高次対称性とギャップレス・フラクトン相

[arXiv:2207.00854]

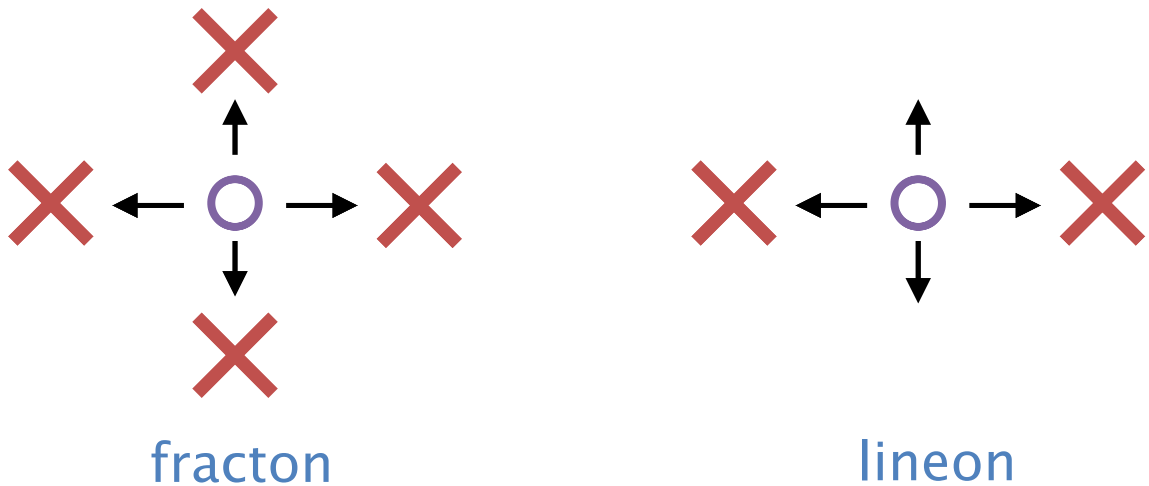
広野雄士

共同研究者

Minyoung You, Stephen Angus (APCTP), Gil Young Cho (POSTECH)

フラクトンとは？

- 移動方向に制限を持つ粒子



- フラクトン相: フラクトンを持つ相
  - “Beyond Landau order” の一種と言われている
- Plan of the talk
  - Review of フラクトン
  - 高次対称性とギャップレス・フラクトン相

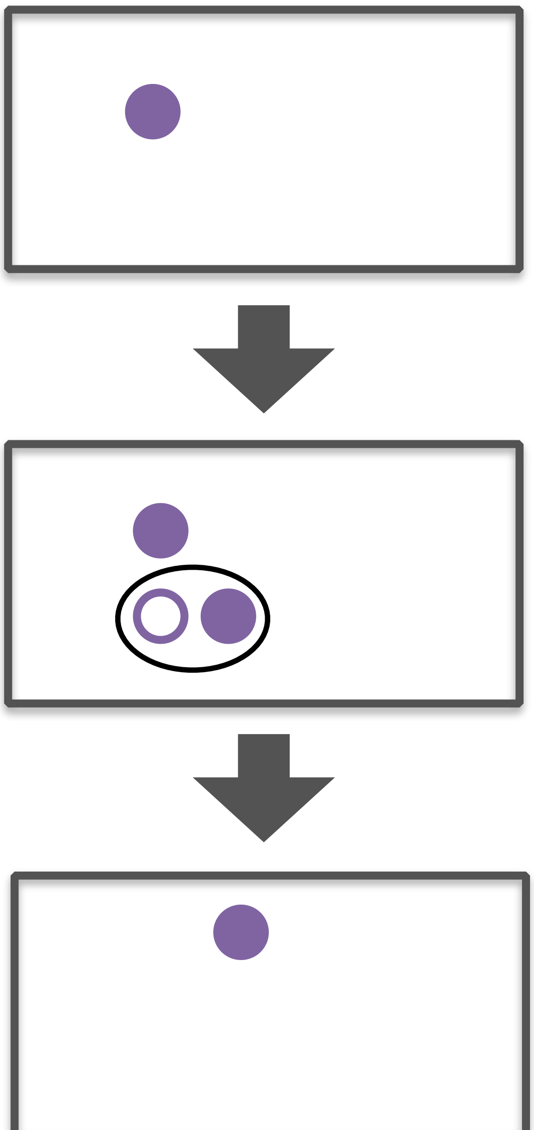
フラクトン相

- Gapped: ‘fracton order’
  - e.g.) X–cube model, foliated field theory, …
    - #GS = $2^{2(L_x+L_y+L_z)-3}$
- Gapless
  - e.g.) 2次元格子の位相欠陥(disclination)
  - 高階対称テンソルゲージ理論による記述

