T双対不変量による II型超重力理論の再構築について

茨城大学理　百武慶文

前山聖登君との共同研究に基づく

Universe (10) (2024) 1, 28; arXiv:2311.04660

1. イントロダクション

超弦理論は量子重力理論の有望な候補であり、ブラックホールや初期宇宙のような重力の量子効果を取り入れて解析する必要がある領域で盛んに研究されている。

BH entropy,Swampland, ...

超弦理論は低エネルギー領域では超重力理論で近似されるが、エネルギーが高くなるにつれて高次微分の補正項が重要になってくる。

Gross,Witten,Grisaru,van de Ven,Zanon ...

このような高次微分項を求めるには様々な手法があるが、超弦理論がもつ双対性は非常に強力である。

Hohm,Zwiebach,Codina,Marques,David,Liu
Garousi

このような応用を念頭に、本講演ではII型超重力理論を双対不変な形式に書き換えることを紹介する。

Hassan
Hyakutake,Maeyama

II型超重力理論の作用

$$\mathcal{L} = Ee^{-2\Phi}\Big[R + (\partial\Phi)^2 + H^2$$
$$+ \overline{\Psi}D\Psi + \overline{\lambda}D\lambda + \overline{\Psi}D\lambda + \overline{\lambda}D\Psi$$
$$+ \overline{\Psi}H\Psi + \overline{\lambda}H\lambda + \overline{\Psi}H\lambda\Big]$$
$$+ EG^2 + Ee^{-\Phi}\Big[\overline{\Psi}G\Psi + \overline{\lambda}G\lambda + \overline{\Psi}G\lambda\Big] + B \wedge G \wedge G$$

Huq,Namazie(1985)

⬇ 双対不変な形へ

$$\mathcal{L} = Ee^{-2\Phi}\Big[T^2 + S^2$$
$$+ \overline{\Theta}D\Theta + \overline{\Psi}D\Psi + \overline{\Psi}D\Theta$$
$$+ \overline{\Theta}S\Theta + \overline{\Psi}S\Psi\Big]$$
$$+ EG^2 + Ee^{-\Phi}\overline{\Theta}G\Theta$$

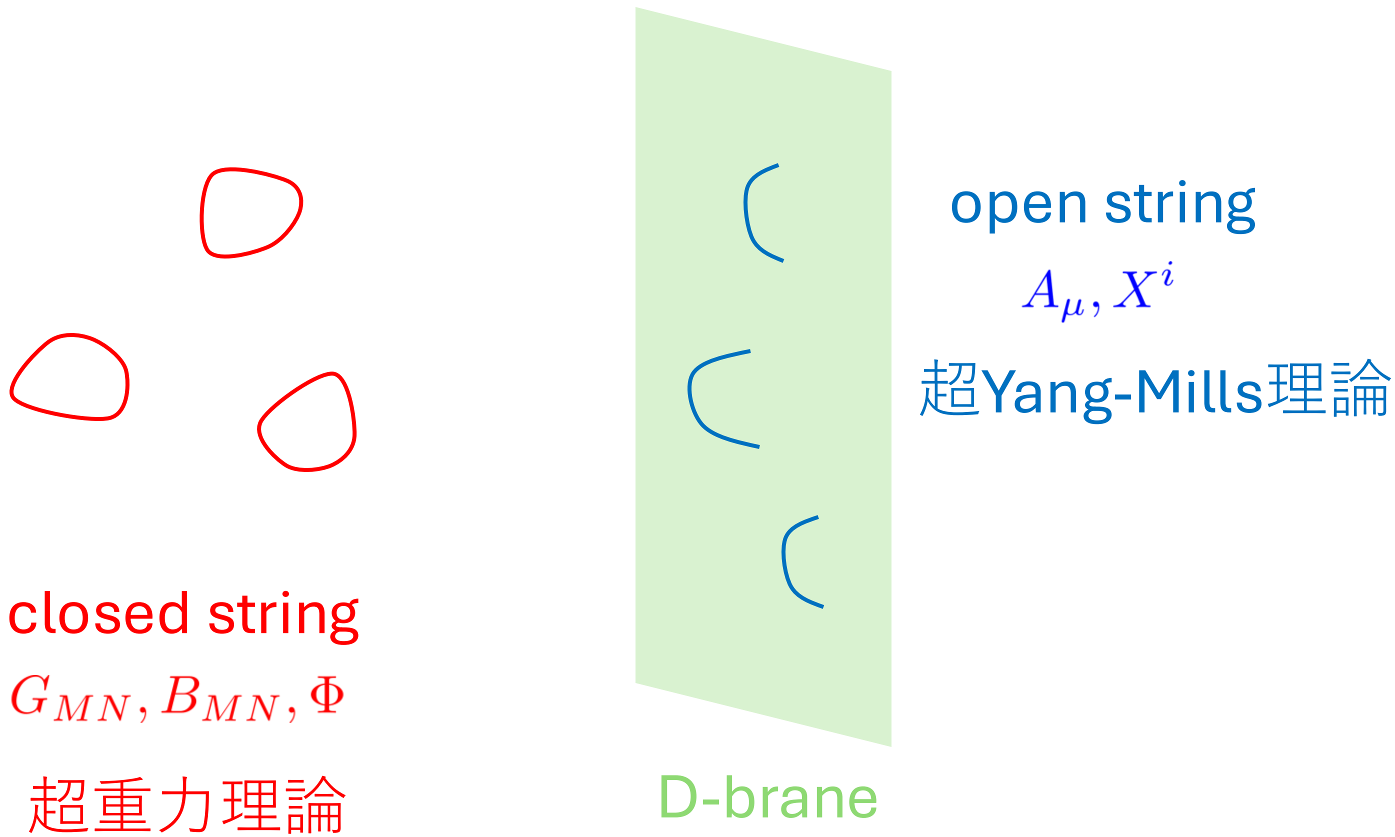
Hassan(2000)
Hyakutake,Maeyama(2024)

c.f. Jeon,Lee,Park,Suh(2011)
Coimbra,Constable,Waldram(2011)

