Entropy constraints on effective field theory

京都大学素粒子論研究室, 2023年2月8日

上田 大輝 (KEK)

Based on **arXiv:2201.00931** with **Qing-Hong Cao (北京大学)**

arXiv:2211.08065 with **Qing-Hong Cao (北京大学)**, and **Naoto Kan (大阪大学)**

イントロダクション

相対エントロピー

$\mathrm{Tr}[\rho_A] = \mathrm{Tr}[\rho_B] = 1, \quad \rho_A = \rho_A^\dagger, \quad \rho_B = \rho_B^\dagger$

- 相対エントロピーは二つの確率分布関数ρ_Aとρ_Bに対して定義される

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \mathrm{Tr}\left[\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B\right]$$

- 重要な性質: 相対エントロピーは**非負の量**

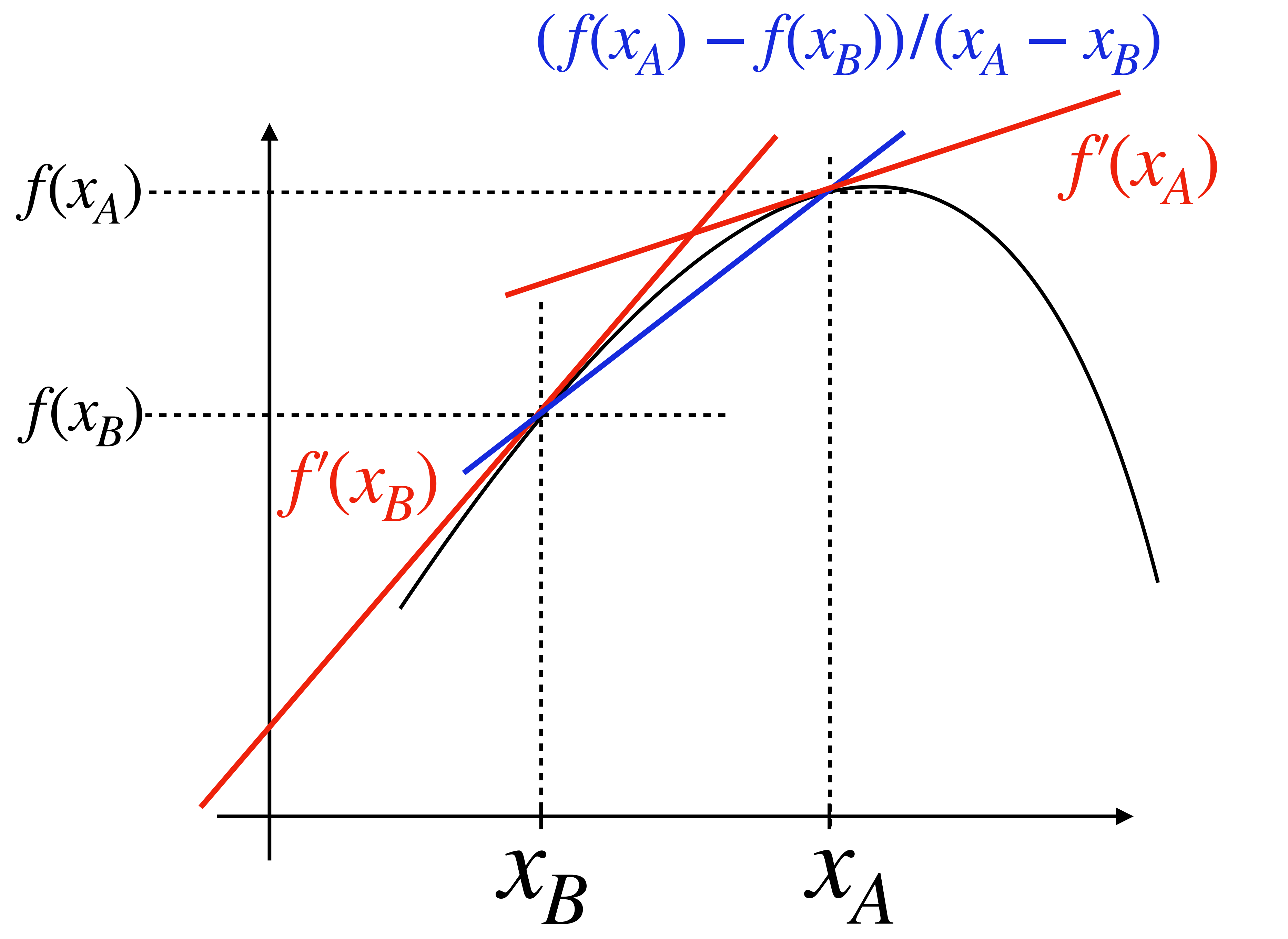
証明

$f(x)$: ある凸関数 $\Rightarrow \mathrm{Tr}[f(\rho_A) - f(\rho_B) - (\rho_A - \rho_B) f'(\rho_B)] \leq 0$

$f(x) \to -x \ln x$ (凸関数)

$$S(\rho_A || \rho_B) \geq 0$$

等号は$\rho_A = \rho_B$のときのみに成り立つ

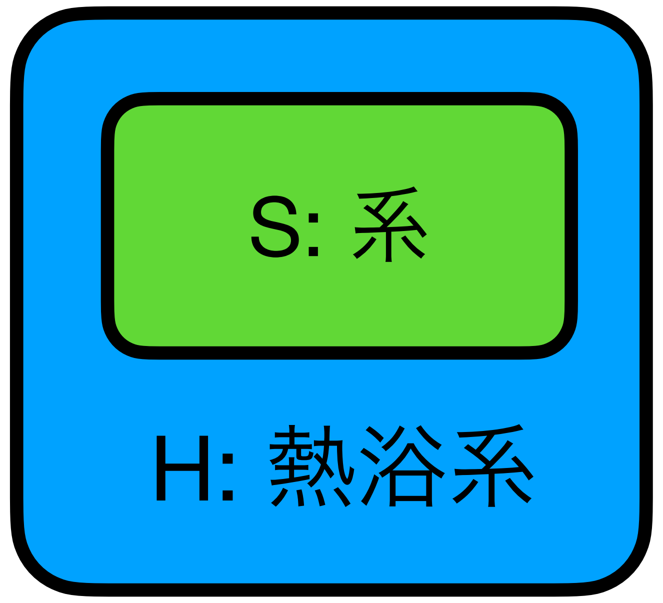