移動制限を実装する方法

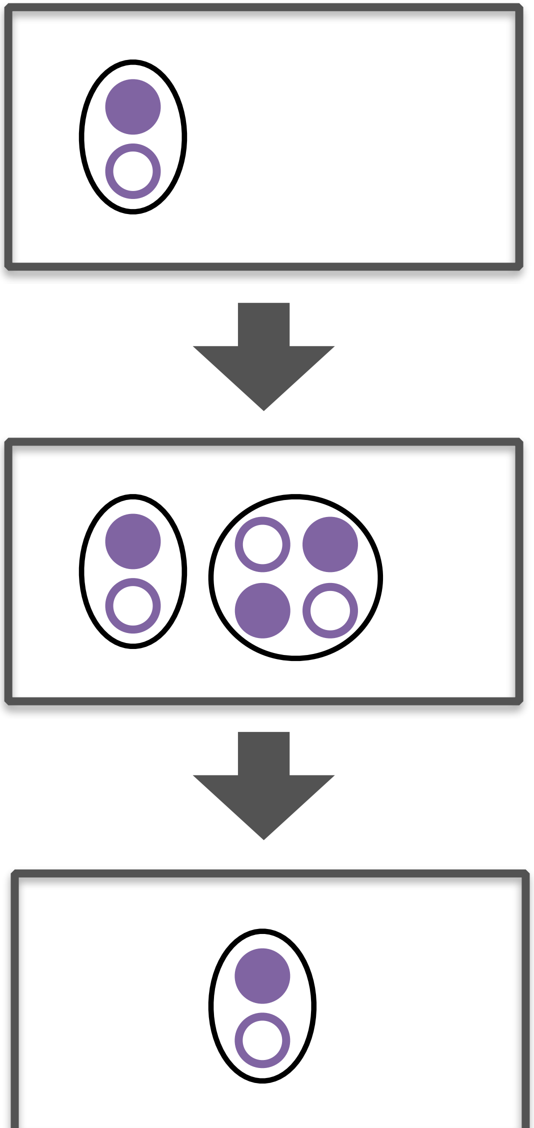
- Subsystem 対称性 [Vijay-Haah-Fu, PRB'16] [Williamson, PRB’16], …
  - $\phi(t,x,y) \mapsto \phi(t,x,y) + c^x(x) + c^y(y)$
- Polynomial shift 対称性 [Gromov, PRX’19], …
  - $\phi \mapsto \phi + c_i x^i + c_{ij} x^i x^j + \cdots$
  - 保存量: 多重極子モーメント [Pretko, PRB’17], …
    - 双極子, 四重極子, …
- Non-Riemannian geometry [Angus-Kim-Park ’21], …
  - Degenerate metric

移動方向の制限と多重極子モーメント保存



- U(1)電荷を持った粒子を動かすには、双極子を吸収・放出する必要がある
- 双極子モーメントの保存を課すと、U(1)電荷は動けなくなる

移動方向の制限と多重極子モーメント保存



- さらに双極子を動けなくしたければ、四重極子モーメント保存を課せばよい

Higher-rank gauge theories

- 自由度: (空間について)高階の対称テンソルゲージ場

  e.g. A_{ij} with $A_{ij} = A_{ji}$

- いくつかのバリエーション: [Pretko, PRB’17], …
  - Scalar charge gauge theory
  - Vector charge gauge theory
  - …

- 多重極子モーメント保存を実現

Scalar charge gauge theory

- ゲージ場: $\{\phi, A_{ij}\}$ $\quad A_{ij}$ は対称: $A_{ij} = A_{ji}$

- ゲージ変換 $\quad A_{ij} \mapsto A_{ij} + \partial_i \partial_j \Lambda \qquad \phi \mapsto \phi - \partial_t \Lambda$

- “電場 & 磁場”

$$E_{ij} = -\partial_t A_{ij} - \partial_i \partial_j \phi \qquad B_{il} = \epsilon_{ijk} \partial_j A_{kl} \qquad (B \neq B^T)$$

- Lagrangian $\quad \mathscr{L} = \frac{1}{2e^2} E_{ij} E_{ij} - \frac{1}{2e^2} B_{ij} B_{ij}$

- ソースへの結合 $\quad \mathscr{L}_{\mathrm{cpl}} = \phi \rho + A_{ij} J_{ij}$

Scalar charge gauge theory

- 運動方程式

$$\nabla \cdot E \cdot \overleftarrow{\nabla} = \rho \qquad \partial_t E = \frac{1}{2}\left(\nabla \times B + B \times \overleftarrow{\nabla}\right) + J$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad \partial_t B = -\nabla \times E$$

- 励起: 5個のギャップレスモード(空間3次元)、 $\omega \sim k$

- 保存電荷

$$Q = \int_V \rho \qquad Q^i = \int_V x^i \rho$$

$$Q' = \int_V \vec{x}^2 \rho$$ for traceless theory ($A_i^i = 0$)