1. イントロダクション
2. 超弦理論とT双対性
3. NSNSボソン場の$O(d,d)$双対変換
4. NSNSボソン場の双対不変場の構築
5. F1解とwave解、NS5とKK monopole
6. NSNSボソン場の作用の双対不変形式
7. フェルミオン場の$O(d,d)$双対変換と不変場
8. フェルミオン場の作用の双対不変形式
9. RR場と双対不変な作用について
10. 結論と展望

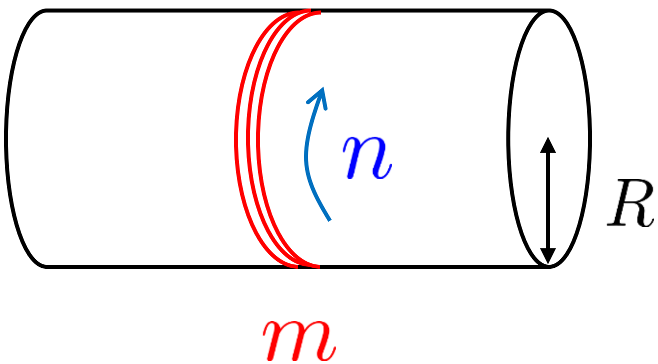
2. 超弦理論とT双対性

超弦理論は超弦（2次元世界面上の共形場の理論）を量子化することで、10次元時空で摂動的に定式化される理論。



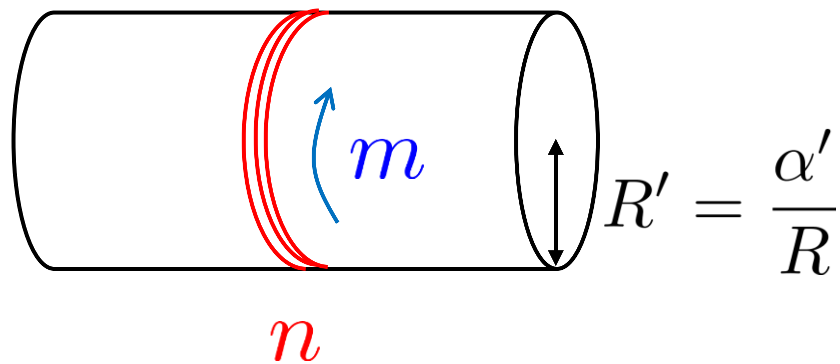
空間方向をS^1でコンパクト化したIIA型超弦理論とIIB型超弦理論は、同じスペクトルを与える。

IIA on $\boldsymbol{R}^{1,8} \times S^1$



$$E = \sqrt{\left(\frac{mR}{\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2}$$

IIB on $\boldsymbol{R}^{1,8} \times S^1$



$$E = \sqrt{\left(\frac{nR'}{\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{m}{R'}\right)^2}$$

これをT双対性と呼ぶ。

Kikkawa,Yamasaki(1984)
Sakai,Senda(1987)

10次元超重力理論をS^1でコンパクト化して、massless boson場に対するT双対性の変換を確認する。
計量 G_{MN}、B場 B_{MN}、ディラトン場 Φ を

$$G_{MN}dX^M dX^N = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + g_{99}(x)(dy - A_\mu(x)dx^\mu)(dy - A_\nu(x)dx^\nu)$$

$$\tfrac{1}{2}B_{MN}dX^M \wedge dX^N = \tfrac{1}{2}(b_{\mu\nu}(x) - A_\mu(x)\tilde{A}_\nu(x))dx^\mu \wedge dx^\nu + \tilde{A}_\mu(x)dy \wedge dx^\mu$$

$$\Phi = \phi(x) + \frac{1}{4}\log g_{99}(x) \qquad\qquad M, N = 0, 1, \cdots, 9 \qquad \mu, \nu = 0, 1, \cdots, 8$$

のように仮定すると、10次元超重力理論の作用は

$$S_{10} = \frac{V_9}{2\kappa_{10}^2}\int d^9x\sqrt{-g}e^{-2\phi}\Big[r + 4\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{4}\partial_\mu g^{99}\partial^\mu g_{99}$$
$$-\frac{1}{4}g_{99}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g^{99}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{12}\Big|h_{\mu\nu\rho} - \tfrac{3}{2}F_{[\mu\nu}\tilde{A}_{\rho]} - \tfrac{3}{2}A_{[\mu}\tilde{F}_{\nu\rho]}\Big|^2\Big]$$

のように9次元超重力理論に次元削減される。

さらに以下の2×2行列

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} g^{99} & 0 \\ 0 & g_{99} \end{pmatrix} \qquad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いると、9次元超重力理論の作用は

$$S_{10} = \frac{V_9}{2\kappa_{10}^2} \int d^9x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \Big[r + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \underbrace{\frac{1}{4}\partial_\mu g^{99} \partial^\mu g_{99}}_{= \frac{1}{8}\mathrm{tr}(\eta \partial_\mu \mathcal{H} \eta \partial^\mu \mathcal{H})}$$

$$\underbrace{- \frac{1}{4} g_{99} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g^{99} \tilde{F}^{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}}_{= -\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu} \ \tilde{F}_{\mu\nu} \right) \eta \mathcal{H} \eta \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ \tilde{F}^{\mu\nu} \end{pmatrix}} \underbrace{- \frac{1}{12} \left| h_{\mu\nu\rho} - \tfrac{3}{2} F_{[\mu\nu} \tilde{A}_{\rho]} - \tfrac{3}{2} A_{[\mu} \tilde{F}_{\nu\rho]} \right|^2}_{= -\frac{1}{12} \left| h_{\mu\nu\rho} - \frac{3}{2} \left(A_{[\mu} \ \tilde{A}_{[\mu} \right) \eta \begin{pmatrix} F_{\nu\rho]} \\ \tilde{F}_{\nu\rho]} \end{pmatrix} \right|^2} \Big]$$