凸関数の性質 $f'(x_A) \leq \dfrac{f(x_A) - f(x_B)}{x_A - x_B} \leq f'(x_B)$

相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを特徴付ける

$\Rightarrow$ 物理においても重要な役割をしうる

相対エントロピーの非負性と熱力学第二法則



ユニタリーな時間発展

Sの終状態 = $\mathrm{Tr}_H[U\rho_S \otimes \rho_H U^\dagger] \equiv \tilde{\rho}_S$

$$\rho_S \otimes \rho_H = \rho_S \otimes e^{-\beta \cdot H_H}/Z_H \longrightarrow U\rho_S \otimes \rho_H U^\dagger$$

β: 熱浴系の逆温度, H_H: 熱浴系のハミルトニアン

- 相対エントロピー:

$$S(\rho_S \otimes \rho_H || U^\dagger \tilde{\rho}_S \otimes \rho_H U) = -\mathrm{Tr}_S\left[\tilde{\rho}_S \ln \tilde{\rho}_S\right] + \mathrm{Tr}_S\left[\rho_S \ln \rho_S\right] - \beta \cdot \left(\mathrm{Tr}\left[\rho_S \otimes \rho_H H_H\right] - \mathrm{Tr}\left[U\rho_S \otimes \rho_H U^\dagger H_H\right]\right)$$

$$= \Delta S - \beta \cdot Q \geq 0$$ クラウジウス不等式

相対エントロピーの非負性は熱力学の第二法則と関係している

[T. Sagawa, arXiv: 1202.0983]

