# 高次対称性を持つブレーン場の有効理論

日高義将

YH, Kiyoharu  Kawana, JHEP 01 (2024) 016 (arXiv: 2310.07993)

共同研究者: 川名 清晴 (KIAS)

@京大素粒子論研究室 7/24

# 動機

## 自然界における広がった物体

### 粒子

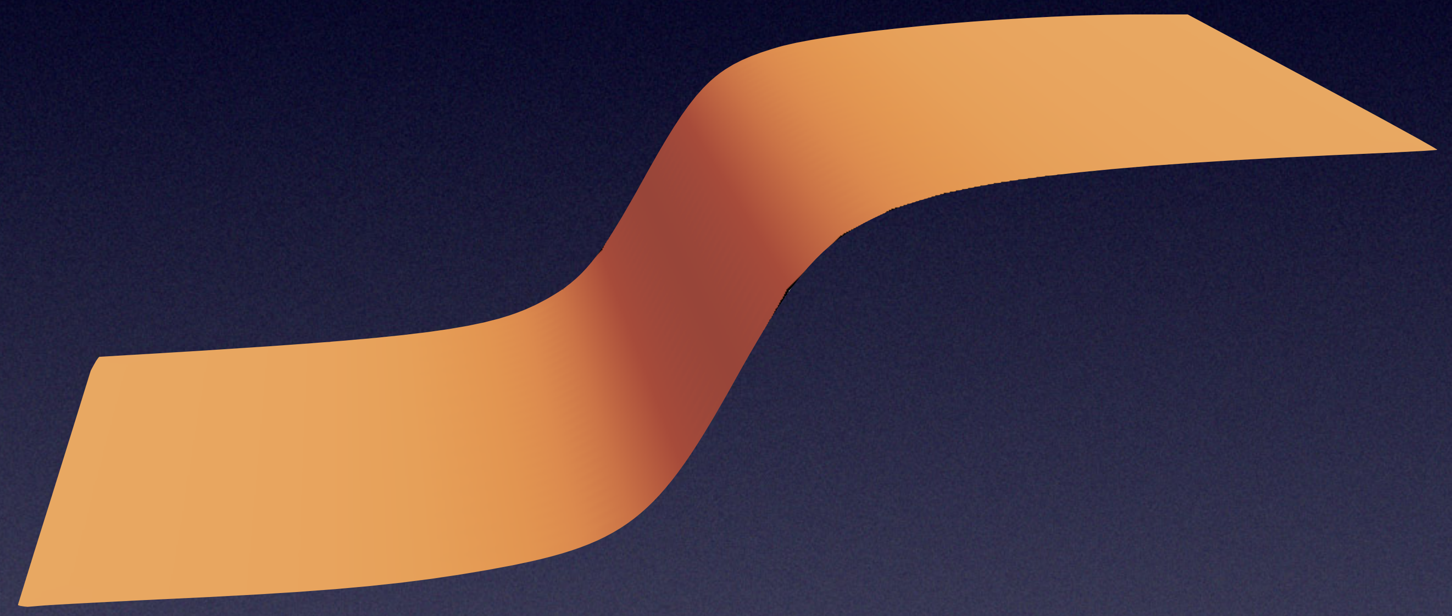
0次元物体

### 渦

1次元物体

### ドメインウォール

2次元物体

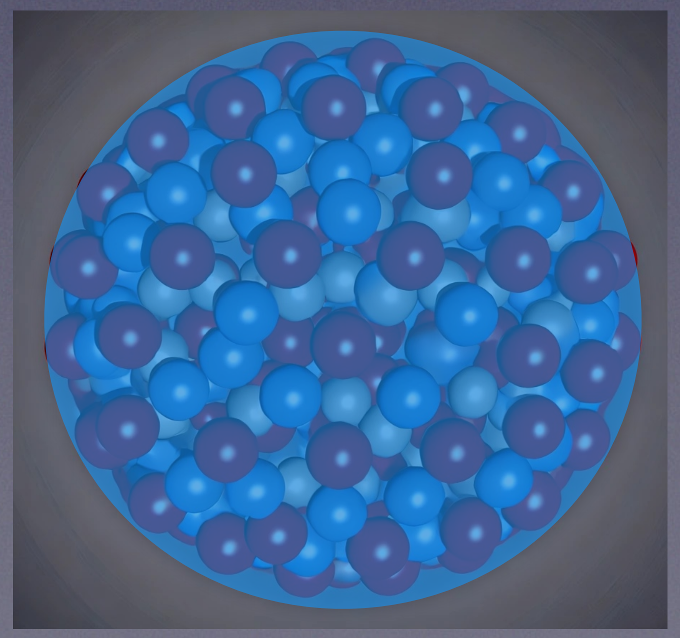


### 流体

3次元物体

### 大きい原子核

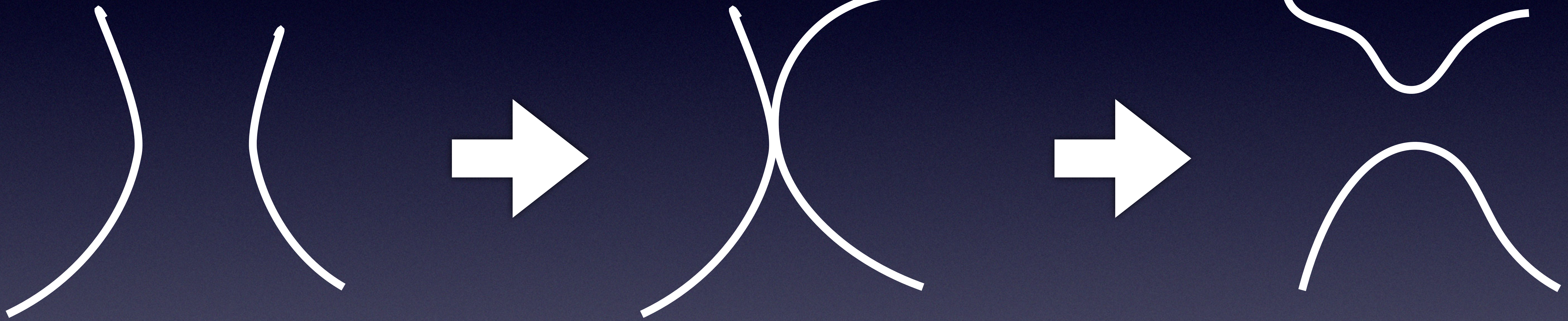
境界を持つ３次元物体



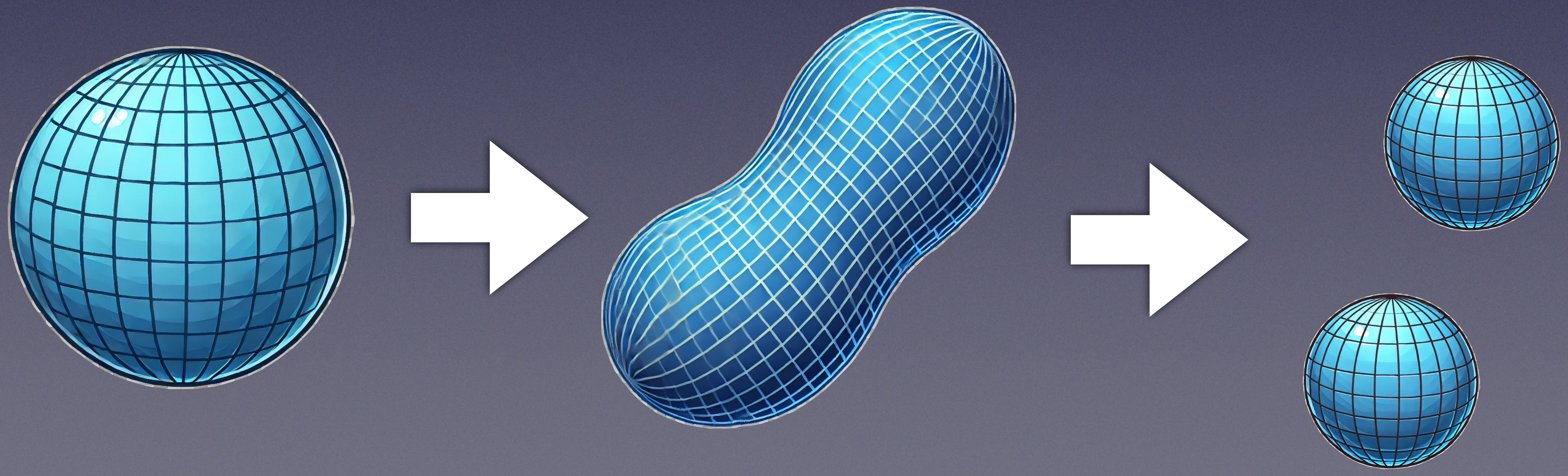
# 動機

## 広がりを持った物体の有効理論を考えたい

渦励起のダイナミクス



核分裂



相互作用する多体系の量子論

⇒量子場の理論(QFT)

広がった物体の多体系の量子論は何か？

⇒ブレーン場の理論(BFT)