Vector charge gauge theory

- ゲージ場: $\{\phi_i, A_{ij}\}$ A_{ij} は対称: $A_{ij} = A_{ji}$
- ゲージ変換

$$\phi_i \mapsto \phi_i - \partial_t \Lambda_i \qquad A_{ij} \mapsto A_{ij} + \partial_{(i}\Lambda_{j)}$$

- 電場 & 磁場

$$E_{ij} = -\partial_t A_{ij} - \partial_{(i}\phi_{j)} \qquad B_{il} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}\partial_j\partial_m A_{kn}$$

- Lagrangian

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2e^2}E_{ij}E_{ij} - \frac{1}{e^2}B_{ij}B_{ij}$$

- ソースへの結合

$$\mathscr{L}_{\mathrm{cpl}} = \overrightarrow{\phi} \cdot \vec{\rho} + A_{ij}J_{ij}$$

Vector charge gauge theory

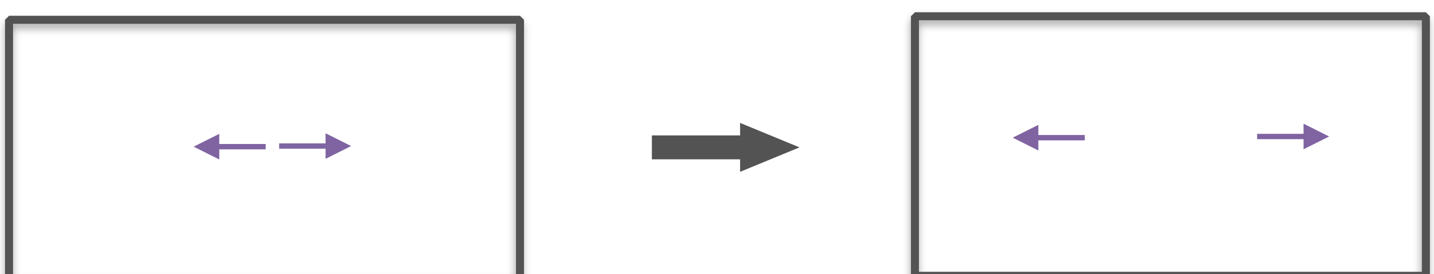
- 運動方程式

$$\nabla \cdot E = \vec{\rho} \qquad \partial_t E = \nabla \times B \times \overleftarrow{\nabla} + J$$

$$\nabla \cdot B = 0 \qquad \partial_t B = - \nabla \times E \times \overleftarrow{\nabla}$$

- 励起: 3 つのギャップレスモード(空間3次元), $\omega \sim k^2$

- 保存電荷 $\vec{q} = \int_V \vec{\rho} \qquad \vec{Q} = \int_V \vec{x} \times \vec{\rho}$



電荷ベクトルに沿ってしか動けない

$\longrightarrow$ lineon

ギャップレス・フラクトン相

- 高階の対称テンソルゲージ場で書かれる
- ギャップレスモードが存在
- 摂動に対して安定　[Rasmussen-You-Xu, 1601.08235]
- 疑問
  1. 「保存電荷」は dynamical なゲージ場に結合しているので、グローバル対称性ではないが、真の対称性は何か？
  2. U(1) ゲージ理論の photon は U(1) 1-form 対称性の SSB に伴う NG モードと思える。higher-rank gauge theory のギャップレスモードの由来は？
  3. 様々な higher-rank gauge theory が有り得るが、guiding principleは？
  4. これらの相の model-independent な特徴づけは？
  5. Higgsing により “fracton order”を実現できるか？
  6. 何故 lattice elasticity の理論にフラクトンが存在するのか？

高次対称性

[Gaiotto–Kapustin–Seiberg–Willett ’15]

- 電荷を持つ物体が**高次元**
  - “p-form 対称性” → p-次元物体が電荷を持つ

0–form symmetry　　1–form symmetry

- 荷電物体　$W(C_p)$　C_p は p次元閉多様体
- 対称性演算子　$U_g(M_{D-p-1})$　$g \in G$　M_{D-p-1} は $(D-p-1)$次元閉多様体