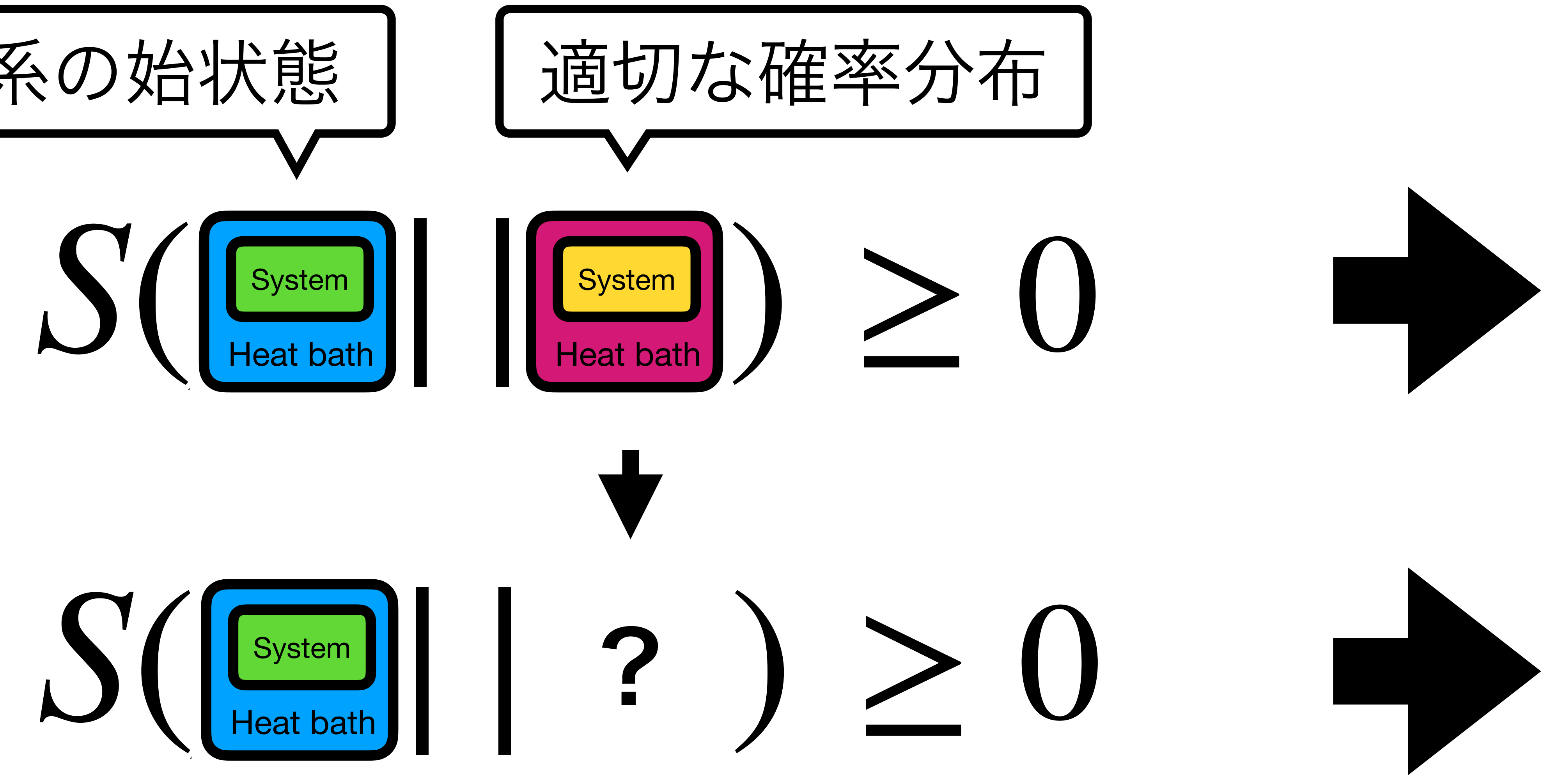
第二法則と相対エントロピーの非負性の関係から期待できること

- 相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを特徴付ける量

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \mathrm{Tr}\left[\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B\right] \geq 0$$

等号は$\rho_A = \rho_B$のときのみ成り立つ

- 相対エントロピーは確率分布関数で定義される二つのもの間の違いを特徴付ける



熱力学の第二法則

何か重要な性質が得られないか?