$$= \frac{V_9}{2\kappa_{10}^2} \int d^9x \sqrt{-g} e^{-2\phi} \Big[r + 4\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{8}\mathrm{tr}(\eta \partial_\mu \mathcal{H} \eta \partial^\mu \mathcal{H})$$

$$= -\frac{1}{4} \left(F_{\mu\nu} \ \tilde{F}_{\mu\nu} \right) \eta \mathcal{H} \eta \begin{pmatrix} F^{\mu\nu} \\ \tilde{F}^{\mu\nu} \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \left| h_{\mu\nu\rho} - \frac{3}{2} \left(A_{[\mu} \ \tilde{A}_{[\mu} \right) \eta \begin{pmatrix} F_{\nu\rho]} \\ \tilde{F}_{\nu\rho]} \end{pmatrix} \right|^2 \Big]$$

となる。この表式は$O(1,1)$双対変換で不変。

$$\mathcal{O}^T \eta \mathcal{O} = \eta, \quad \mathcal{H}' = \mathcal{O} \mathcal{H} \mathcal{O}^T, \quad \begin{pmatrix} A'_\mu \\ \tilde{A}'_\mu \end{pmatrix} = \mathcal{O} \begin{pmatrix} A_\mu \\ \tilde{A}_\mu \end{pmatrix}$$

Buscher(1987)

3. NSNSボソン場の$O(d,d)$双対変換

10次元超重力理論を T^d でコンパクト化すると
$O(d,d)$ 双対性が現れる。

Meissner,Veneziano(1991)
Maharana,Schwarz(1993)

10 dim SUGRA

G_{MN}, B_{MN}, Φ

10 dim SUGRA’

G'_{MN}, B'_{MN}, Φ'

(10-d) dim SUGRA

$g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, \phi, \mathcal{H}, \mathcal{A}$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{O}}$$

$$\mathcal{O}^T \eta \mathcal{O} = \eta$$

(10-d) dim SUGRA’

$g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, b'_{\mu\nu} = b_{\mu\nu}, \phi' = \phi,$

$\mathcal{H}' = \mathcal{O}\mathcal{H}\mathcal{O}^T, \mathcal{A}' = \mathcal{O}\mathcal{A}$

$$\mathcal{H} \equiv \begin{pmatrix} g^{\alpha\beta} & -g^{\alpha\gamma}B_{\gamma\tilde{\beta}} \\ B_{\tilde{\alpha}\gamma}g^{\gamma\beta} & g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} - B_{\tilde{\alpha}\gamma}g^{\gamma\delta}B_{\delta\tilde{\beta}} \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} \equiv \begin{pmatrix} A^{\alpha}_{\mu} \\ \tilde{A}_{\tilde{\alpha}\mu} \end{pmatrix} \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 1_d \\ 1_d & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha, \tilde{\alpha}, \cdots = 10 - d, \cdots, 9$$

$O(d,d)$ の生成子は以下のように分解できる。 Sen(1991)

$$d(2d-1) = d^2 + \frac{d(d-1)}{2} + \frac{d(d-1)}{2}$$

$$\mathcal{O}^T \eta \mathcal{O} = \eta \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \mathcal{O}_{11}^T \mathcal{O}_{21} + \mathcal{O}_{21}^T \mathcal{O}_{11} = 0 \\ \mathcal{O}_{12}^T \mathcal{O}_{22} + \mathcal{O}_{22}^T \mathcal{O}_{12} = 0 \\ \mathcal{O}_{11}^T \mathcal{O}_{22} + \mathcal{O}_{21}^T \mathcal{O}_{12} = 1 \end{cases}$$

① GL(d) $\quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} \mathcal{O}_{11} & 0 \\ 0 & (\mathcal{O}_{11}^T)^{-1} \end{pmatrix}$

② B場のシフト $\quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathcal{O}_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O}_{21}^T = -\mathcal{O}_{21}$

非自明 ⟶ ③ $\dfrac{O(d) \times O(d)}{O(d)}$ $\quad \mathcal{O} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathcal{S} + \mathcal{R} & \mathcal{S} - \mathcal{R} \\ \mathcal{S} - \mathcal{R} & \mathcal{S} + \mathcal{R} \end{pmatrix},$

$$\mathcal{S}^T \mathcal{S} = \mathcal{R}^T \mathcal{R} = 1$$

$O(d,d)$の部分群である$O(d)\times O(d)$ に着目して双対変換を整理すると、10次元計量とディラトン場の間の変換則が得られる。

$$G'^{MN} = {Q_{\pm}}^{M}{}_{K} G^{KL} {Q^{T}_{\pm}}_{L}{}^{N} \qquad \Phi' = \Phi - \frac{1}{2}\log \det Q_{\pm}$$

$$Q_{\pm} = \frac{1}{2}(S+R) \mp \frac{1}{2}(S-R)(G\mp B), \quad S = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{10-d} & 0 \\ 0 & \mathcal{S} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{10-d} & 0 \\ 0 & \mathcal{R} \end{pmatrix}$$