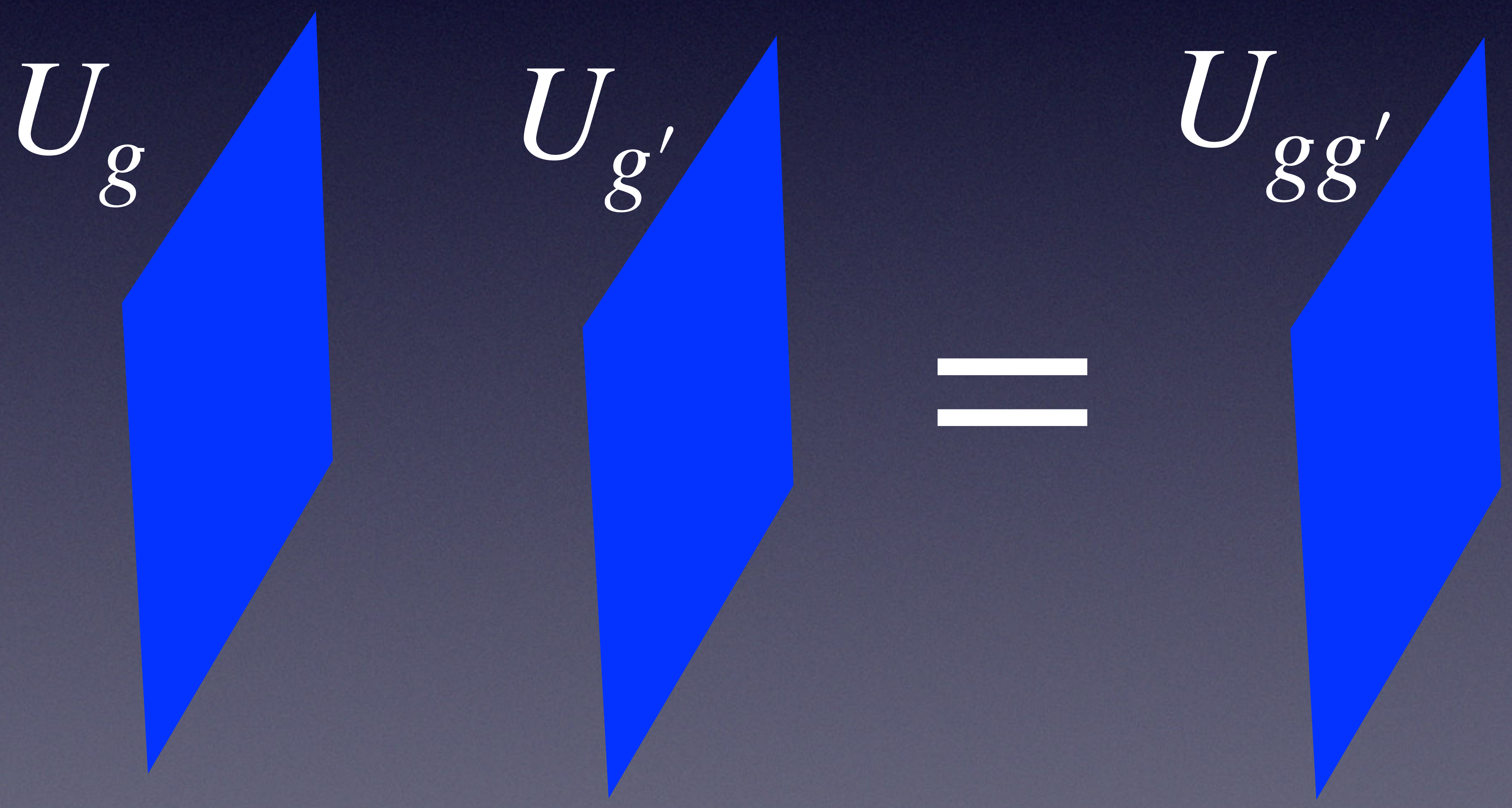
# 高次対称性とは何か？

# 一般化された対称性

Gaiotto，Kapustin，Seiberg, Willett, JHEP 1502 (2015) 172

## (d+1) 次元場の理論において

### 普通の対称性$G$は




群の積のルールを
満たす

$g, g' \in G$

$gg' \in G$

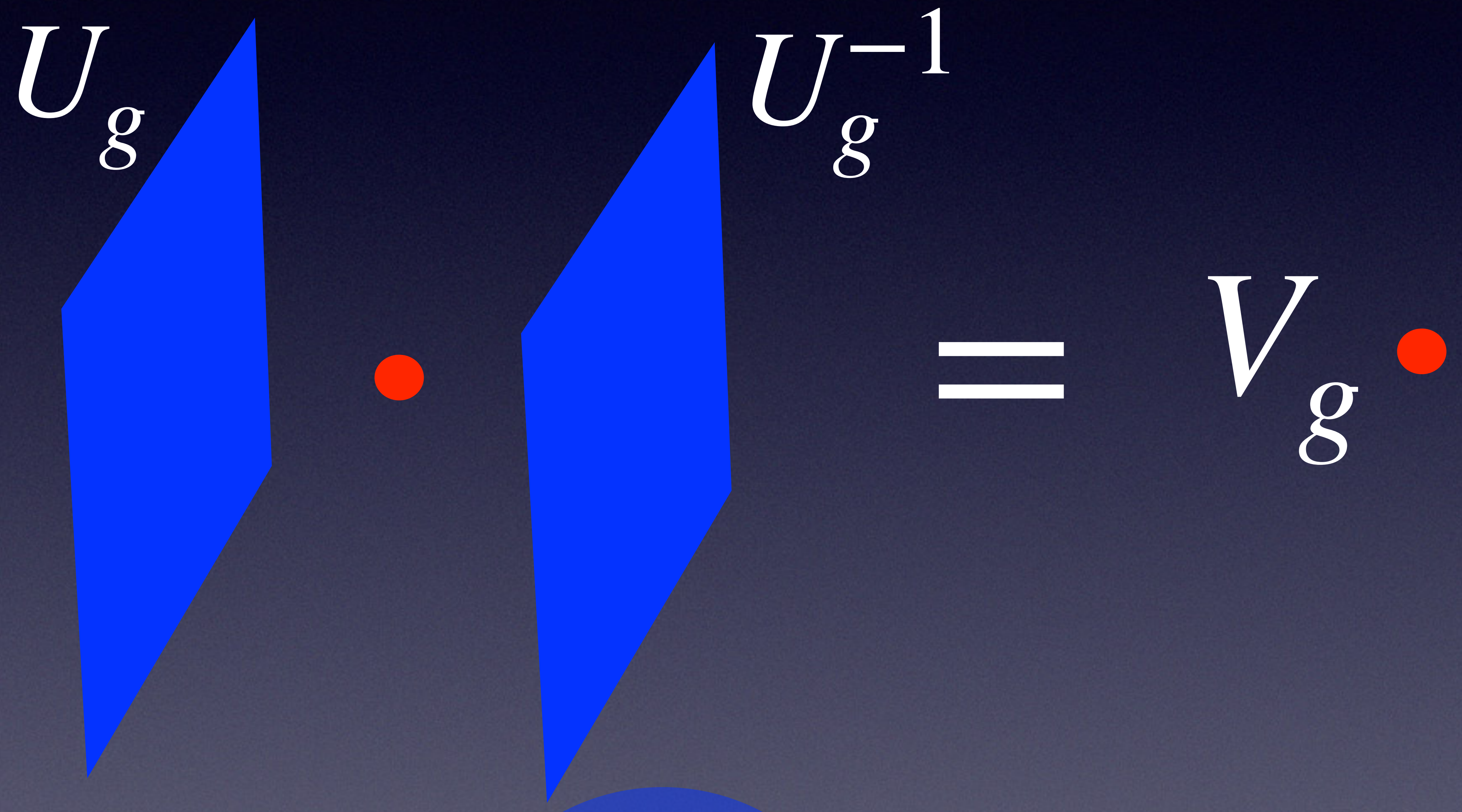
時間依存しない=トポロジカルな変形が可能

# 一般化された対称性

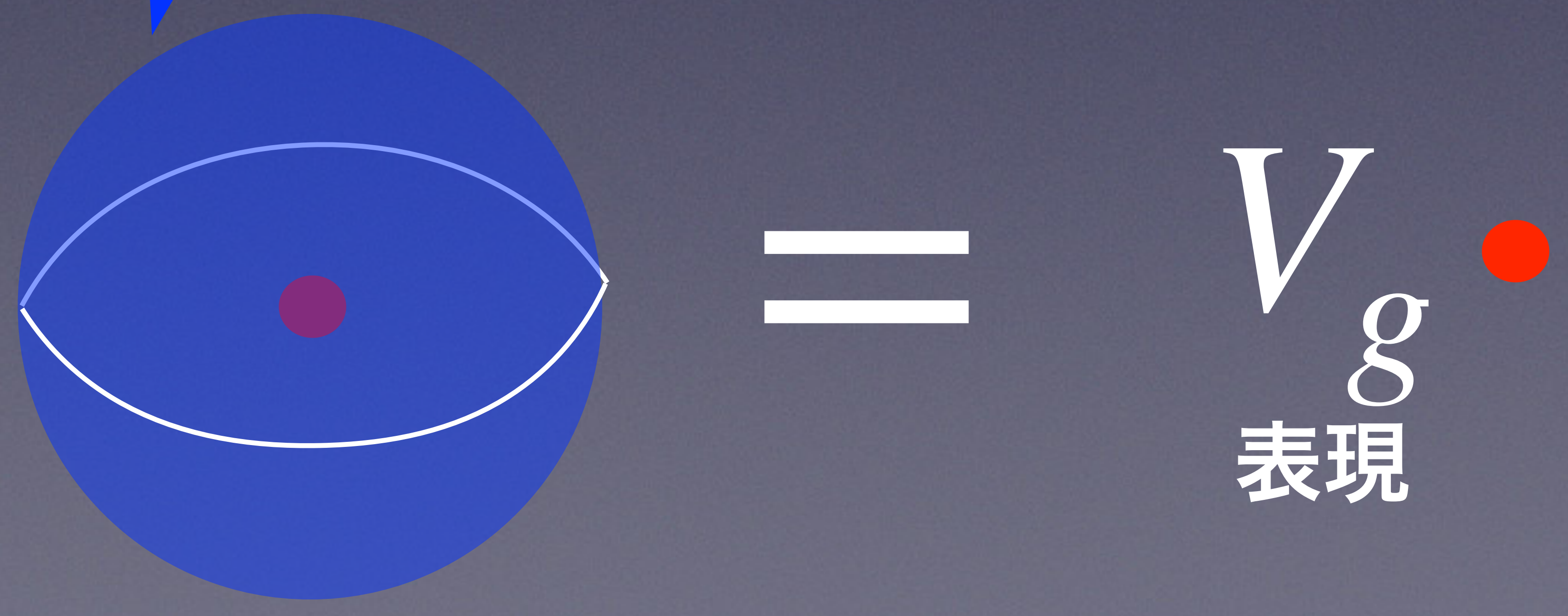