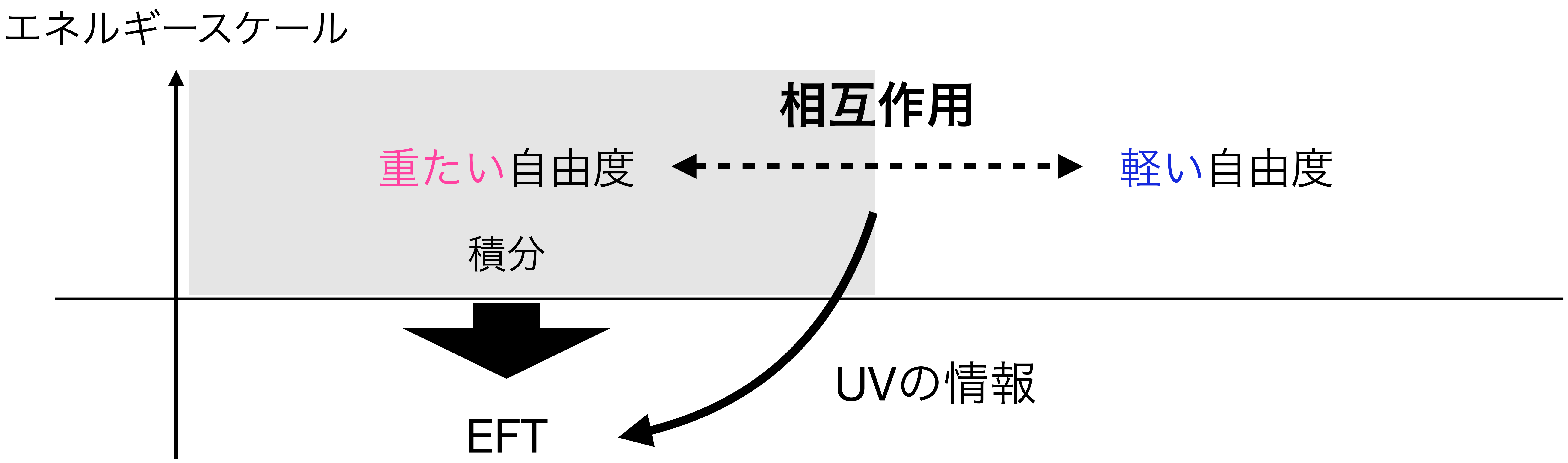
ほかの確率分布を考えるのはどうか?

EFTと相対エントロピーの非負性の関係性は?

- Effective Field Theory (EFT):

  - EFTは動的な重たい自由度を積分することで得られる

  - UV理論の情報は重たい自由度と軽い自由度間の相互作用を通してEFTに移る



重たい自由度と軽い自由度間の相互作用がある理論とない理論の違いがUVの情報に対応するはず

⇒ 相対エントロピーがEFTに含まれるUVの情報を定量化するのでは?