  M_{D-p-1} と C_p が 一度リンクしているとき、

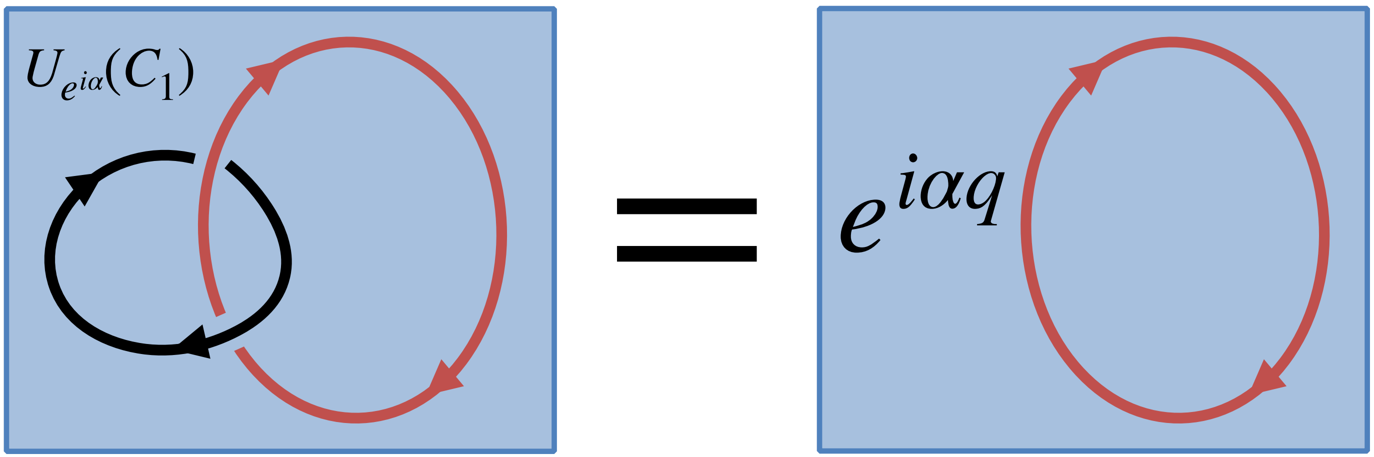
$$\langle U_g(M_{D-p-1}) W(C_p) \cdots \rangle = \langle R_g \cdot W(C_p) \cdots \rangle$$

- $U(1)^{[p]}$ 対称性:　$W(C_p) \to e^{i\alpha} W(C_p)$

高次対称性

[Gaiotto–Kapustin–Seiberg–Willett ’15]

- 例: $U(1)$ 1-form 対称性 in 2+1 dim.



- 対称性に関わる様々な概念が一般化されている
  - 高次対称性の自発的破れ
    - 物質相の特徴付けに使える
    - 離散 → トポロジカル秩序
    - 連続 → 南部・ゴールドストーンモード

non-uniform な高次対称性

- ギャップレス・フラクトン相は、non-uniform な高次対称性がSSBした相
    - non-uniform: 保存電荷が並進と可換でない連続高次対称性

$$[P_\mu, Q] \neq 0$$

    - 例) 時空対称性 (回転・ブースト) (0-form 対称性)

- Q がP_μ と非可換でも、対称性演算子 $U(M) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha Q(M)}$ は topological
    - ローカルな保存則が成立しているため

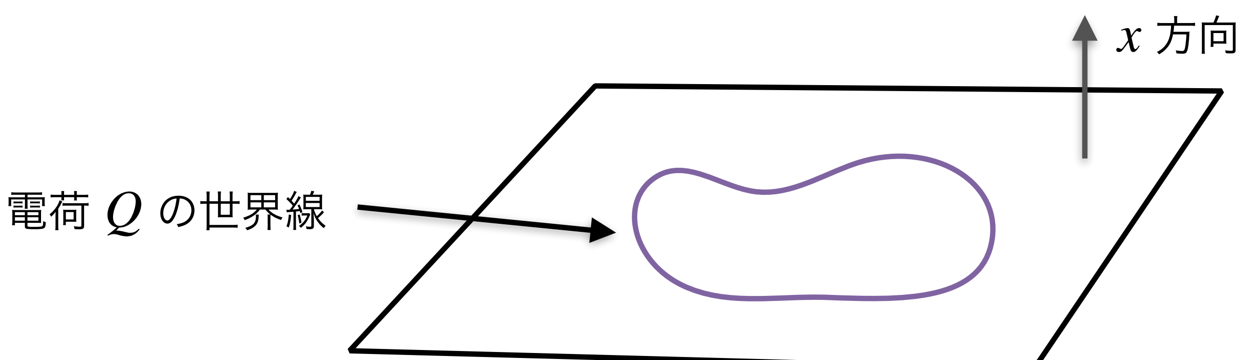
ギャップレス・フラクトン相の有効理論の構成法

- まず、「フラクトンの存在」を「粒子の世界線の配位に制限がある」と解釈。
従って、1-form 対称性のある理論を考える。

- 例えば、電荷 Q を持つ粒子の世界線を x 方向に動けないようにしたい場合には、
$$[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$$
を満たすような 1-form 対称性の電荷 Q' を導入する。

- 1-form 対称性 Q と Q' が自発的に破れた理論を考える(上記の代数を満たす 0-form 電荷に結合するゲージ場の理論)。

- 得られた理論では、電荷 Q の Wilson line が x 軸に垂直な面にしか置けない = x 方向に動けない



ギャップレス・フラクトン相の有効理論の構成法

- この構成では、移動方向の制限は保存電荷と P_i との交換関係によりコントロールされている。

- 電荷の組 (Q, Q_i)　　交換関係: $[\mathrm{i}P_i, Q_j] = \delta_{ij} Q$

$Q = [\mathrm{i}P_x, Q_x] = [\mathrm{i}P_y, Q_y] = [\mathrm{i}P_z, Q_z] \longrightarrow Q$ はいずれの方向にも動けない