Gaiotto，Kapustin，Seiberg, Willett, JHEP 1502 (2015) 172

## (d+1) 次元場の理論において

対称性変換は $U_g \phi U_g^{-1} = V_g \phi$



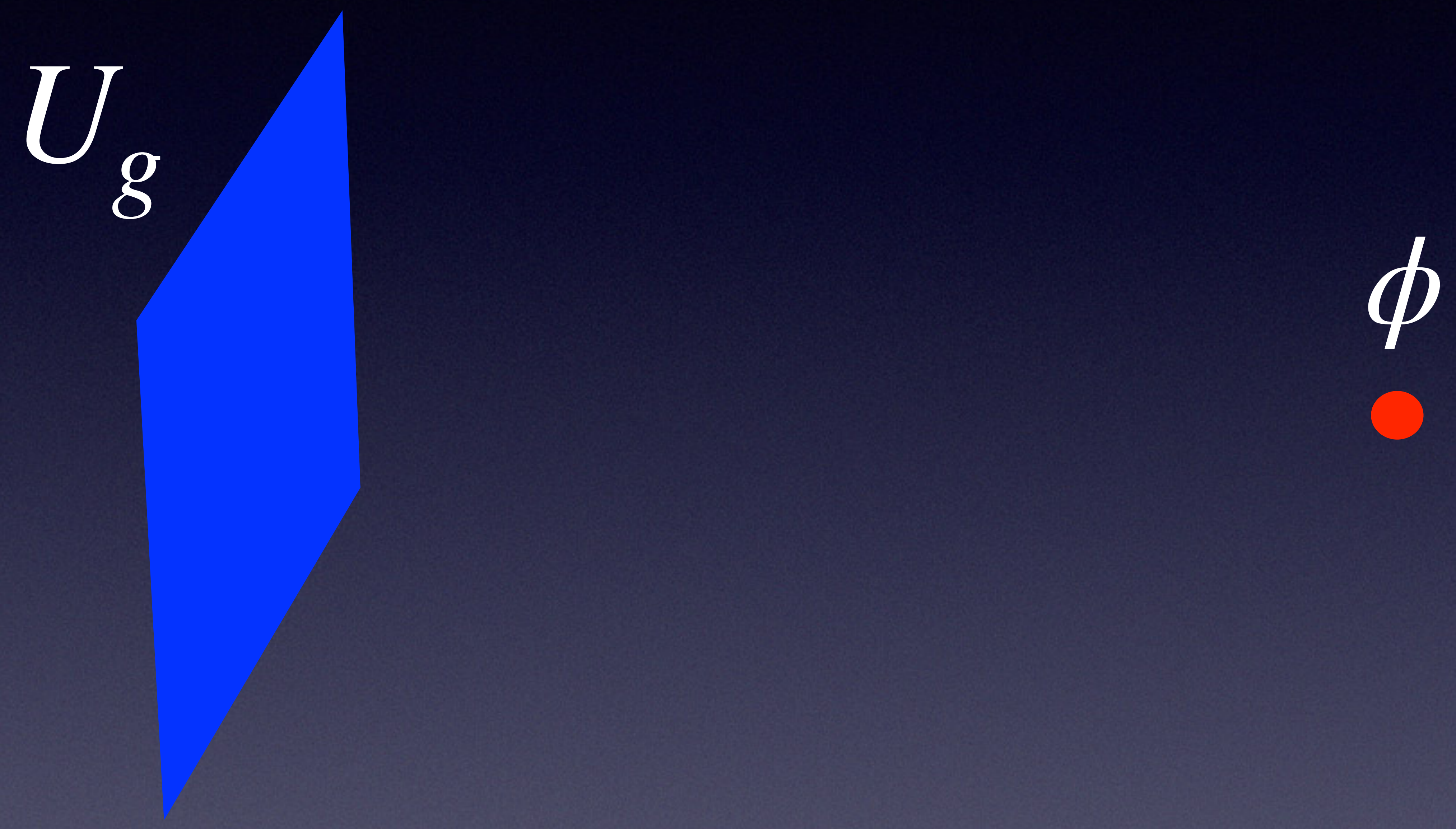

対称性演算子で囲むと
対称性変換を受ける



# 一般化された対称性

Gaiotto，Kapustin，Seiberg, Willett, JHEP 1502 (2015) 172

## (d+1) 次元場の理論において




### 対称性演算子

Gの要素でラベルされた

d次元の広がりを持った

トポロジカルな物体

### 荷電物体

0次元の広がりを持った物体(場)