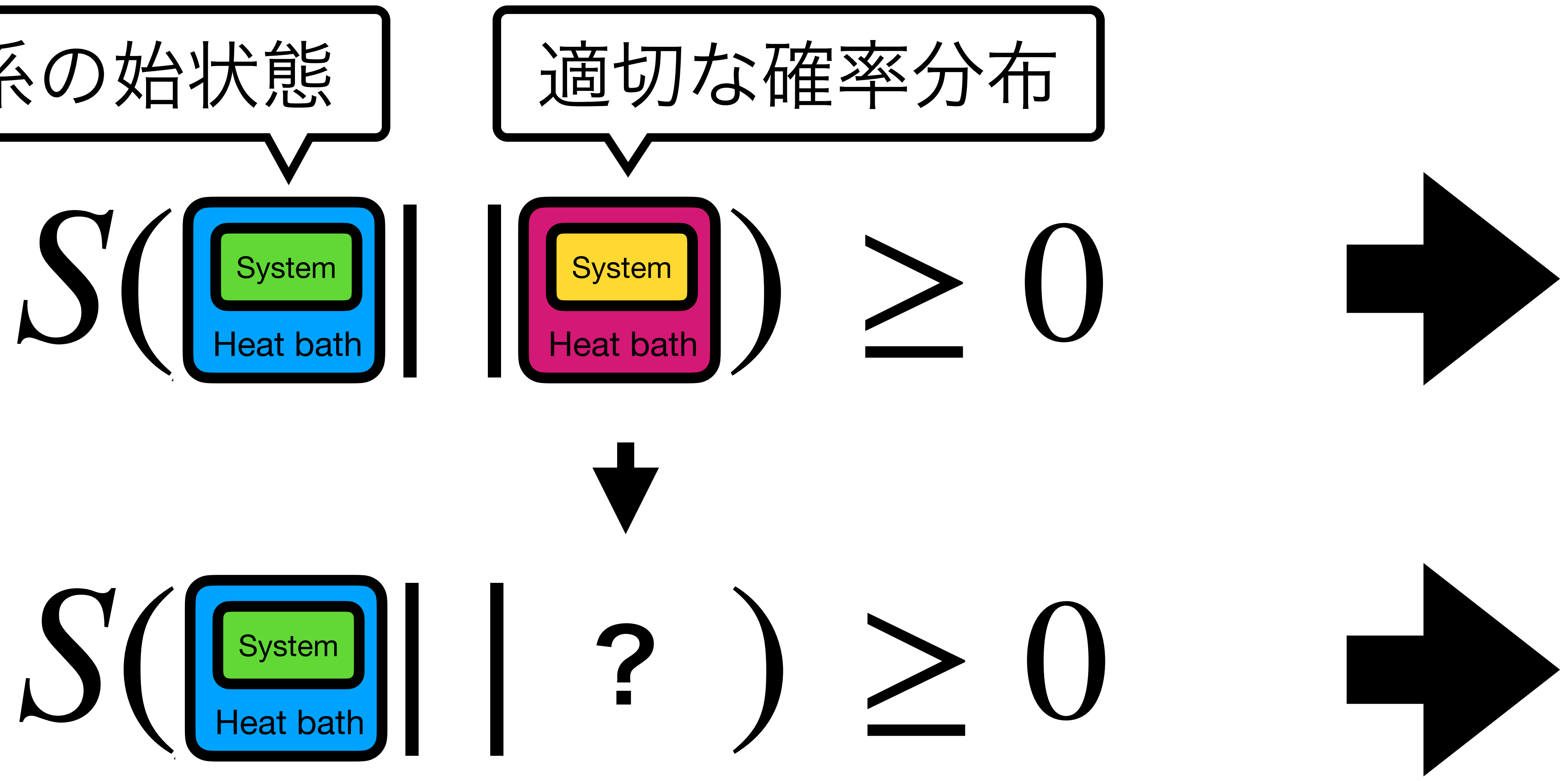
イントロダクションのまとめ

- 相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを定量化する

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \mathrm{Tr}\left[\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B\right] \geq 0$$

等号は$\rho_A = \rho_B$のときのみ成り立つ

- 相対エントロピーの非負性は熱力学の第二法則と関係している



熱力学の第二法則

何か重要な性質が得られないか?

相対エントロピーからUVの情報についての重要な性質を得られないか?

今回のトークの内容

- イントロダクション
- 二つの理論の間の相対エントロピー
  - 私たちのアイデア
  - 相対エントロピーの計算方法
- エントロピーから生じる制約の例
  - トップダウンアプローチ
  - ボトムアップアプローチ
- まとめ

二つの理論の間の相対エントロピー

私たちのアイデア

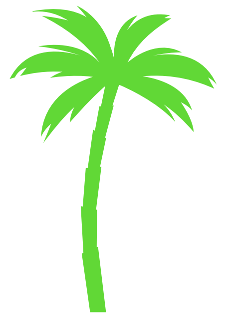
- 相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを定量化する

