delta}(p-q)$$

ϕ^4 摂動論についての誤り訂正条件

IR 近傍のエラー演算子:

$$D(g)_\Lambda = \exp\left[\frac{1}{\sqrt{2}} g \cdot (a_\Lambda - a_\Lambda^\dagger)\right]$$

IR 極限を考えると，

$$_{\Lambda_{\mathrm{UV}}}\langle r' f_0 | D(g) | r f_0 \rangle_{\Lambda_{\mathrm{UV}}} \sim {}_{\Lambda_{\mathrm{UV}}}\langle r' f_0 | r f_0 \rangle_{\Lambda_{\mathrm{UV}}}$$

$\Rightarrow$ 誤り訂正可能

繰り込み群によって，誤り訂正ができるような符号部分空間が構成された

結論

まとめ

- スカラー場理論の波動汎関数が従う ERG 方程式の導出
- ERG 方程式の摂動解を用いて，繰り込み群から量子誤り訂正を実現する例の構築

展望

- ϕ^4 理論の非摂動論における誤り訂正条件
- CFT
- ゲージ理論
- エンタングルメント構造
- メトリック構造 (cf. Fisher metric [Nozaki et al., 2012])
- Numerical approach(テンソル繰り込み群などのテンソルネットワーク手法)

参考文献 i

Almheiri, A., Dong, X., and Harlow, D. (2015).
Bulk Locality and Quantum Error Correction in AdS/CFT.
JHEP, 04:163.

Furuya, K., Lashkari, N., and Moosa, M. (2022).
Renormalization group and approximate error correction.
Phys. Rev. D, 106(10):105007.

Maldacena, J. M. (1999).
The Large N limit of superconformal field theories and supergravity.
Int. J. Theor. Phys., 38:1113–1133.

- Nozaki, M., Ryu, S., and Takayanagi, T. (2012).
  Holographic Geometry of Entanglement Renormalization in Quantum Field Theories.
  JHEP, 10:193.
- Pastawski, F., Yoshida, B., Harlow, D., and Preskill, J. (2015).
  Holographic quantum error-correcting codes: Toy models for the bulk/boundary correspondence.
  JHEP, 06:149.
- Polchinski, J. (1984).
  Renormalization and Effective Lagrangians.
  Nucl. Phys. B, 231:269–295.

Ryu, S. and Takayanagi, T. (2006).
Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT.
Phys. Rev. Lett., 96:181602.

Swingle, B. (2012).
Entanglement Renormalization and Holography.
Phys. Rev. D, 86:065007.

Vidal, G. (2007).
Entanglement Renormalization.
Phys. Rev. Lett., 99(22):220405.

Backup slides

波動関数の表現

n 自由度系の波動関数

$$|\psi\rangle = \sum_{\{s_i\}} T^{s_1 s_2 \cdots s_n} |s_1 s_2 \cdots s_n\rangle$$

面積則を満たすように係数 $T^{s_1 s_2 \cdots s_n}$ を表したい

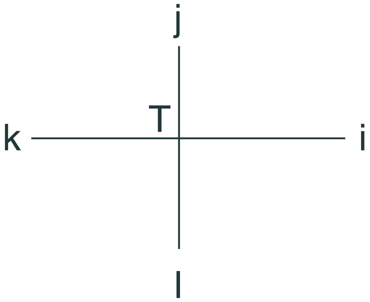
係数の構造をテンソルネットワーク図で表現する

テンソルネットワーク図の notation

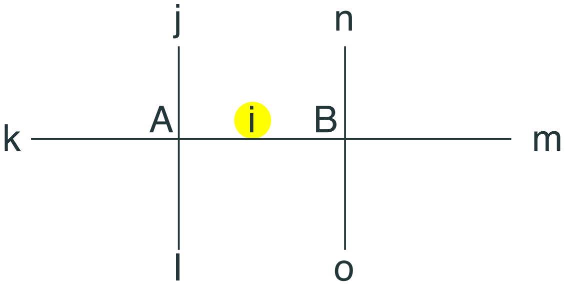
格子点 $\leftrightarrow$ テンソル
ボンド $\leftrightarrow$ テンソルの添字