対称性変換=荷電物体を

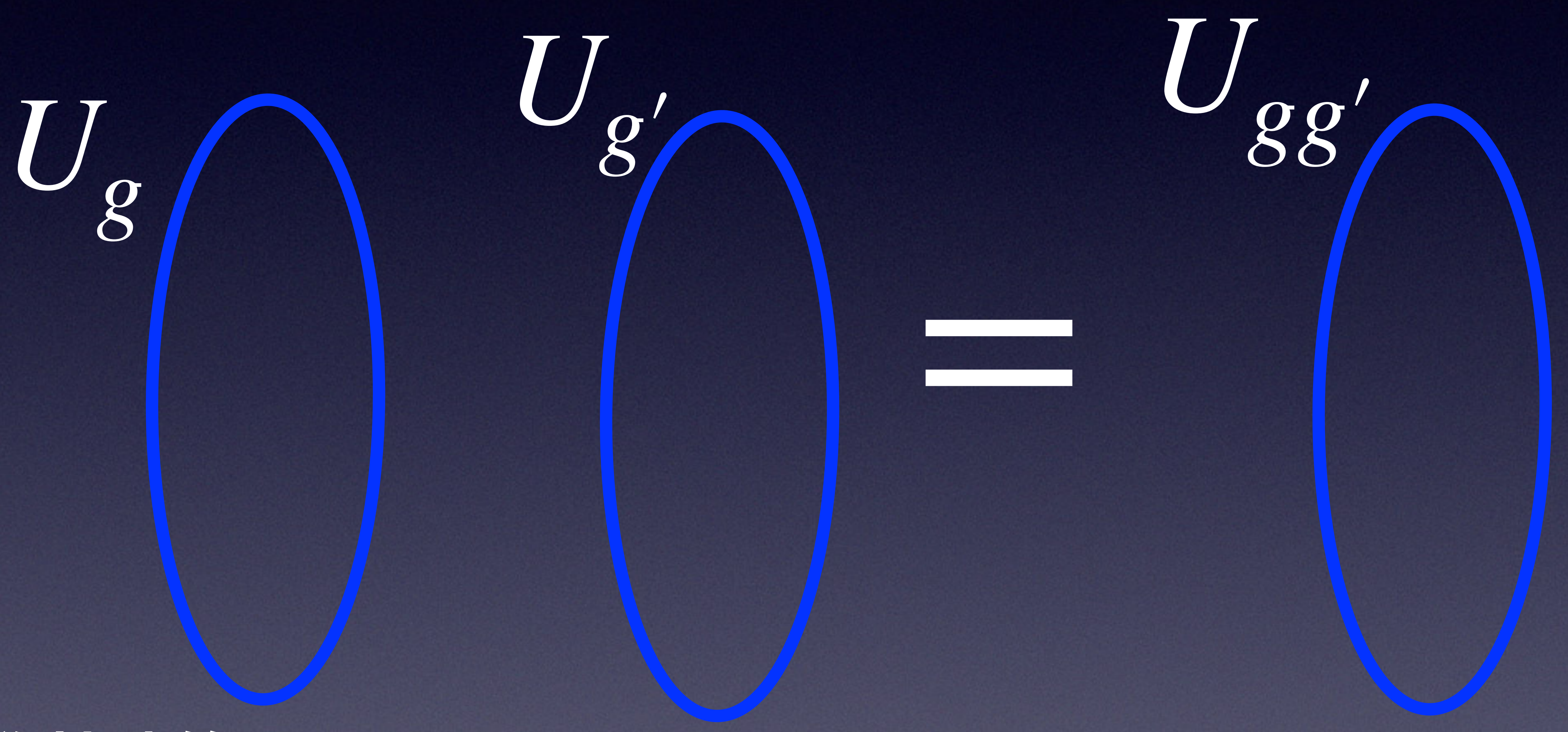
対称性演算子で囲む変換

# 一般化された対称性

Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett, JHEP 1502 (2015) 172

## (d+1) 次元場の理論において

## p次対称性 $G$




群の積のルール

$g, g' \in G$

$gg' \in G$

対称性演算子

(d-p)-次元的

電荷を持った物体

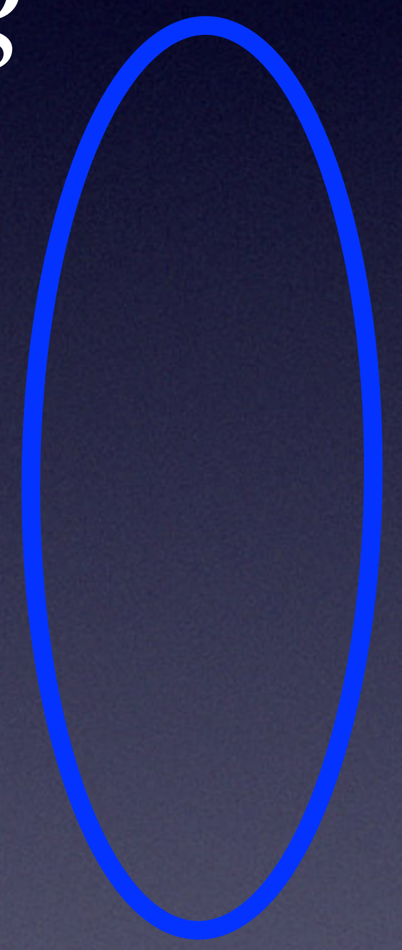
p次元的

# 一般化された対称性

Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett, JHEP 1502 (2015) 172

## (d+1) 次元場の理論においてp次対称性

$U_g$



**対称性演算子**

Gの要素でラベルされた
(d-p)次元の広がりを持った
トポロジカルな物体

$W$

**荷電物体**

p次元の広がりを持った物体(場)
対称性変換=荷電物体を
対称性演算子でリンクする変換

# 例: 電磁気

Gaiotto et al. ('15)

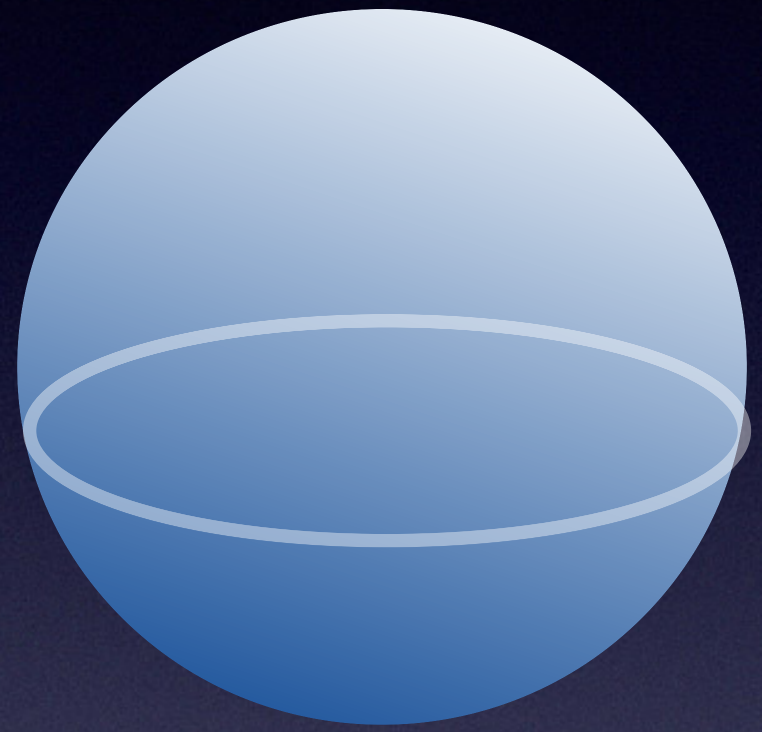
**荷電物体**

**Wilson ('t Hooft) ループ**

$$W = \exp\left[i \oint A_\mu dx^\mu\right]$$

$$H = \exp\left[i \oint \tilde{A}_\mu dx^\mu\right]$$

**電荷**



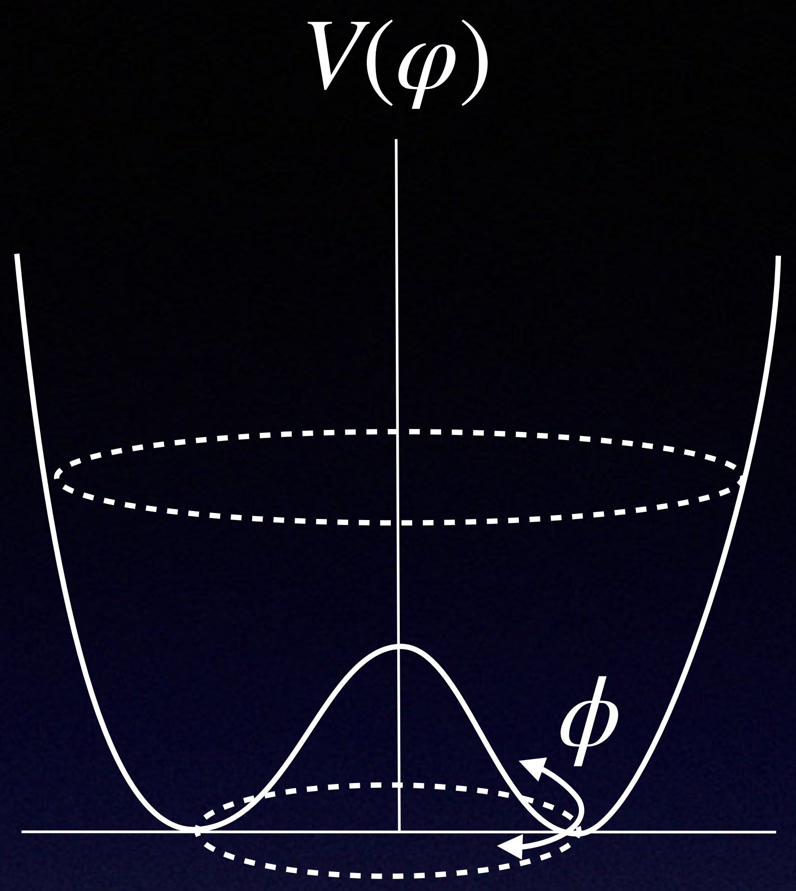
**面演算子**

**電気的:** $Q_e = \frac{1}{e^2}\int dS^i E^i$

**磁気的:** $Q_m = \frac{1}{2\pi}\int dS^i B^i$

**電束，磁束の保存が対称性**

# 例) 超流動




$$S = -\int d^4x \frac{v^2}{2}(\partial_\mu \phi)^2 = -\int \frac{v^2}{2} d\phi \star d\phi$$