例：

$$\begin{aligned} G'^{MN} &= \begin{pmatrix} G^{\mu\nu} & -B_{9\rho}G^{\rho\mu} \\ -B_{9\rho}G^{\rho\nu} & G_{99} + G^{\rho\sigma}B_{9\rho}B_{9\sigma} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \delta^{\mu}_{\rho} & 0 \\ G_{9\rho} - B_{9\rho} & G_{99} \end{pmatrix}}_{Q_{+}} \begin{pmatrix} G^{\rho\sigma} & G^{\rho 9} \\ G^{9\sigma} & G^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{\nu}_{\sigma} & G_{\sigma 9} - B_{9\sigma} \\ 0 & G_{99} \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \delta^{\mu}_{\rho} & 0 \\ -G_{9\rho} - B_{9\rho} & -G_{99} \end{pmatrix}}_{Q_{-}} \begin{pmatrix} G^{\rho\sigma} & G^{\rho 9} \\ G^{9\sigma} & G^{99} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{\nu}_{\sigma} & -G_{\sigma 9} - B_{9\sigma} \\ 0 & -G_{99} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vielbein${E^{M}}_{A}$は以下のように2通りの変換が可能。

$$E'^{M}_{(\pm)A} = Q^{M}_{\pm N} {E^{N}}_{A}$$

K, L, M, N : space-time

A, B, C, D : local Lorentz

双対変換後の理論は $E'^{M}_{(-)A}$ を用いる。

捩率付き接続 $W^{\pm A}_{M\ \ B} = \underline{\Omega_M{}^A{}_B} \mp \frac{1}{2}\underline{H_M{}^A{}_B}$ は、面倒な計算の結果

スピン接続　B場の強さ

$$W'^{\pm}_{(\pm)M}{}^{A}{}_{B} = W^{\pm A}_{N\ \ B} Q^{-1N}_{\mp\ \ \ M}$$

のように変換する。

B場の強さは以下のように変換する。

$$\begin{aligned} H'_{(\pm)ABC} &= E'^{M}_{(\pm)A} E'^{N}_{(\pm)B} E'^{K}_{(\pm)C} H'_{MNK} \\ &= H_{ABC} - 3G_{KM} Q^{-1M}_{\pm\ \ \ N} (S-R)^{NL} W^{\pm}_{L[BC} E^{K}{}_{A]} \end{aligned}$$

Hassan(2000)
+YH-Maeyama

4. NSNSボソン場の双対不変場の構築

NSNSボソン場をうまく組み合わせて双対不変な場を構成したい。まずは必要な関係式を導出する。

Hyakutake,Maeyama(2024)

$$Q_\pm = \frac{1}{2}(S+R) \mp \frac{1}{2}(S-R)(G \mp B)$$

$$\begin{aligned} Q_\pm (S-R)^T &= \frac{1}{2}(S+R)(S-R)^T \mp \frac{1}{2}(S-R)(G \mp B)(S-R)^T \\ &= -(S-R)\Big\{\frac{1}{2}(S+R) \pm \frac{1}{2}(S-R)(G \pm B)\Big\}^T \\ &= -(S-R)Q_\mp^T \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad Q_\pm^{-1}(S-R) = -\{Q_\mp^{-1}(S-R)\}^T$$

$$(S-R)G = Q_- - Q_+$$

$$Q_\mp^{-1}(S-R)G = \pm(1 - Q_\mp^{-1}Q_\pm)$$

$$\Leftrightarrow \quad GQ_\pm^{-1}(S-R) = -\{Q_\mp^{-1}(S-R)G\}^T = \mp 1 \pm \{Q_\mp^{-1}Q_\pm\}^T$$

関係式を用いると、B場の強さの双対変換は

$$
\begin{aligned}
H'_{(\pm)ABC} &= H_{ABC} - 3G_{KM}Q_{\pm}^{-1M}{}_{N}(S-R)^{NL}W^{\pm}_{L[BC}E^{K}{}_{A]} \\
&= H_{ABC} \pm 3W^{\pm}_{[ABC]} \mp 3Q_{\mp}^{-1L}{}_{N}Q^{N}_{\pm K}W^{\pm}_{L[BC}E^{K}{}_{A]} \\
&= H_{ABC} \pm 3W^{\pm}_{[ABC]} \mp 3W'^{\pm}_{(\pm)[ABC]}
\end{aligned}
$$

となる。従って

$$
S^{\pm}_{ABC} \equiv H_{ABC} \pm 3W^{\pm}_{[ABC]} = -\frac{1}{2}H_{ABC} \pm 3\Omega_{[ABC]}
$$

は双対変換で不変な場の組み合わせとなる。

c.f. Aldazabal,Marques,Nunez(2013)
Coimbra,Constable,Waldram(2011)

ディラトンの微分は以下のように変形される。

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu \Phi' - \partial_\mu \Phi &= -\tfrac{1}{2}\partial_\mu \log\det Q_\pm \\
&= -\tfrac{1}{2} Q_\pm^{-1\alpha}{}_\beta \partial_\mu Q_\pm{}^\beta{}_\alpha \\
&= \pm\tfrac{1}{4} Q_\pm^{-1\alpha}{}_\beta (S-R)^{\beta\gamma}\partial_\mu (G\mp B)_{\gamma\alpha} \\
&= \pm\tfrac{1}{2} e^a{}_\alpha Q_\pm^{-1\alpha}{}_\beta (S-R)^{\beta\gamma} W^\pm_{\gamma a i} e^i{}_\mu \\
&= \pm\tfrac{1}{2} E^A{}_M Q_\pm^{-1M}{}_N (S-R)^{NL} W^\pm_{LAB} E^B{}_\mu \\
&= -\tfrac{1}{2} E^{MA} W^\pm_{MAB} E^B{}_\mu + \tfrac{1}{2} E^{MA} Q_\mp^{-1L}{}_N Q_\pm^N{}_M W^\pm_{LAB} E^B{}_\mu \\
&= -\tfrac{1}{2} E^{MA} W^\pm_{MAB} E^B{}_\mu + \tfrac{1}{2} E'^{MA}_{(\pm)} W'^\pm_{(\pm)MAB} E'^B_{(\pm)\mu}
\end{aligned}
$$