複数のテンソルに共有されているボンドは縮約する

$$T_{ijkl}$$



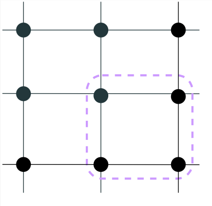
$$\sum_i A_{ijkl} B_{mnio}$$



TPS(tensor product state)

$$T^{s_1 s_2 \cdots s_n} = \sum_{m_1, m_2, \cdots} (A_1^{s_1})_{m_1 m_2 \cdots} (A_2^{s_2})_{n_1 n_2 \cdots} \cdots$$

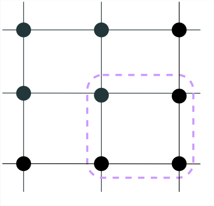
各ボンドには，maximally entangled pair が導入されている



TPS(tensor product state)

$$T^{s_1 s_2 \cdots s_n} = \sum_{m_1, m_2, \cdots} (A_1^{s_1})_{m_1 m_2 \cdots} (A_2^{s_2})_{n_1 n_2 \cdots} \cdots$$

各ボンドには，maximally entangled pair が導入されている

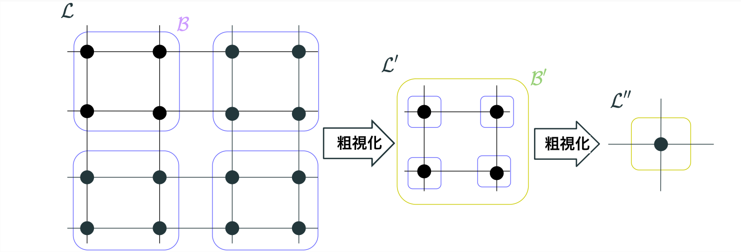


エンタングルメントエントロピー $S \leq N_{\text{bond}} \log \chi$

N_{bond}：境界が切るボンドの数 ($\sim L^{d-1}$)

$\Rightarrow$ 非臨界系の面積則 $S \sim L^{d-1} \log \chi$ を再現

実空間繰り込み群

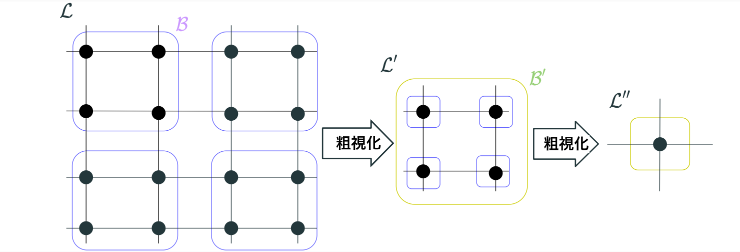


実空間繰り込み変換 ： Hilbert 空間の自由度を落とす変換（粗視化）

$\to$ effective lattice $\mathcal{L}^{(n)}$ 上で物理量を計算

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' \to \mathcal{L}'' \to \dots \mathcal{L}^{(n)}$$

実空間繰り込み群



実空間繰り込み変換 ： Hilbert 空間の自由度を落とす変換（粗視化）

$\rightarrow$ effective lattice $\mathcal{L}^{(n)}$ 上で物理量を計算

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}'' \rightarrow \ldots \mathcal{L}^{(n)}$$

粗視化は isometry ω で特徴付けられる ($\omega^\dagger \omega = I$)
粗視化にしたがってエンタングルメントが切れるのが自然
$\rightarrow$ disentangler の導入

Wave functional for a free theory

We can check that Ψ_0, the ground-state wave functional of a free theory, satisfies the ERG equation

The wave functional

$$\Psi_\Lambda^{(0)}[\varphi(\vec{p})] = \int_{\phi(0,\vec{p})=\varphi(\vec{p})} D\phi \; e^{-\int_{-\infty}^{0} d\tau L_0}$$

$$L_0 = \int_{\vec{p}} \frac{1}{2} K_{\vec{p}}^{-1} \left[\partial_\tau \phi(\tau,\vec{p}) \partial_\tau \phi(\tau,-\vec{p}) + (\vec{p}^2 + m^2)\phi(\tau,\vec{p})\phi(\tau,-\vec{p})\right]$$

$$\Psi_\Lambda^{(0)} = \exp\left[-\int_{\vec{p}} \frac{1}{2} K_{\vec{p}}^{-1} \omega_{\vec{p}} \; \varphi(\vec{p})\varphi(-\vec{p}) + \frac{V}{4}\int_{\vec{p}} \log\left(2K_{\vec{p}}^{-1}\right)\omega_{\vec{p}}\right]$$