＝フラクトン

低エネルギーで scalar charge gauge theory に帰着

- 電荷の組 (q_i, Q_i)　　交換関係: $[\mathrm{i}P_i, Q_j] = \epsilon_{ijk} q_k$

$q_z = [\mathrm{i}P_x, Q_y] = -[\mathrm{i}P_y, Q_x] \longrightarrow q_z$ は z 方向にしか動けない

charge vector $\mathbf{q}$ の粒子は $\mathbf{q}$ の方向にしか動けない

低エネルギーで vector charge gauge theory に帰着

例: $[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$

- カレント $j_\nu(x)$ が $[\mathrm{i}P_\mu, j_\nu(x)] = \partial_\mu j_\nu(x)$ を満たすとき $j_\nu(x)$ は uniform と言う
- Q, Q' で生成される 0-form 対称性をまず考える: $Q = \int_V \star j \qquad Q' = \int_V \star K$
- 代数 $[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$ を満たすためには、$\star K = \star k - x \star j$

$\star j, \ \star k$ は uniform なカレント

実際、 $[\mathrm{i}P_x, Q'] = \int_V (\partial_x \star k - x \partial_x \star j) = \underbrace{\int_V \partial_x(\star k - x \star j)}_{=0} + \int_V \star j = Q$

c.f. 回転不変性に対する保存カレント

$$[\mathrm{i}P_i, J_{jk}] = -\delta_{ij}P_k + \delta_{ik}P_j \qquad (J_{ij})^\mu = x_i T^\mu{}_j - x_j T^\mu{}_i$$

- 保存則 $\quad \mathrm{d} \star j = 0$

$$\mathrm{d} \star K = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{d} \star k = \mathrm{d}x \wedge \star j$$

例: $[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$

- 保存則 $\mathrm{d} \star j = 0$ $\mathrm{d} \star k = \mathrm{d}x \wedge \star j$
- ゲージ場への結合 $\mathscr{L}_{\mathrm{cpl}} = a \wedge \star j + a' \wedge \star k$
- ゲージ変換 $a \mapsto a + \mathrm{d}\Lambda + \underline{\Lambda' \mathrm{d}x}$ Q のゲージ場が Q' のゲージ変換で変換

  $a' \mapsto a' + \mathrm{d}\Lambda'$
- ゲージ不変な field strength $f = \mathrm{d}a - \mathrm{d}x \wedge a'$ $f' = \mathrm{d}a'$
- pure gauge theory $$\mathscr{L} = -\frac{1}{2e^2} f \wedge \star f - \frac{1}{2(e')^2} f' \wedge \star f'$$

例: $[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$

- $[\mathrm{i}P_x, Q'] = Q$ に従う 1-form 対称性 Q, Q' を持つ

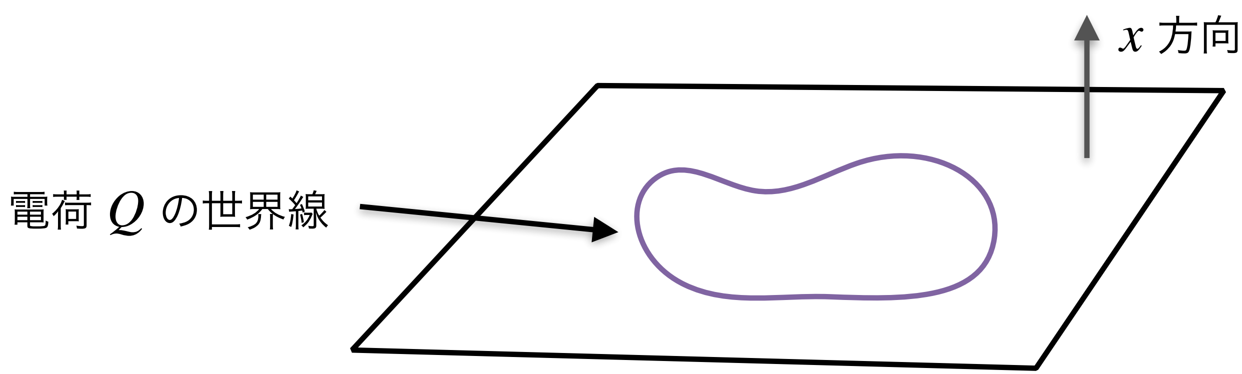
- Wilson line $\quad W(C) = \exp \mathrm{i} \int_C a \qquad W'(C) = \exp \mathrm{i} \int_C a'$