従って

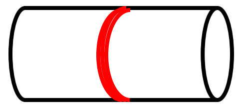
$$
T_N^\pm \equiv \partial_N \Phi - \frac{1}{2} W^{\pm A}{}_{AN} = \partial_N \Phi - \frac{1}{2} \Omega^A{}_{AN}
$$

は双対変換で不変な場の組み合わせとなる。

5. F1解とwave解、NS5とKK monopole

重力解で双対不変量が一致していることを確認する。

X^9方向に伸びたF1



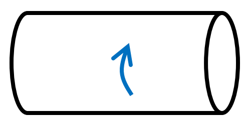
$$ds^2 = -h_1^{-1}(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^{8}(dX^i)^2 + h_1^{-1}(dX^9)^2,$$

$$e^{\Phi} = h_1^{-\frac{1}{2}}, \quad B_{09} = -1 + h_1^{-1}, \quad h_1 = 1 + \frac{c_1}{r^6}$$

$$\Rightarrow \quad S^{\pm}_{\hat{i}\hat{0}\hat{9}} = \frac{1}{2}h_1^{-1}\partial_i h_1$$

$$\Updownarrow \quad h_1 = h_{\mathrm{w}}$$

X^9方向に運動するwave



$$ds^2 = -h_{\mathrm{w}}^{-1}(dX^0)^2 + \sum_{i=1}^{8}(dX^i)^2$$

$$+ h_{\mathrm{w}}\big(dX^9 - (1 - h_{\mathrm{w}}^{-1})dX^0\big)^2, \quad h_{\mathrm{w}} = 1 + \frac{c_{\mathrm{w}}}{r^6}$$

$$\Rightarrow \quad S'^{\pm}_{(\pm)\hat{i}\hat{0}\hat{9}} = \frac{1}{2}h_{\mathrm{w}}^{-1}\partial_i h_{\mathrm{w}}$$

X^9方向になめされたNS5

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \cdots + (dX^5)^2 + h_5 \sum_{i=6,7,8} (dX^i)^2 + h_5 (dX^9)^2,$$

$$e^\Phi = h_5^{\frac{1}{2}}, \quad H_{ij9} = \epsilon_{ijk}\partial^k h_5, \quad h_5 = 1 + \frac{c_5}{r^6}$$

$\Rightarrow$

$$S^{\pm}_{\hat{i}\hat{j}\hat{9}} = -\tfrac{1}{2} h_5^{-\frac{3}{2}} \epsilon_{ijk}\partial^k h_5,$$

$$T_{\hat{i}} = -\tfrac{1}{4} h_5^{-\frac{3}{2}} \partial_i h_5$$

$\Updownarrow$ $h_5 = h_{\rm m}$

X^9方向にfiberされたKK monopole

$$ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + \cdots + (dX^5)^2 + h_{\rm m} \sum_{i=6,7,8} (dX^i)^2 + h_{\rm m}^{-1} \left(dX^9 - A_i dX^i\right)^2,$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\epsilon_{ijk}\partial^k h_{\rm m}, \quad h_{\rm m} = 1 + \frac{c_{\rm m}}{r^6}$$

$\Rightarrow$

$$S'^{\pm}_{(\pm)\hat{i}\hat{j}\hat{9}} = -\tfrac{1}{2} h_{\rm m}^{-\frac{3}{2}} \epsilon_{ijk}\partial^k h_{\rm m},$$

$$T'_{(-)\hat{i}} = -\tfrac{1}{4} h_{\rm m}^{-\frac{3}{2}} \partial_i h_{\rm m}$$

6. NSNSボソン場の作用の双対不変形式

NSNS場の作用を$S^{\pm}_{ABC}, T_A, W^{\pm}_{MAB}$の2次の項で再構築する。
可能性としては $Ee^{-2\Phi}S^{\pm}_{ABC}S^{\pm ABC}, Ee^{-2\Phi}T_AT^A, Ee^{-2\Phi}W^{\pm ABC}W^{\pm}_{ABC}$
の3つである。前2つの項を計算すると、それぞれ

$$\frac{1}{6}Ee^{-2\Phi}S^{\pm}_{ABC}S^{\pm ABC}$$
$$= Ee^{-2\Phi}\{\tfrac{1}{6}H_{ABC}H^{ABC} \pm H^{ABC}W^{\pm}_{ABC} + \tfrac{1}{2}W^{\pm ABC}W^{\pm}_{ABC} - W^{\pm ABC}W^{\pm}_{BAC}\}$$

$$4Ee^{-2\Phi}T^AT_A$$
$$= Ee^{-2\Phi}\{4\partial^A\Phi\partial_A\Phi + W^{\pm A}{}_{AC}W^{\pm B}{}_{B}{}^{C}\} - 2E\partial_M(e^{-2\Phi})E^{MA}E^{NB}W^{\pm}_{NAB}$$
$$= Ee^{-2\Phi}\{4\partial^A\Phi\partial_A\Phi + R^{\pm} \mp H^{ABC}W^{\pm}_{ABC} + W^{\pm ABC}W^{\pm}_{BAC}\} + 2\partial_M\left(Ee^{-2\Phi}W^{\pm A}{}_{A}{}^{M}\right)$$

であり、Lorentz scalarではない。ここで $R^{\pm}$ は

$$R^{\pm}_{ABMN} \equiv \partial_M W^{\pm}_{NAB} - \partial_N W^{\pm}_{MAB} + W^{\pm}_{MA}{}^{C}W^{\pm}_{NCB} - W^{\pm}_{NA}{}^{C}W^{\pm}_{MCB}$$