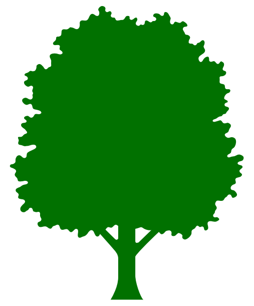
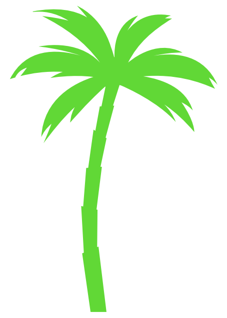
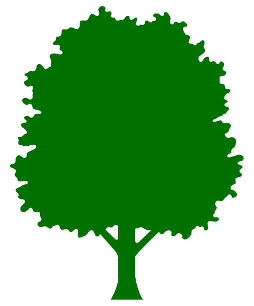
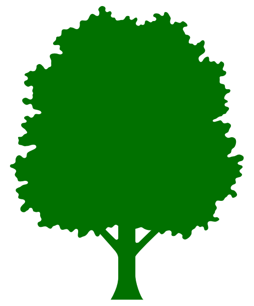
$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \mathrm{Tr}\left[\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B\right] \geq 0$$

等号は$\rho_A = \rho_B$のときのみ成り立つ

- 相対エントロピーは確率分布関数で定義される二つのものの間の定量的な違いを表す

Ex.

 $\mapsto \rho_A$  $\mapsto \rho_B$

$S($  $||$  $) > 0$ $S($  $||$  $) = 0$

相互作用を伴う理論とそうではない理論の間の相対エントロピーを考えるのはどうか?

私たちのアイデア

- 相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを定量化する

$$S(\rho_A || \rho_B) \equiv \mathrm{Tr}\left[\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B\right] \geq 0$$

等号は$\rho_A = \rho_B$のときのみ成り立つ

- 相対エントロピーは確率分布関数で定義される二つのものの間の定量的な違いを表す

$$\boxed{\text{相互作用を含まない理論} \longmapsto \rho_A \qquad \text{相互作用を含む理論} \longmapsto \rho_B}$$

$$S(\text{相互作用を含まない理論} \,||\, \text{相互作用を含む理論}) > 0$$

$\Rightarrow$ 各理論に対する確率分布関数を定義しなくてはいけない

理論に対する確率分布関数

- ユークリッド化された作用 I で定義される理論の確率分布関数を考える

$$\boxed{\text{確率分布関数: } P[\phi, \Phi] = e^{-I[\phi,\Phi]}/Z \text{ , 分配関数: } Z = \int d[\phi]d[\Phi]e^{-I[\phi,\Phi]}}$$

I: ユークリッド化された作用, ϕ: 軽い場, Φ: 重たい場

- 二つの理論の間の相対エントロピー

$$S(P_A||P_B) \equiv \int d[\phi]d[\Phi]\left(P_A \ln P_A - P_A \ln P_B\right) \geq 0$$

where $P_A = e^{-I_A}/Z_A, \quad P_B = e^{-I_B}/Z_B$

理論のクラス

ϕとΦの相互作用を含まない

ϕとΦの相互作用

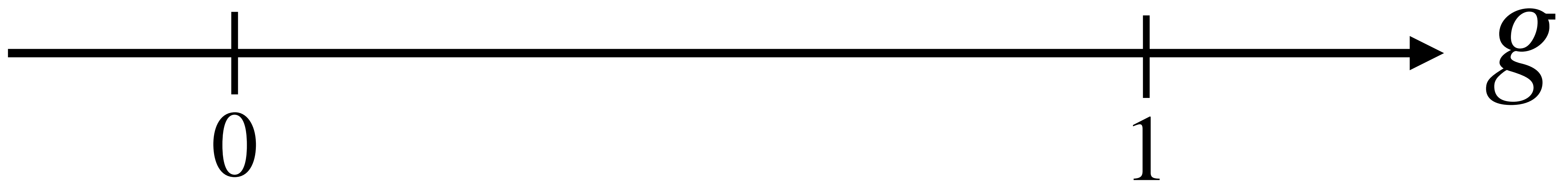
- 次のような作用で表せる理論を考える $I_0[\phi, \Phi] + I_I[\phi, \Phi]$

where ϕ: 軽い場, Φ: 重たい場

- パラメータgを導入して作用 $I_0[\phi, \Phi] + g \cdot I_I[\phi, \Phi]$ について考える

A : $I_0[\phi, \Phi]$

B : $I_0[\phi, \Phi] + I_I[\phi, \Phi]$



相対エントロピー $S(P_A || P_B)$ を考えてみる

二つの理論の間の相対エントロピーの計算方法

$$S(P_A||P_B) = \int d[\phi]d[\Phi]\left[P_A \ln P_A - P_A \ln P_B\right]$$

$$P_A = e^{-I_0[\phi,\Phi]}/Z_0,\ P_B = e^{-(I_0[\phi,\Phi]+g\cdot I_I[\phi,\Phi])}/Z_g$$