- ゲージ変換の下で、

$$W(C) \mapsto W(C)\, \exp \mathrm{i} \int_C \mathrm{d}x \Lambda'$$

ループ C が x が constant の面内にあればゲージ不変

$\Rightarrow$ Q は x 方向に動けない



Scalar charge gauge theory from 1-form SSB

Theory with a $U(1)$ & dipole charges

- Charges $\quad Q \quad$ $U(1)$ charge

  $\{Q_i\}_{i=1\ldots3}$ dipole charges

$$[\mathrm{i}P_i, Q_j] = -\delta_{ij}Q$$

- 保存則 $\quad \mathrm{d}\star j = 0 \qquad \mathrm{d}\star K_i = 0$

$$Q(V) = \int_V \star j \qquad Q_i(V) = \int_V \star K_i$$

- Dipole current は右の形を取る: $\quad \star K_i = \star k_i + x_i \star j$

$j = j_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu,\ k_i = (k_i)_\mu \mathrm{d}x^\mu$ は uniform current

$$[\mathrm{i}P_i, Q_j(V)] = \int_V \left[\partial_i(\star k_j) + x_j\,\partial_i(\star j)\right] = \int_V \left[\partial_i(\star k_j + x_j \star j) - (\partial_j x_i)\star j\right]$$

$$= -\delta_{ij}Q(V)$$

Theory with a $U(1)$ & dipole charges

- カレント保存則 $\quad \mathrm{d} \star j = 0 \qquad \mathrm{d} \star k_i + \mathrm{d}x_i \wedge \star j = 0$

- ゲージ場への結合 $\quad \mathscr{L}_{\mathrm{cpl}} = a \wedge \star j + \mathscr{A}_i \wedge \star k_i$

where $\quad a = a_\mu \, \mathrm{d}x^\mu \qquad \mathscr{A}_i = (\mathscr{A}_i)_\mu \, \mathrm{d}x^\mu$

- 保存則を再現するためには、次のゲージ変換が必要

$$\delta a = \mathrm{d}\Lambda - \Sigma_i \, \mathrm{d}x^i \qquad \delta \mathscr{A}_i = \mathrm{d}\Sigma_i$$

- Gauge-invariant field strengths

$$f = \mathrm{d}a + \mathscr{A}_i \wedge \mathrm{d}x^i \qquad \mathscr{F}_i = \mathrm{d}\mathscr{A}_i$$

Scalar charge gauge theory

- Gauge-invariant field strengths $f = \mathrm{d}a + \mathscr{A}_i \wedge \mathrm{d}x^i \qquad \mathscr{F}_i = \mathrm{d}\mathscr{A}_i$
- Lagrangian $\mathscr{L} = -\dfrac{1}{2e^2} f \wedge \star f - \dfrac{1}{2g^2} \mathscr{F}_i \wedge \star \mathscr{F}_i$
- 以下の成分は massive: $(\mathscr{A}_{[i})_{j]} \quad (\mathscr{A}_i)_0$

$$\mathscr{L} \supset \mathscr{A}_i \wedge \mathrm{d}x^i \wedge \star\left(\mathscr{A}_j \wedge \mathrm{d}x^j\right)$$

通常の対称性における“inverse Higgs 現象”の高次対称性版

[Ivanov-Ogievetsky '75] [Low-Manohar '02] [Nicolis-Penco-Rosen '14]

- 低エネルギーでは scalar charge gauge theory を再現
  - ゲージ場 a の空間成分は dipole gauge tr. により 0 に取れる

$$\delta a_i = \partial_i \Lambda - \Sigma_i$$

  - 残りのゲージ場 $\{a_0, (\mathscr{A}_{(i})_{j)}\}$

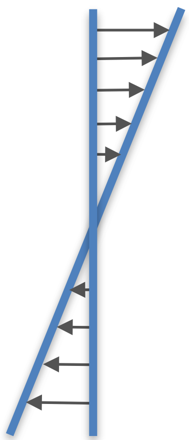
Gauge tr. $\delta a_0 = \partial_0 \Lambda, \quad \delta(\mathscr{A}_{(i})_{j)} = \partial_i \partial_j \Lambda$

Inverse Higgs 現象

[Ivanov-Ogievetsky '75]
[Low-Manohar PRL'02]
[Nicolis-Penco-Rosen, PRD'14]
…

- 対称性が並進と可換でない場合には、
  #(gapless NG modes) < #(Broken generators)

- 例: Branes, solids, supersolids, …



回転は座標依存した並進により実現できる

$$J_{ij} = x_i P_j - x_j P_i \qquad [\mathrm{i}P_i, J_{jk}] = -\delta_{ij} P_k + \delta_{ik} P_j$$

- 一般に、$[\bar{P}_\mu, Q'] \sim Q$ のとき $\pi' \sim \partial\pi$ Inverse Higgs constraint

- π' は最初から除いておいても良いし、π' と π を両方入れておくと、
  π' が massive になるので低エネルギーで落ちると考えても良い
  - Solid の場合で、回転と並進両方入れておくとCosserat elasticity

[Hirono-Qi, PRB'22]