$\rightarrow$ satisfies the ERG equation for the wave functional

Exact renormalization group(ERG)

Requirement

The partition function is unchanged
under the infinitesimal change of the effective cutoff Λ

Exact renormalization group(ERG)

Requirement

The partition function is unchanged
under the infinitesimal change of the effective cutoff Λ

$$0 = -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} \int \mathcal{D}\phi e^{-S_\Lambda[\phi]}$$

$$\Rightarrow -\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} e^{-S_\Lambda[\phi]} = \int_p \frac{\delta}{\delta \phi(p)} \left[G_\Lambda[\phi](p) e^{-S_\Lambda[\phi]} \right]$$

$\Lambda :$ the effective cutoff, $S_\Lambda :$ the effective action

$G_\Lambda[\phi](p) :$ the UV regularization,

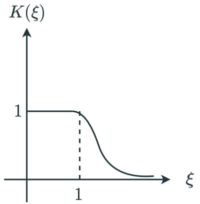
corresponds to a continuum blocking(coarse-graining) procedure

$$G_\Lambda[\phi](p) = \frac{1}{2} \dot{C}_\Lambda(p) \frac{\delta}{\delta \phi(-p)} (S_\Lambda - 2\hat{S})$$

$\hat{S} :$ the seed action

$\dot{C}_\Lambda \equiv -\Lambda \partial_\Lambda C_\Lambda :$ an ERG integration kernel

typically, $C_\Lambda(p) = K(p^2/\Lambda^2)/(p^2 + m^2)$



波動汎関数 Ψ_Λ に対する ERG 方程式

$-\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}$ を両辺に作用

$$-\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\Psi_\Lambda^2[\varphi] = \int\mathcal{D}\phi\prod_{\vec{k}}\delta[\phi(0,\vec{k})-\varphi(\vec{k})]\int_{\tau,\tau',\vec{p}}\frac{\delta}{\delta\phi(\tau,\vec{p})}\left[\frac{1}{2}\dot{C}_\Lambda(\tau-\tau',\vec{p})\left\{\frac{\delta}{\delta\phi(\tau',-\vec{p})}(S_\Lambda-2S_0)\right\}e^{-S_\Lambda}\right]$$

代入:
$$\begin{cases} S_0 & = \int_p \frac{1}{2}\phi(p)C_\Lambda^{-1}(p)\phi(-p), \\ -\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}e^{-S_\Lambda[\phi]} & = \int_p\frac{\delta}{\delta\phi(p)}\left[\frac{1}{2}\dot{C}_\Lambda(p)\left\{\frac{\delta}{\delta\phi(-p)}(S_\Lambda-2S_0)\right\}e^{-S_\Lambda[\phi]}\right]\end{cases}$$

$$\Rightarrow\int\mathcal{D}\phi\prod_{\vec{k}}\delta[\phi(0,\vec{k})-\varphi(\vec{k})]\int_{\tau,\tau',\vec{p}}\left[-\frac{1}{2}\dot{C}_\Lambda(\tau-\tau',\vec{p})\frac{\delta^2}{\delta\phi(\tau,\vec{p})\delta\phi(\tau',-\vec{p})}e^{-S_\Lambda[\phi]}\right]$$

$$-\int\mathcal{D}\phi\prod_{\vec{k}}\delta[\phi(0,\vec{k})-\varphi(\vec{k})]\int_{\tau,\tau',\tau'',\vec{p}}\frac{\delta}{\delta\phi(\tau,\vec{p})}\left[\dot{C}_\Lambda(\tau-\tau',\vec{p})C_\Lambda^{-1}(\tau'-\tau'',\vec{p})\phi(\tau'',\vec{p})e^{-S_\Lambda[\phi]}\right]$$

$\uparrow$ $\tau=\tau'=0$(1 行目) & $\tau=0$(2 行目) を除き全微分項

典型的には、$\dot{C}_\Lambda(0,\vec{p})=\dot{K}(\vec{p})/(2\sqrt{\vec{p}^2+m^2})$, $K(\vec{p})$ は $\vec{p}^2>\Lambda^2$ で damp