**コンパクトスカラー:** $\phi \sim \phi + 2\pi$

# 保存則

$$d \star d\phi = 0 \qquad d(d\phi) = 0$$

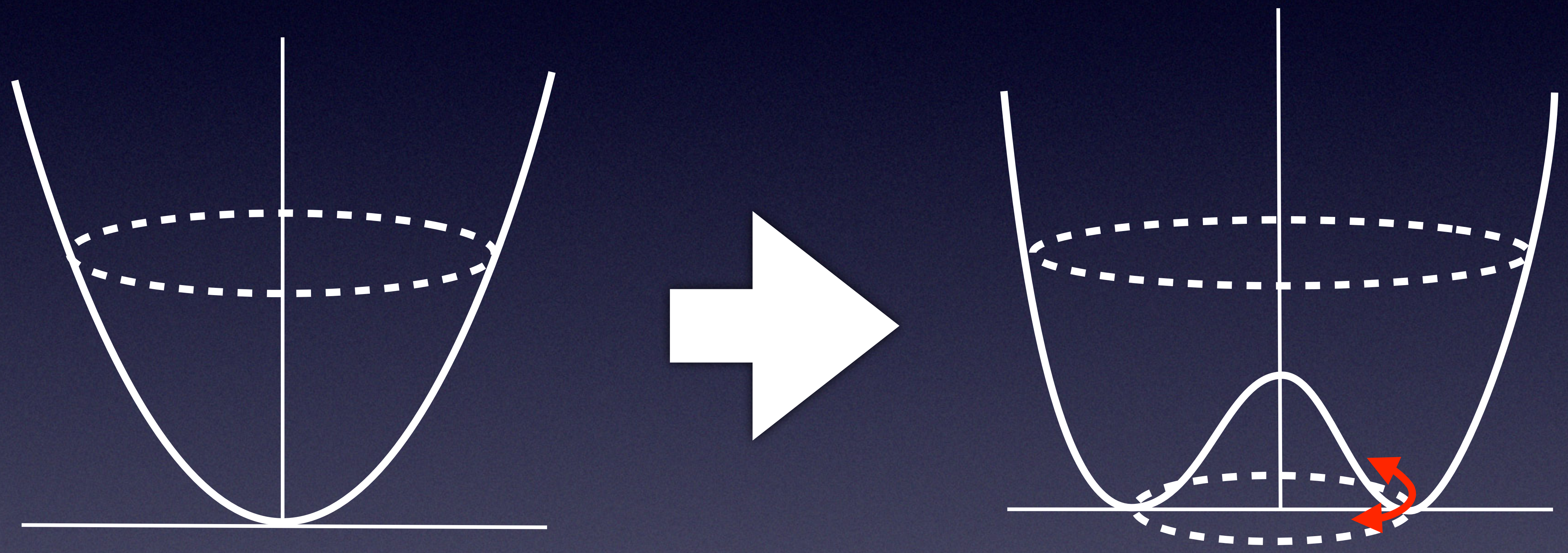
$U(1)^{[0]}_E \times U(1)^{[2]}_M$ **対称性**

 $U_E = e^{i\theta v^2 \int_V \star d\phi}$  $U_M = e^{i\frac{\theta_M}{2\pi}\int_C d\phi}$

• $e^{i\phi}$  $V$ **渦の世界面**

# BFTはどのように便利か？

対称性の破れに関するランダウ理論 (~ 平均場理論)は,
通常の物質を分類する



しかし，トポロジカル秩序を持った相は通常のLandau理論では扱えない

**BFTのLandau理論では，高次対称性の破れを使って**
**トポロジカル相を取り扱うことができる.**

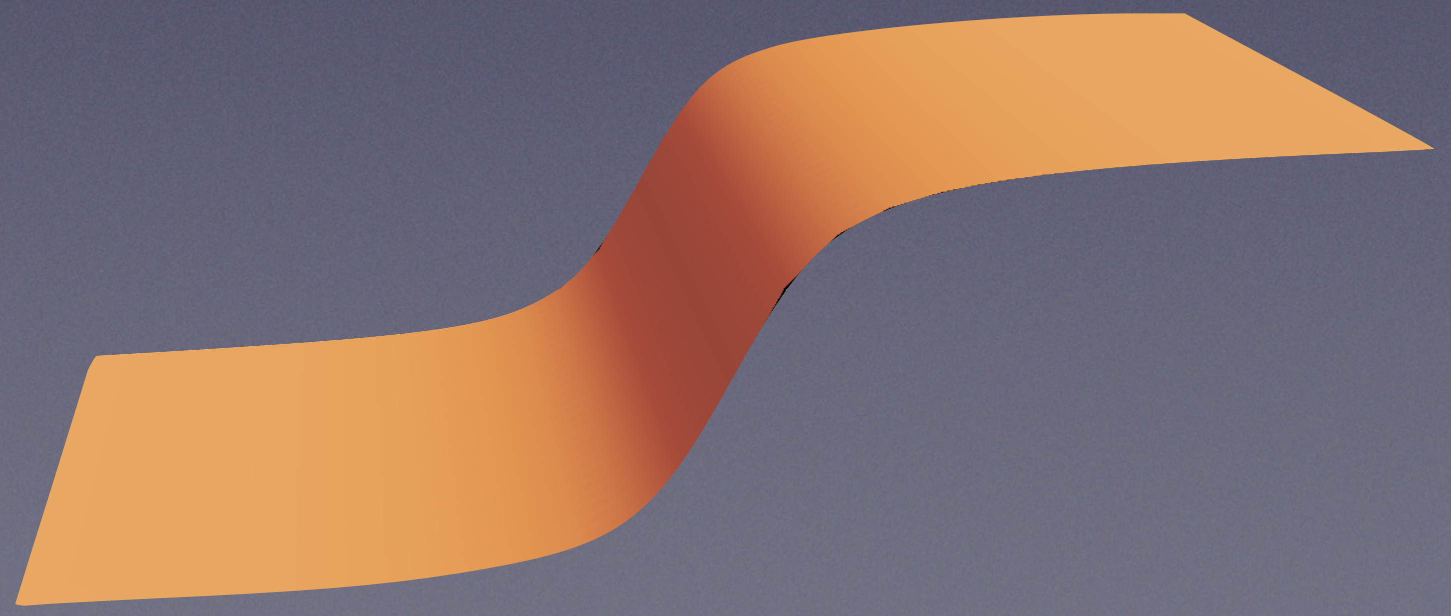
# 先行研究

**Mean string field theory: Landau-Ginzburg theory for 1-form symmetries**

by Nabil Iqbal, John McGreevy, SciPost Phys. 13, 114 (2022)

# 本研究 **YH, Kawana, JHEP 01 (2024) 016**

## Effective theory for p-dimensional objects with higher form symmetry



# アウトライン

- 動機
- 定式化
- 対称性の自発的破れとLandau理論
- まとめ

# 定式化

# 定式化

## 量子力学

自由度 $(\mathrm{pt} \to M) \simeq M$

時空多様体

$X^\mu$

## ブレーン量子力学

自由度 $(S_p \to M)$

$C_p = X^\mu(\xi)$

## QFT

自由度 $\psi : M \to T$

関数　ターゲット空間

## BFT

$\psi : (S_p \to M) \to T$

関数の関数=汎関数

# 定式化

## QFT

$$S = \int_M d^4x\mathscr{L} \qquad \mathscr{L} = -\frac{1}{2}|\partial_\mu\psi|^2 - V(|\psi|^2)$$

可能な時空点の和

## BFT

$$S = \int [dC_p]\mathscr{L} \qquad \mathscr{L} = -\frac{1}{\mathrm{Vol}[C_p]}\frac{1}{(p+1)!}\int d^p\xi\sqrt{h}\,|\partial_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\psi|^2 - V(|\psi|^2)$$

可能な関数の和

ここで，$\mathrm{Vol}[C_p] = \int d^p\xi\sqrt{h} \quad h_{ij} = g_{\mu\nu}(X)\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^i}\frac{\partial X^\nu}{\partial\xi^j}$

# どのような場を考えるか？

**Spacetime diffeomorphism:** $X^{\mu} \to X'^{\mu}(X)$

$$\psi'[C_p'] = \psi'[X'(\xi)] = \psi[X(\xi)] = \psi[C_p]$$

**Reparametrization :** $\xi^{i} \to \xi'^{i}(\xi)$

$$\psi'[C_p'] = \psi'[X(\xi')] = \psi[X(\xi)] = \psi[C_p]$$

**例:** $\psi[C_p] = \psi\left(\int_{C_p} d^p\xi\sqrt{h}A(X)\right)$

$A(X)$ **:スカラー関数**

**(一般には共変性を持った汎関数でも良い)**

# どういう微分を考えるか？

## 素朴には，微分 $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ ⇒ 汎関数微分 $\frac{\delta}{\delta X^\mu(\xi)}$

微分は

$$\delta f = \delta x^\mu \partial_\mu f = f(x+\delta x) - f(x) = \int_x^{x+\delta x} df = \int_{D_1} dx^\mu \partial_\mu f$$

$D_1$:$x$から$x+\delta x$までの線分

と書ける

一般化

$$\delta\psi[C_p] = \psi[C_p+\delta C_p] - \psi[C_p] =: \frac{1}{(p+1)!}\int_{D_{p+1}} dX^{\mu_1}\wedge\cdots dX^{\mu_{p+1}}\partial_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\psi[C_p]$$

$\partial D_{p+1} = \delta C_p$

area derivative

これは，$C_p$の無限小変化として ↓はゆるすが ↓は含めないことに対応

**例:** $\psi[C_p] = \int_{C_p} A_p$ **の時** $A_p = \frac{1}{p!} A_{\mu_1 \cdots \mu_p} dX^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dX^{\mu_p}$

$$\psi[C_p + \delta C_p] - \psi[C_p] = \int_{\partial D_{p+1} = \delta C_p} A_p = \int_{D_{p+1}} dA_p = \frac{1}{(p+1)!} \int_{D_{p+1}} dX^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dX^{\mu_{p+1}} F_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}$$

**より**

$$\Rightarrow \quad \partial_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}} \psi[C_p] = F_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}}$$