の縮約でつくられるスカラー曲率である。

そこでこれらの3つの項を組み合わせてスカラーをつくる必要がある。可能性は唯一

$$
\begin{aligned}
&Ee^{-2\Phi}\left(\frac{1}{6}S^{ABC}S_{ABC}+4T^{A}T_{A}-\frac{1}{2}W^{\pm ABC}W^{\pm}_{ABC}\right)\\
&=Ee^{-2\Phi}\left(4\partial^{A}\Phi\partial_{A}\Phi+R^{\pm}+\frac{1}{6}H^{ABC}H_{ABC}\right)+2\partial_{M}\left(Ee^{-2\Phi}W^{\pm A}{}_{A}{}^{M}\right)\\
&=Ee^{-2\Phi}\left(4\partial^{A}\Phi\partial_{A}\Phi+R-\frac{1}{2\cdot 3!}H^{ABC}H_{ABC}\right)+2\partial_{M}\left(Ee^{-2\Phi}W^{\pm A}{}_{A}{}^{M}\right)
\end{aligned}
$$

である。これは超重力理論のNSNS Lagrangianと全微分項を除き一致する。

7. フェルミオン場の$O(d,d)$双対変換と不変場

10次元 $\mathcal{N}=2$ 超重力理論には、フェルミオン場として
グラビティーノとディラティーノが2つずつ存在する。

$$\Psi_{\pm M}, \quad \lambda_{\pm}$$

$\pm$ は弦のleft or right moverのラベル

これらはMajorana-Weylフェルミオンであり、IIA型と
IIB型の真空に対応してカイラリティは

$$\text{IIA:} \quad \Gamma_{11}\lambda_{\pm} = \pm\lambda_{\pm}, \quad \Gamma_{11}\Psi_{\pm M} = \mp\Psi_{\pm M}$$

$$\text{IIB:} \quad \Gamma_{11}\lambda_{\pm} = -\lambda_{\pm}, \quad \Gamma_{11}\Psi_{\pm M} = \Psi_{\pm M}$$

のようになっている。超対称変換のパラメータはグラビ
ティーノと同様のカイラリティをもち、以下で与えられる。

$$\text{IIA:} \quad \Gamma_{11}\epsilon_{\pm} = \mp\epsilon_{\pm}$$

$$\text{IIB:} \quad \Gamma_{11}\epsilon_{\pm} = \epsilon_{\pm}$$

グラビティーノの $O(d)\times O(d)$ 双対変換は超対称変換と整合的になるように決める。超対称変換は

$$\delta_-\Psi_{-M}=2\Big(\partial_M+\frac{1}{4}W^-_{MAB}\Gamma^{AB}\Big)\epsilon_-$$

であり、双対変換後のグラビティーノに対する超対称変換は

$$\begin{aligned}\delta_-\Psi'_{-M}&=2\Big(\partial_M+\frac{1}{4}W'^-_{(-)MAB}\Gamma^{AB}\Big)\epsilon'_-\\&=2\Big(\partial_N+\frac{1}{4}W^-_{NAB}\Gamma^{AB}\Big)Q_+^{-1N}{}_M\epsilon'_- \qquad \epsilon'_-=\epsilon_-\\&=(\delta_-\Psi_{-N})Q_+^{-1N}{}_M\\&=\delta_-(\Psi_{-N}Q_+^{-1N}{}_M)\end{aligned}$$

となる。ただし、フェルミオンの高次項は無視した。
従って、グラビティーノの双対変換は以下のようになる。

$$\Psi'_{-M}=\Psi_{-N}Q_+^{-1N}{}_M$$

Hassan(2000)

$$\Psi'_{+M}=U_+\Psi_{+N}Q_-^{-1N}{}_M,\qquad \epsilon'_+=U_+\epsilon_+$$

ディラティーノの $O(d)\times O(d)$ 双対変換も超対称変換と整合的になるように決める。超対称変換は

$$\delta_-\lambda_- = 2\Big\{(\partial_M\Phi)\Gamma^M + \frac{1}{12}H_{ABC}\Gamma^{ABC}\Big\}\epsilon_-$$

であり、双対変換後のディラティーノに対する超対称変換は

$$\begin{aligned}
\delta_-\lambda'_- &= 2\Big(\Gamma'^M_{(-)}\partial_M\Phi' + \frac{1}{12}\Gamma^{ABC}H'_{(-)ABC}\Big)\epsilon'_- + \cdots \\
&= 2\Big\{\Gamma^M\partial_M\Phi - \frac{1}{2}\Gamma^B E^A{}_M Q_-^{-1M}{}_N(S-R)^{NL}W^-_{LAB} \\
&\quad + \frac{1}{12}\Gamma^{ABC}H_{ABC} - \frac{1}{4}\Gamma^{ABC}E_{CM}Q_-^{-1M}{}_N(S-R)^{NL}W^-_{LAB}\Big\}\epsilon_- + \cdots \\
&= 2\Big(\Gamma^M\partial_M\Phi + \frac{1}{12}\Gamma^{ABC}H_{ABC}\Big)\epsilon_- - \frac{1}{2}\Gamma^C\Gamma^{AB}E_{CM}Q_-^{-1M}{}_N(S-R)^{NL}W^-_{LAB} + \cdots \\
&= \delta_-\big(\lambda_- - Q_-^{-1M}{}_N(S-R)^{NL}\Gamma_M\Psi_{-L}\big)
\end{aligned}$$

$$\epsilon'_- = \epsilon_-$$

となる。ただし、フェルミオンの高次項は無視した。
従って、ディラティーノの双対変換は以下のようになる。

$$\lambda'_- = \lambda_- - Q_-^{-1M}{}_N(S-R)^{NL}\Gamma_M\Psi_{-L}$$

$$\lambda'_+ = U_+\big(\lambda_+ + Q_+^{-1M}{}_N(S-R)^{NL}\Gamma_M\Psi_{+L}\big), \qquad \epsilon'_+ = U_+\epsilon_+$$