1-form 対称性

- Charged objects and symmetry generators

$$W_q(C) = \exp \mathrm{i} q \int_C a \qquad Q(S) = \frac{1}{e^2}\int_S \star f$$

$$\mathscr{W}_{\mathbf{q}}(C) = \exp \mathrm{i} \ell q_i \int_C \mathscr{A}_i \qquad Q_i(S) = \int_S \left(\frac{1}{g^2} \star \mathscr{F}_i + \frac{1}{e^2} x_i \star f \right)$$

$$f = \mathrm{d}a + \mathscr{A}_i \wedge \mathrm{d}x^i \qquad \mathscr{F}_i = \mathrm{d}\mathscr{A}_i$$

- 保存電荷は右の代数を満たす: $[\mathrm{i}P_i, Q_j(S)] = -\delta_{ij} Q(S)$
- dipole gauge 変換の下で、 $W_q(C) \mapsto e^{\mathrm{i}\int_C \Sigma_i \mathrm{d}x^i} W_q(C)$
- ゲージ場 a の Wilson line は t に沿ってしか置けない: fractons
- Magnetic 1-form symmetry との 't Hooft anomaly

ギャップレス NG モードの数

- Scalar charge gauge theory

$$N_{\mathrm{NG}} = \frac{d(d+1)}{2} - 1$$

E_{ij} の成分の数

Gauss law constraint

- SSB of 1-form symmetries

$$N_{\mathrm{NG}} = d - 1 + (d-1) \times d - \frac{d(d-1)}{2}$$

SSB of Q

SSB of Q_i

Inverse Higgs constraints

Higgsing による fracton order

- c.f. U(1) ゲージ場 + charge n Higgs 場 → $\mathbb{Z}_n$ トポロジカル秩序
- Charged matter との coupling

$$D\theta := \mathrm{d}\theta + na + \phi_i \mathrm{d}x^i, \qquad D\phi_i := \mathrm{d}\phi_i + n\mathcal{A}_i$$

- Lagrangian $\quad \mathcal{L}[\theta, \phi_i, a, \mathcal{A}_i] = -\frac{v}{2}|\mathrm{d}\theta + na + \phi_i \mathrm{d}x^i|^2 - \frac{w}{2}|\mathrm{d}\phi_i + n\mathcal{A}_i|^2$
- 低エネルギー極限で、 $\quad \mathcal{L}[a, \mathcal{A}_i, b, C_i] = \frac{n}{2\pi}\mathrm{d}b \wedge a + \frac{n}{2\pi}(\mathrm{d}C_i + b \wedge \mathrm{d}x_i) \wedge \mathcal{A}_i$
- 2-form ゲージ場 C_i を $\mathrm{d}C_i = \mathrm{d}B_i \wedge \mathrm{d}x_i$ を満たすものに制限すると、X-cube model の低エネルギー理論を得る [Slagle-Aasen-Williamson '19]
  - このとき、$\mathcal{A}_i \mapsto \mathcal{A}_i + f\mathrm{d}x_i$ というゲージ不変性が現れるので、dipole Wilson loop $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell \int_C \mathcal{A}_i}$ は i 軸に垂直な面にしか置けなくなる

Variants of higher-rank gauge theories with fractons

Set of charges	Nontrivial commutators	Resulting theory
$\{Q, Q_i\}$	$[\mathrm{i}P_i, Q_j] = \delta_{ij} Q$	**Scalar charge gauge theory**
$\{Q, Q_i, Q'\}$	$[\mathrm{i}P_i, Q_j] = \delta_{ij} Q$ $[\mathrm{i}P_i, Q'] = Q_i$	**Traceless scalar charge gauge theory**
$\{Q, Q_i, q_j\}$	$[\mathrm{i}P_i, Q_j] = \delta_{ij} Q$ $[\mathrm{i}P_i, q_j] = \delta_{ij} Q_j$	**Scalar charge gauge theory without diagonal components** [Seiberg-Shao '20] [You-Devakul-Burnell-Sondhi '20]
$\{Q_i, Q_{i_1\ldots i_{d-2}}\}$ antisymmetric	$[\mathrm{i}P_i, Q_{j_1\ldots j_{d-2}}] = \epsilon_{ij_1\ldots j_{d-2}k}\, q_k$	**Vector charge gauge theory** (in d-spatial dimensions)