基底状態の波動関数についての ERG 方程式

$$-\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}\Psi_\Lambda = -\frac{1}{2}\int_{\vec{p}}\dot{C}_\Lambda(0,\vec{p})\left\{\frac{\delta^2\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})\delta\varphi(-\vec{p})}+\frac{1}{\Psi_\Lambda}\frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})}\frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(-\vec{p})}\right\}$$
$$-\int_{\vec{p}}\frac{\dot{C}_\Lambda(0,\vec{p})}{C_\Lambda(0,\vec{p})}\varphi(\vec{p})\frac{\delta\Psi_\Lambda}{\delta\varphi(\vec{p})}-\frac{V}{2}\Psi_\Lambda\int_{\vec{p}}\frac{\dot{C}_\Lambda(0,\vec{p})}{C_\Lambda(0,\vec{p})}$$

The Polchinski equation [Polchinski, 1984]

Take the seed action $\hat{S}$ to the free part S_0

$$\hat{S} = S_0 = \int_p \frac{1}{2}\phi(p)C_\Lambda^{-1}(p)\phi(-p)$$

$$\begin{cases} -\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}e^{-S_\Lambda[\phi]} & = \int_p \frac{\delta}{\delta\phi(p)}\left[G_\Lambda[\phi](p)e^{-S_\Lambda[\phi]}\right] \\ G_\Lambda[\phi](p) & = \frac{1}{2}\dot{C}_\Lambda(p)\frac{\delta}{\delta\phi(-p)}(S_\Lambda - 2\hat{S}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}e^{-S_\Lambda[\phi]} = \int_p \frac{\delta}{\delta\phi(p)}\left[\frac{1}{2}\dot{C}_\Lambda(p)\left\{\frac{\delta}{\delta\phi(-p)}(S_\Lambda - 2S_0)\right\}e^{-S_\Lambda[\phi]}\right]$$

The Polchinski equation [Polchinski, 1984]

Take the seed action $\hat{S}$ to the free part S_0

$$\hat{S} = S_0 = \int_p \frac{1}{2}\phi(p) C_\Lambda^{-1}(p)\phi(-p)$$

$$\begin{cases} -\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}e^{-S_\Lambda[\phi]} & = \int_p \frac{\delta}{\delta\phi(p)}\left[G_\Lambda[\phi](p)e^{-S_\Lambda[\phi]}\right] \\ G_\Lambda[\phi](p) & = \frac{1}{2}\dot{C}_\Lambda(p)\frac{\delta}{\delta\phi(-p)}(S_\Lambda - 2\hat{S}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}e^{-S_\Lambda[\phi]} = \int_p \frac{\delta}{\delta\phi(p)}\left[\frac{1}{2}\dot{C}_\Lambda(p)\left\{\frac{\delta}{\delta\phi(-p)}(S_\Lambda - 2S_0)\right\}e^{-S_\Lambda[\phi]}\right]$$

Put $S_\Lambda = S_0 + S_{\text{int}}$

The Polchinski equation for S_{int}

$$-\Lambda\frac{\partial}{\partial\Lambda}e^{-S_{\text{int}}} = -\frac{1}{2}\int_p \dot{C}_\Lambda(p)\frac{\delta^2}{\delta\phi(p)\delta\phi(-p)}e^{-S_{\text{int}}}$$

The functional differential equation for the interacting part of S_Λ

ERG eq for the interaction part of wave functionals

$$\Psi_\Lambda[\varphi] = \int_{\phi(0,\vec{p})=\varphi(\vec{p})} D\phi \; e^{-\int_{-\infty}^{0} d\tau (L_0 + L_{\mathrm{int}})}$$

Parametrize

$$\Psi_\Lambda[\varphi] = e^{I[\varphi]}\Psi_\Lambda^{(0)} \,, \quad \Psi_\Lambda^{(0)}[\varphi] : \text{the free part of the wave functional}$$

$$I[\varphi] : \text{the ``interaction part'' of } \Psi_\Lambda$$

ERG eq for the interaction part of Ψ_Λ

$$-\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} I = -\frac{1}{2} \int_{\vec{p}} \dot{C}(0,\vec{p}) \left[\frac{\delta^2 I}{\delta\varphi(\vec{p})\delta\varphi(-\vec{p})} + \frac{\delta I}{\delta\varphi(\vec{p})} \frac{\delta I}{\delta\varphi(-\vec{p})} \right]$$

Counterpart of the Polchinski equation