Hassan(2000)
+YH-Maeyama

グラビティーノは双対変換で'共変らしく'振る舞う。
一方でディラティーノの変換を変形すると

$$\begin{aligned}\lambda'_{\pm} &= U_{\pm}\{\lambda_{\pm} \pm G_{KM} Q_{\pm}^{-1M}{}_{N}(S-R)^{NL} E^{K}{}_{A}\Gamma^{A}\Psi_{\pm L}\} \\ &= U_{\pm}\{\lambda_{\pm} - E^{M}{}_{A}\Gamma^{A}\Psi_{\pm M} + Q_{\mp}^{-1L}{}_{N} Q_{\pm}^{N}{}_{M} E^{M}{}_{A}\Gamma^{A}\Psi_{\pm L}\} \\ &= U_{\pm}\{\lambda_{\pm} - E^{M}{}_{A}\Gamma^{A}\Psi_{\pm M} + E'^{M}_{(\pm)}{}_{A}\Gamma^{A}U_{\pm}^{-1}\Psi'_{\pm M}\} \\ &= U_{\pm}\{\lambda_{\pm} - E^{M}{}_{A}\Gamma^{A}\Psi_{\pm M}\} + E'^{M}_{(-)}{}_{A}\Gamma^{A}\Psi'_{\pm M} \qquad U_{-} = 1\end{aligned}$$

となる。従って、以下の組み合わせ

$$\Theta_{\pm} = \lambda_{\pm} - E^{M}{}_{A}\Gamma^{A}\Psi_{\pm M}$$

は双対変換で不変or共変となる。

$$\Theta'_{(-)\pm} = U_{\pm}\Theta_{\pm}$$

8. フェルミオン場の作用の双対不変形式

グラビティーノとディラティーノの2次までの項を双対不変な形で表すことを考える。まずディラティーノの運動項を含む

$$\overline{\Theta}_{\pm}\Gamma^{M}\partial_{M}\Theta_{\pm}$$

を考える。この項はLorentz scalarではないので、微分が共変微分となるように修正する。

$$\begin{aligned}
&\overline{\Theta}_{\pm}\Gamma^{M}\partial_{M}\Theta_{\pm} \pm \tfrac{1}{12}\overline{\Theta}_{\pm}\Gamma^{ABC}S^{\pm}_{ABC}\Theta_{\pm} \\
&= \overline{\Theta}_{\pm}\Gamma^{M}\left(\partial_{M} + \tfrac{1}{4}W^{\pm}_{MAB}\Gamma^{AB}\right)\Theta_{\pm} \pm \tfrac{1}{12}\overline{\Theta}_{\pm}\Gamma^{ABC}H_{ABC}\Theta_{\pm} \\
&= \overline{\Theta}_{\pm}\Gamma^{M}D_{M}\Theta_{\pm} \mp \tfrac{1}{24}\overline{\Theta}_{\pm}\Gamma^{ABC}H_{ABC}\Theta_{\pm}
\end{aligned}$$

双対変換を行うと

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Theta'}_{(-)\pm}\Gamma'^{M}_{(-)}\partial_M\Theta'_{(-)\pm} \pm \tfrac{1}{12}\overline{\Theta'}_{(-)\pm}\Gamma^{ABC}S'^{\pm}_{(-)ABC}\Theta'_{(-)\pm} \\
&= \overline{\Theta}_\pm U_\pm^{-1}\Gamma'^{M}_{(-)}\left(\partial_M + \tfrac{1}{4}W'^{\pm}_{(-)MAB}\Gamma^{AB}\right)U_\pm\Theta_\pm \pm \tfrac{1}{12}\overline{\Theta}_\pm U_\pm^{-1}\Gamma^{ABC}H'_{(-)ABC}U_\pm\Theta_\pm \\
&= \overline{\Theta}_\pm\Gamma'^{M}_{(\pm)}\left(\partial_M + \tfrac{1}{4}W'^{\pm}_{(\pm)MAB}\Gamma^{AB}\right)\Theta_\pm \pm \tfrac{1}{12}\overline{\Theta}_\pm\Gamma^{ABC}H'_{(\pm)ABC}\Theta_\pm \\
&= \overline{\Theta}_\pm\Gamma'^{M}_{(\pm)}\partial_M\Theta_\pm \pm \tfrac{1}{12}\overline{\Theta}_\pm\Gamma^{ABC}S'^{\pm}_{(\pm)ABC}\Theta_\pm \\
&= \overline{\Theta}_\pm\Gamma^{M}\partial_M\Theta_\pm \pm \tfrac{1}{12}\overline{\Theta}_\pm\Gamma^{ABC}S^{\pm}_{ABC}\Theta_\pm
\end{aligned}
$$

となるので、双対不変であることがわかる。同様な計算より

$$
\overline{\Psi}_{\pm M}G^{MN}\left(\partial_N + \tfrac{1}{4}W^{\pm}_{NAB}\Gamma^{AB}\right)\Theta_\pm = \overline{\Psi}^{M}_{\pm}D_M\Theta_\pm \mp \tfrac{1}{8}\overline{\Psi}^{M}_{\pm}H_{MAB}\Gamma^{AB}\Theta_\pm
$$