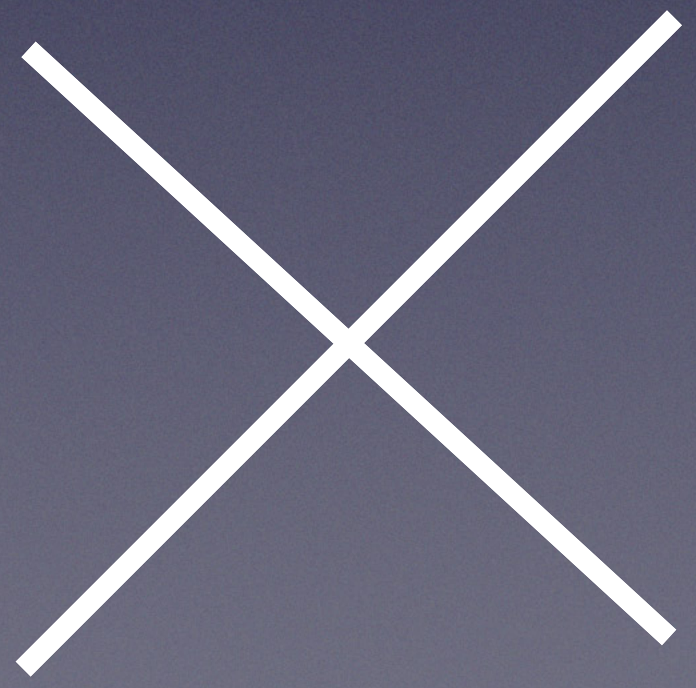
# どういう相互作用を考えるか？

## QFTでは例えば

$$\int d^{d+1}x\,|\,\psi(x)\,|^4$$

のような相互作用が
考えられる

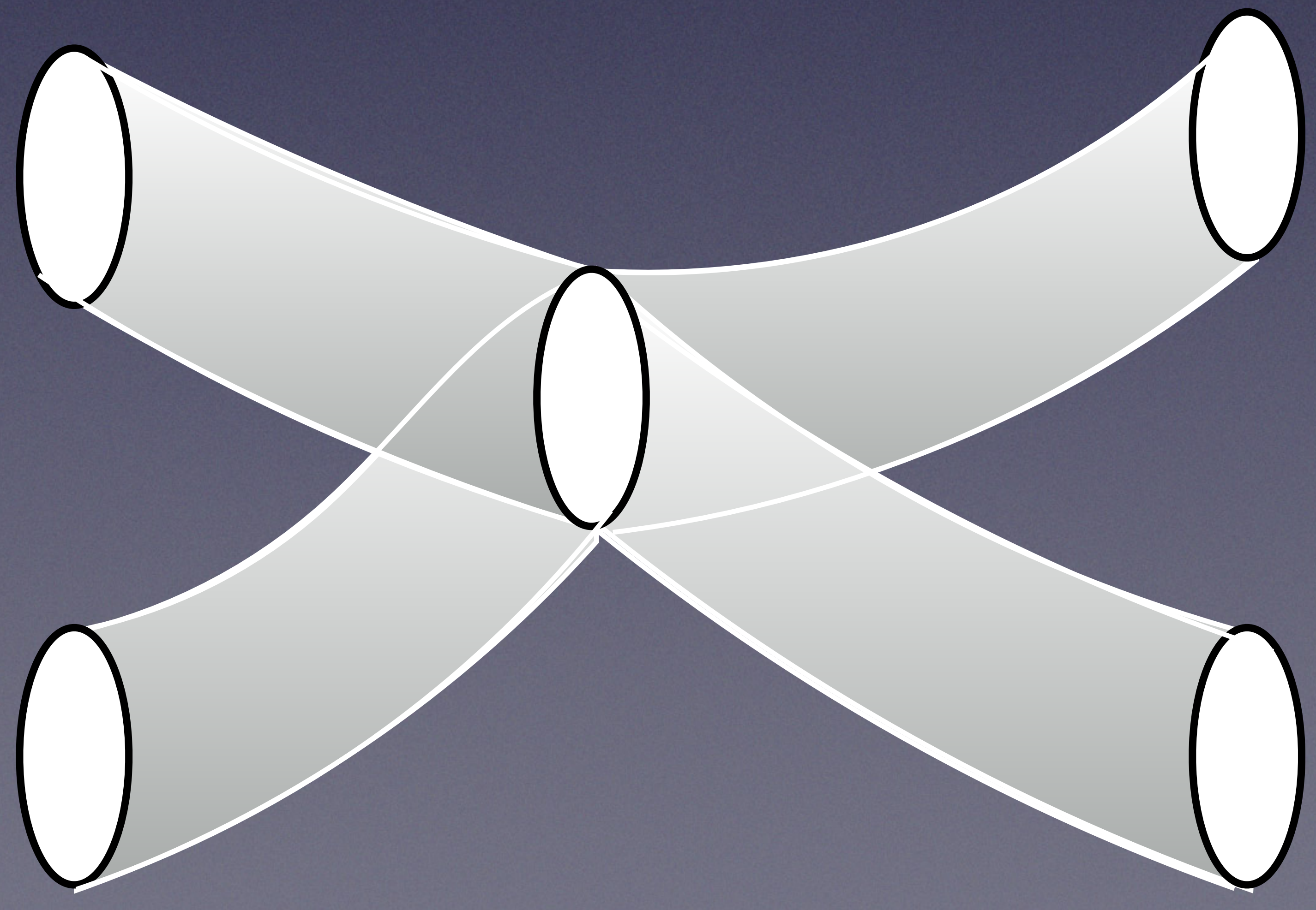
図で書くと



## 素朴な拡張

$$\int [dC_p]\,|\,\psi(C_p)\,|^4$$

本研究では,
このような相互作用を考える

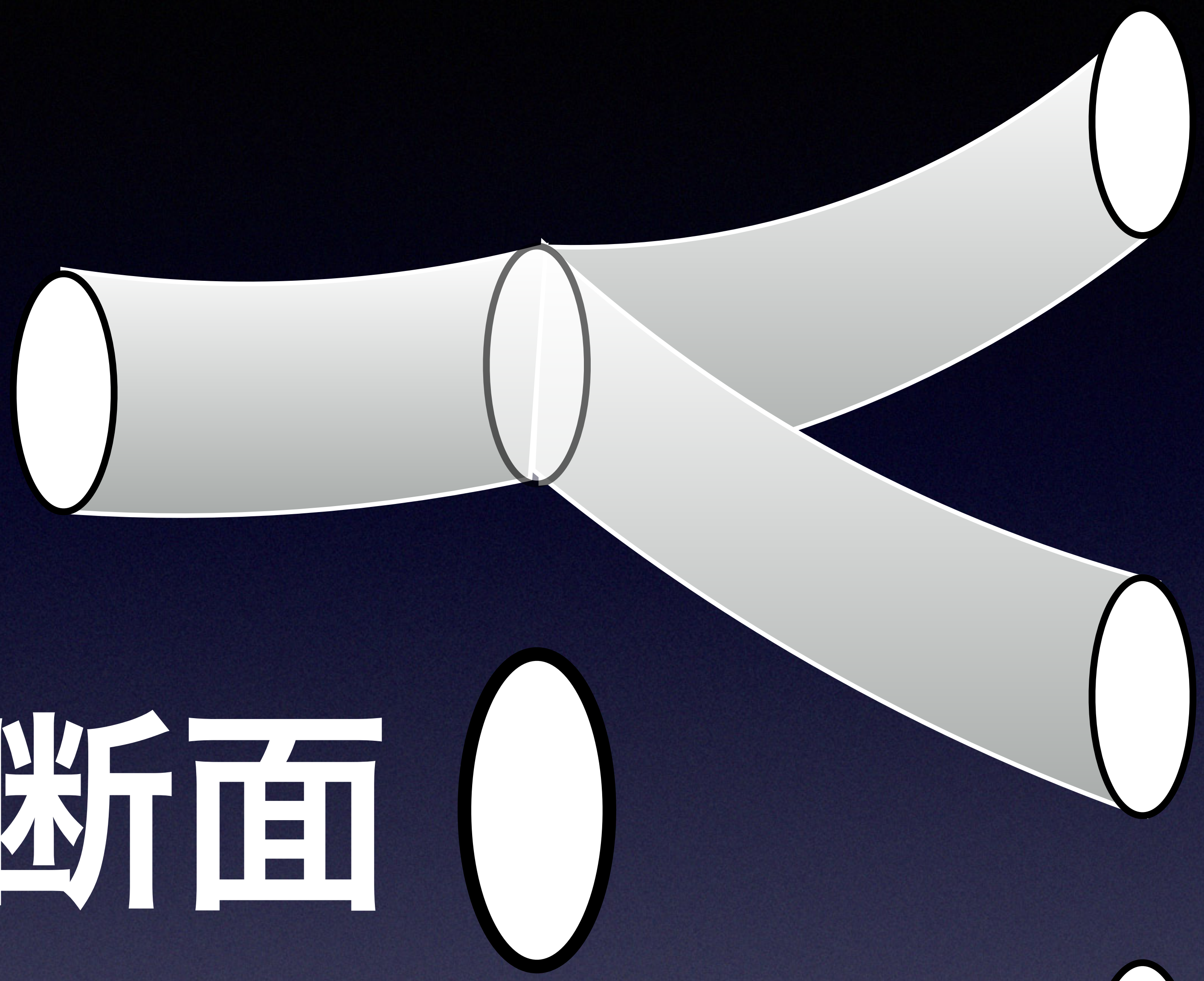


に対応

# 相互作用

本研究で使う作用

$$\int [dC_p]\psi^*(C_p)\psi^*(C_p)$$



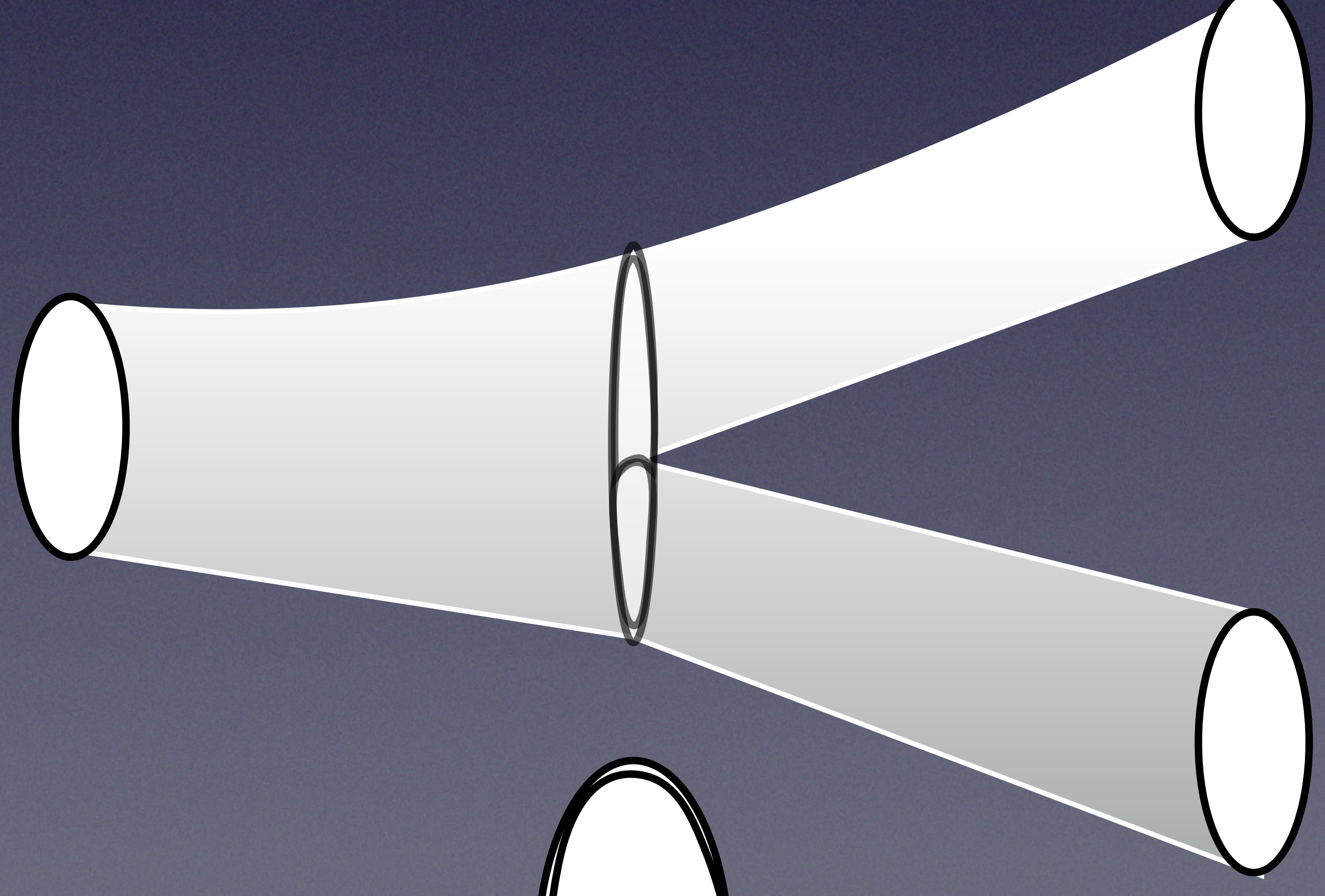
断面

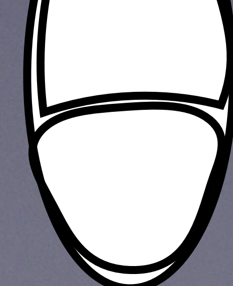
一般には

$$\int [dC_p^1][dC_p^2][dC_p^3]\ \delta(C_p^1 - C_p^2 - C_p^3)$$

$$\times\, \psi^*(C_p^3)\psi^*(C_p^2)\psi(C_p^1)$$

というのもありえる





# 作用

$$S=\int[dC_p]\Big[\frac{-1}{\mathrm{Vol}[C_p]}\frac{1}{(p+1)!}\int d^p\xi\sqrt{h}\,|\partial_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\psi|^2-V(|\psi|^2)\Big]$$

$$[dC_p]=\mathscr{D}Xe^{-T_p\mathrm{Vol}[C_p]}$$ $T_p$**:brane tension**

$U(1)$ $p$ 次対称性

$$\psi[C_p]\to e^{i\int_{C_p}\Lambda_p}\psi[C_p] \qquad d\Lambda_p=0$$

**Noetherカレント**

$$J_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}=-\int[dC_p]\frac{\delta(C_p)}{\mathrm{Vol}[C_p]}i(\psi^\dagger\partial_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\psi-\partial_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\psi^\dagger\psi) \qquad \delta(C_p)=\int d^p\xi\sqrt{-\frac{h}{g}}\delta(X-X(\xi))$$

# 背景ゲージ場との結合

**Area derivativeを共変微分にすれば良い**

$$\partial_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\psi \to D_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}\psi$$

$$D_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} = \partial_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} - iB_{\mu_1\cdots\mu_{p+1}}$$

**ゲージ対称性**

$$\psi[C_p] \to e^{i\int_{C_p}\Lambda_p}\psi[C_p] \qquad B_{p+1} \to B_{p+1} + d\Lambda_p$$

# 対称性の自発的破れと
# Landau 理論

# 対称性の自発的破れ

**0次対称性の破れ**

$$\lim_{x \to \infty} \langle \psi^\dagger(x)\psi(0)\rangle \simeq \langle \psi^\dagger(x)\rangle\langle\psi(0)\rangle \neq 0$$