高次対称性とギャップレス・フラクトン相: まとめ

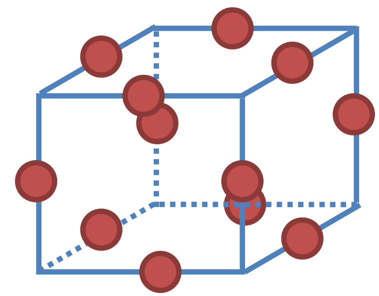
- フラクトン相: 移動方向に制限を持つ励起を持つ相
  - ギャップレス相: 高階ランクゲージ理論により記述 ($A_{ij} = A_{ji}$)
- 疑問: **ギャップレス・フラクトン相はどのように特徴づけられるのか？**
- 結論: **non-uniform な高次対称性(1-form)が自発的に破れた相である**
  - non-uniform: 保存電荷が並進と非可換
  - 保存電荷と並進の代数が、移動方向の制限を決める
    - $[\mathrm{i}P_i, Q'] = Q \longrightarrow Q$ は x^i 方向に動けない
    - 系統的にギャップレス・フラクトン相を構成できる
  - 低エネルギーで高階ランクゲージ理論を再現
  - ギャップレスモードは NG モード
    - 並進との非可換性により、一部のNGモードがギャップを持つ
      - Inverse Higgs現象の高次対称性版
  - ’t Hooft anomaly, Higgsing による fracton order の実現などが議論できる

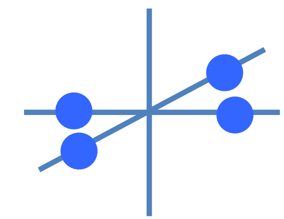
Backup slides

X-cube model

[Vijay-Haah-Fu '16]

- 3d cubic lattice
- 2-dim. Hilbert space at each link l
- Pauli matrices at each link
  - $\sigma_l^x \sigma_l^z = -\sigma_l^z \sigma_l^x$,
    $(\sigma_l^x)^2 = (\sigma_l^z)^2 = 1$





$$A_c = \prod_{l \in e(c)} \sigma_l^x \qquad B_v^i = \prod_{l \in e_i(v)} \sigma_l^z$$

- Hamiltonian

$$H = -\sum_c A_c - \sum_v (B_v^x + B_v^y + B_v^z)$$

- Ground-state degeneracy

$$\#\mathrm{GS} = 2^{2(L_x + L_y + L_z) - 3}$$

Foliated field theory

[Slagle–Aasen–Williamson '19]

- Low-energy theory of X-cube model

$$L = \frac{N}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n_f} e^k \wedge B^k \wedge \mathrm{d}A^k + b \wedge \mathrm{d}a - \sum_k e^k \wedge b \wedge A^k\right)$$

$$L_{\mathrm{cpl}} = \sum_k A^k \wedge \star J_A^k + \sum_k B^k \wedge \star J_B^k + a \wedge \star j_a + b \wedge \star j_b$$

- Gauge transformations

$$A^k \mapsto A^k + \mathrm{d}\Lambda_A^k$$
$$B^k \mapsto B^k + \mathrm{d}\Lambda_B^k + \Lambda_b$$
$$a \mapsto a + \mathrm{d}\Lambda_a + \sum_k e^k \wedge \Lambda_A^k$$
$$b \mapsto b + \mathrm{d}\Lambda_b$$

- Current conservations

$$\mathrm{d} \star J_A^k = -e^k \wedge \star j_a, \quad \mathrm{d} \star J_B^k = 0$$

$$\mathrm{d} \star j_a = 0, \quad \mathrm{d} \star j_b = \sum_k \star J_B^k$$

Foliated field theory

[Slagle-Aasen-Williamson '19]

- Low-energy theory of X-cube model

$$L = \frac{N}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n_f} e^k \wedge B^k \wedge \mathrm{d}A^k + b \wedge \mathrm{d}a - \sum_k e^k \wedge b \wedge A^k\right)$$

- The action is invariant under

$$A^k \mapsto A^k + \alpha^k e^k$$

$$B^k \mapsto B^k + \beta^k e^k$$

- Wilson loop operator

$$W_k(C) \equiv \exp\left(\mathrm{i}\oint_C A^k\right)$$

- Wilson loop is transformed as

$$W_k(C) \mapsto W_k(C)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\int \alpha^k e^k \wedge \delta(C)}$$

→ The loop C should be placed in a plane perp. to k-axis

- Ground-state degeneracy $\#\mathrm{GS} = N^{2(L_x+L_y+L_z)-3}$

Foliated field theory: ground state degeneracy on T^3

[Slagle-Aasen-Williamson '19]

- Write the Lagrangian as

$$L = \frac{N}{2\pi} \sum_k e^k \wedge B^k \wedge A^k \quad \text{with constraint} \quad \mathrm{d}a = \sum_k e^k \wedge A^k$$

Operators $\quad W^k(C) = \exp i \int_C A^k \qquad V^k(C) = \exp i \int_C B^k$

Choose $k = x$:

non-commutative operators $\quad \{W^x(C_z(x)), V^x(C_y(x))\}$

$$\{W^x(C_y(x)), V^x(C_z(x))\}$$

e.g. $\quad W^x(C_z(x))V^x(C_y(x)) = e^{\frac{2\pi i}{N}} V^x(C_y(x))W^x(C_z(x))$

The constraint leads to conditions such as

$$\exp\left(i \int_{C_x} e^x \int_{C_z} A^x + i \int_{C_z} e^z \int_{C_x} A^z \right) = 1$$