および

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Psi}_{\pm L}G^{LN}\Gamma^{M}\partial_M\Psi_{\pm N} \pm \tfrac{1}{12}\overline{\Psi}_{\pm L}G^{LN}\Gamma^{ABC}S^{\pm}_{ABC}\Psi_{\pm N} - \overline{\Psi}_{\pm L}G^{LN}\Gamma^{M}\Gamma^{\mp K}{}_{MN}\Psi_{\pm K} \\
&= \overline{\Psi}^{N}_{\pm}\Gamma^{M}D_M\Psi_{\pm N} \mp \tfrac{1}{24}\overline{\Psi}^{N}_{\pm}\Gamma^{ABC}H_{ABC}\Psi_{\pm N} \mp \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}_{\pm N}\Gamma_M H^{NMK}\Psi_{\pm K}
\end{aligned}
$$

も双対不変な組み合わせとなる。

フェルミオンの運動項を含む作用は、3つの項を組み合わせて

$$
Ee^{-2\Phi}\Big[\overline{\Theta}_\pm\Gamma^M D_M\Theta_\pm \mp \tfrac{1}{24}\overline{\Theta}_\pm\Gamma^{ABC}H_{ABC}\Theta_\pm + c_1\Big\{\overline{\Psi}^M_\pm D_M\Theta_\pm \mp \tfrac{1}{8}\overline{\Psi}^M_\pm H_{MAB}\Gamma^{AB}\Theta_\pm\Big\}
$$

$$
+ c_2\Big\{\overline{\Psi}^N_\pm\Gamma^M D_M\Psi_{\pm N} \mp \tfrac{1}{24}\overline{\Psi}^N_\pm\Gamma^{ABC}H_{ABC}\Psi_{\pm N} \mp \tfrac{1}{2}\overline{\Psi}_{\pm N}\Gamma_M H^{NMK}\Psi_{\pm K}\Big\}\Big]
$$

$$
= Ee^{-2\Phi}\Big[\overline{\lambda}_\pm\Gamma^M D_M\lambda_\pm - \overline{\lambda}_\pm\Gamma^M\Gamma^A D_M\Psi_{\pm A} - \overline{\Psi}_{\pm A}\Gamma^M\Gamma^A D_M\lambda_\pm + \overline{\Psi}_{\pm A}\Gamma^M\Gamma^{AB}D_M\Psi_{\pm B}
$$

$$
\mp \tfrac{1}{24}\overline{\lambda}_\pm\Gamma^{ABC}H_{ABC}\lambda_\pm \mp \tfrac{1}{12}\overline{\Psi}_{\pm D}\Gamma^{DABC}H_{ABC}\lambda_\pm \pm \tfrac{1}{24}\overline{\Psi}_{\pm D}\Gamma^{DABCE}H_{ABC}\Psi_{\pm E}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned}
&+ (2+c_1)\overline{\Psi}^M_\pm D_M\lambda_\pm - (2+c_1)\overline{\Psi}^M_\pm\Gamma^A D_M\Psi_{\pm A} + (1+c_2)\overline{\Psi}^A_\pm\Gamma^M D_M\Psi_{\pm A}\\
&\mp \tfrac{2+c_1}{8}\overline{\Psi}^M_\pm H_{MAB}\Gamma^{AB}\lambda_\pm \pm \tfrac{2+c_1}{8}\overline{\Psi}^M_\pm H_{MAB}\Gamma^{AB}\Gamma^C\Psi_{\pm C}\\
&\mp \tfrac{1+c_2}{24}\overline{\Psi}^N_\pm\Gamma^{ABC}H_{ABC}\Psi_{\pm N} \mp \tfrac{1+2c_2}{4}\overline{\Psi}_{\pm N}\Gamma_M H^{NMK}\Psi_{\pm K}\Big]
\end{aligned}}
$$

のように表される。$c_1 = -2,\ c_2 = -1$ とすればグラビティーの運動項を再現する。このとき、双対不変な作用はII型超重力理論の作用と一致する。（RR項は無視している。）

9. RR場と双対不変な作用について

超対称変換との整合性により、RR場の双スピノル形式

$$\mathcal{G} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} G^{(n)}_{M_1\cdots M_n} \Gamma^{M_1\cdots M_N}$$

IIA: $n = 2, 4, 6, 8$

IIB: $n = 1, 3, 5, 7, 9$

は、双対変換で以下のように振る舞う。

$$\mathcal{G}' = \sqrt{\mathrm{det} Q_-} U_+ \mathcal{G} \qquad E'^{\frac{1}{2}} \mathcal{G}' = U_+ E^{\frac{1}{2}} \mathcal{G}$$

Hassan(2000)

これより、RR場の運動項（pseudo action）は

Fukuma,Oota,Tanaka(2000)

Bergshoeff,Kallosh,Ortin,Roest,Van Proeyen(2001)

$$\frac{1}{2^6} E\,\mathrm{tr}(\Gamma^0 \mathcal{G}^T \Gamma^0 \Gamma_{11} \mathcal{G} \Gamma_{11}) = -E \sum_n \frac{1}{2 \cdot n!} G_{M_1\cdots M_n} G^{M_1\cdots M_n}$$

$$U_+^T \Gamma^0 = \Gamma^0 U_+^{-1}$$
$$\Gamma_{11} U_+ = U_+ \Gamma_{11}$$

のように双対不変な形式で表される。フェルミオンの2次は

$$E e^{-\Phi} \overline{\Theta}_+ \mathcal{G} \Theta_- \qquad E e^{-\Phi} \overline{\Psi}_{+M} \Gamma^N \mathcal{G} \Gamma^M \Psi_{-N}$$

が双対不変となる。

10. 結論と展望

- II型超重力理論を T^d コンパクト化したときに現れる $O(d,d)$ 双対変換のレビューを行った。

- $O(d)\times O(d)$ 変換を10次元massless場の変換として表し、双対不変な組み合わせを構築した。

- II型超重力理論の作用を双対不変な場を用いて再構築した。

- フェルミオンの4次の項についても同様な考察はできる。

- R^4 のような高次微分項を双対不変な形式で記述できるか？