**２点＝線分の境界**

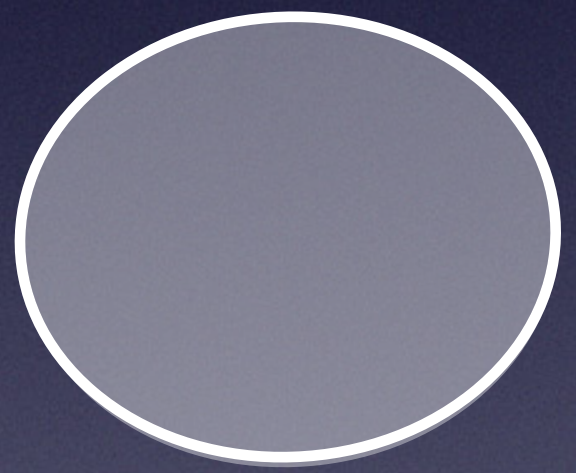
# Order parameters

**0次対称性の破れ**

$$\lim_{x\to\infty}\langle\psi^\dagger(x)\psi(0)\rangle \neq 0$$

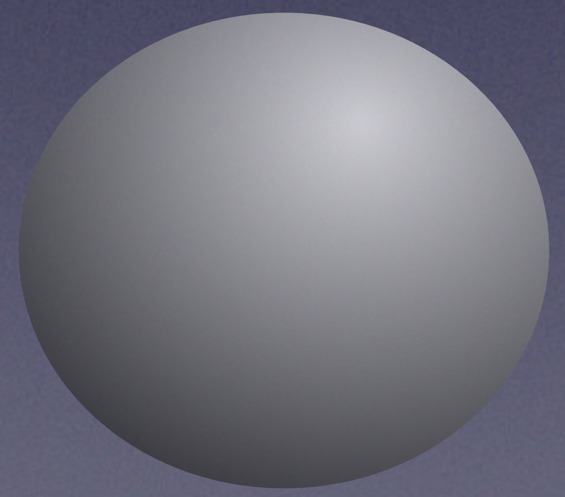
**1次対称性の破れ**

$$\lim_{C\to\infty}\langle\psi(C)\rangle \neq 0$$

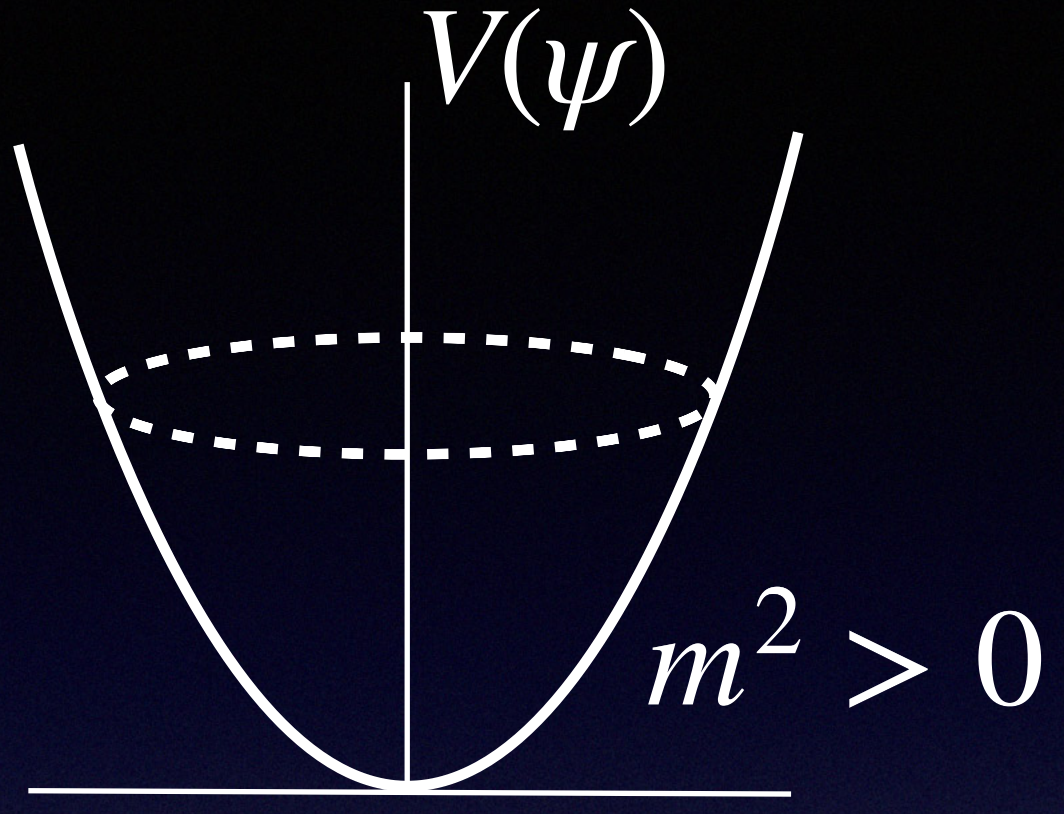


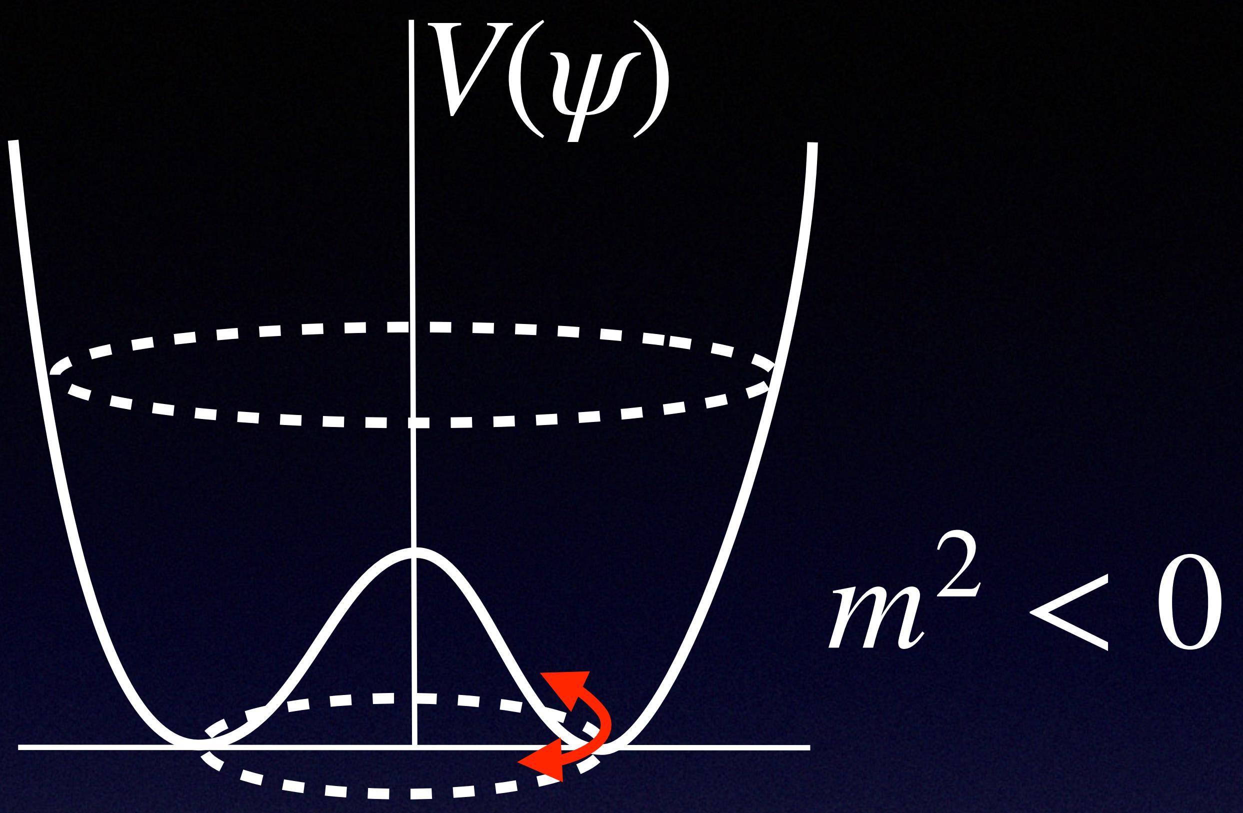
**p次対称性の破れ**

$$\lim_{C^p\to\infty}\langle\psi(C^p)\rangle \neq 0$$



# Landau理論(平均場近似)




**QFTの場合:** $U(1)$**対称性** $\psi \to e^{i\theta}\psi$

$$S = -|\partial_\mu \psi|^2 - V(\psi) \qquad V = m^2|\psi|^2 + \frac{1}{2}\lambda|\psi|^4$$

$$\delta S = 0 \implies \left.\frac{\partial V}{\partial f}\right| = (m^2 + \lambda|f|^2)f = 0 \implies \begin{array}{ll} m^2 > 0 & f = 0 \\ m^2 < 0 & f \neq 0 \end{array}$$

仮定
$\psi = f = \mathrm{const}$

# Landau理論(平均場近似)

$$S = \int [dC_p] \left[ \frac{-1}{\mathrm{Vol}[C_p]} \frac{1}{(p+1)!} \int d^p\xi \sqrt{h}\, |\partial_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}} \psi|^2 - V(|\psi|^2) \right]$$

$$V = m^2 |\psi|^2 + \frac{1}{2}\lambda |\psi|^4$$

平均場の仮定: $\psi = f(z = \mathrm{Vol}[M_{p+1}])/\sqrt{2} \quad \partial M_{p+1} = C_p$

$$S[f] = -\int_0^\infty dz g(z) \left[ \frac{1}{2}(f')^2 + V(f^2) \right] \quad g(z) = \int \mathscr{D}X e^{-T_p \mathrm{Vol}[C_p]} \delta(z - \mathrm{Vol}[M_{p+1}])$$

**BFT**

$\delta S = 0$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dz}\left(g(z) f'(z)\right) - g(z) \frac{\partial V}{\partial f} = 0 \Longrightarrow \begin{array}{ll} m^2 > 0 & f = e^{-\#\mathrm{Vol}[M_{p+1}]} \\ m^2 < 0 & f = \mathrm{const} \end{array}$$

**平均場で高次対称性の自発的破れが記述**

# 連続対称性の自発的破れにともなう
# 有効理論

## QFT(0-form)

$$\psi(x) = f e^{i\varphi(x)} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = -f^2 d\varphi \wedge \star d\phi + \cdots$$

## BFT

$$\psi = f e^{i\int_{C_p} A_p} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = -f^2 dA \wedge \star dA + \cdots$$

# 創発対称性

**QFT(0-form)** $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = -f^2 d\varphi \wedge \star d\phi + \cdots$

創発$(d-1)$ 対称性 $Q = \int d\varphi$

**BFT** $\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = -f^2 dA_p \wedge \star dA_p + \cdots$

創発$(d-1-p)$ 対称性 $Q = \int dA_p$

# $Z_N$ 対称性の破れに伴う有効理論

**QFT(0-form)**

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \frac{k}{2\pi}\varphi dC_d$$

**SSB**

創発$d$次対称性 $Q = \int \varphi$

**BFT**

$$\mathscr{L}_{\mathrm{eff}} = \frac{k}{2\pi}A_p \wedge dB_{d-p}$$

トポロジカル秩序

創発$(d-p)$ 次対称性 $Q = \int A_p$

# まとめ

- 高次対称性を持つ有効ブレーン場の理論(BFT)を提案
- BFTのLandau理論は，トポロジカル秩序も記述可能

# 展望

- ループ補正
- 臨界現象
- 核分裂への応用