$$\frac{dW_g}{dg} = -\frac{d\ln Z_g}{dg} = -\frac{1}{Z_g}\frac{dZ_g}{dg} = \frac{1}{Z_g}\int d[\phi]d[\Phi]I_I e^{-(I_0+g\cdot I_I)} = \int d[\phi]d[\Phi]P_B I_I \Rightarrow \boxed{\left(\frac{dW_g}{dg}\right)_{g=0} = \int d[\phi]d[\Phi]P_A I_I}$$

$$= W_0 - W_g + g\cdot\boxed{\int d[\phi]d[\Phi]P_A I_I}$$

$$W_g \equiv -\ln Z_g,\quad W_0 \equiv -\ln Z_0$$

$$= W_0 - W_g + g\cdot\left(\frac{dW_g}{dg}\right)_{g=0} \geq 0$$

二つの理論の間の相対エントロピーの計算方法

$$S(P_A||P_B) = \int d[\phi]d[\Phi]\left[P_A \ln P_A - P_A \ln P_B\right]$$

$$P_A = e^{-I_0[\phi,\Phi]}/Z_0,\ P_B = e^{-(I_0[\phi,\Phi]+g\cdot I_I[\phi,\Phi])}/Z_g$$

$$= \int d[\phi]d[\Phi]\left[P_A\left(-\ln Z_0 - I_0\right) - P_A\left(-\ln Z_g - (I_0 + g\cdot I_I)\right)\right]$$

$$= -\ln Z_0 + \ln Z_g + g\cdot\int d[\phi]d[\Phi]P_A I_I$$

$$= W_0 - W_g + g\cdot\int d[\phi]d[\Phi]P_A I_I$$

$$W_g \equiv -\ln Z_g,\quad W_0 \equiv -\ln Z_0$$

$$= W_0 - W_g + g\cdot\left(\frac{dW_g}{dg}\right)_{g=0} \geq 0$$

$S(P_A||P_B)$ はユークリッド有効作用に対して制約を与える

二つの理論の間の相対エントロピーの量子力学的な計算方法

$$S(\rho_A||\rho_B) = \mathrm{Tr}\left[\rho_A \ln \rho_A - \rho_A \ln \rho_B\right]$$

$\rho_A = e^{-\beta \cdot H_0}/Z_0, \quad \rho_B = e^{-\beta\cdot(H_0 + g\cdot H_I)}/Z_g$

β: 逆温度, H_0: ハミルトニアンの非相互作用項,

H_I: ハミルトニアンの相互作用項

$$= \mathrm{Tr}\left[\rho_A\left(-\ln Z_0 - \beta\cdot H_0\right) - \rho_A\left(-\ln Z_g - \beta\cdot(H_0 + g\cdot H_I)\right)\right]$$

$$= -\ln Z_0 + \ln Z_g + g\cdot\beta\mathrm{Tr}[\rho_A H_I]$$

$$= W_0 - W_g + g\cdot\beta\mathrm{Tr}[\rho_A H_I]$$

$W_g \equiv -\ln Z_g, \ W_0 \equiv -\ln Z_0$

$$= W_0 - W_g + g\cdot(dW_g/dg)_{g=0} \geq 0$$

場の理論的な計算法で得られた不等式と同じ

二つの理論の間の相対エントロピーについてのまとめ

- 相対エントロピーは二つの確率分布間の違いを定量化する

$$S(P_A||P_B) \equiv \int d[\phi]d[\Phi]\left(P_A \ln P_A - P_A \ln P_B\right) \geq 0$$

- 理論に対する確率分布として以下を考えた

相互作用を伴わない理論: $I_0[\phi,\Phi] \quad \longmapsto \quad P_A = e^{-I_0[\phi,\Phi]}/Z_0$

相互作用を伴う理論: $I_0[\phi,\Phi] + I_I[\phi,\Phi] \quad \longmapsto \quad P_B = e^{-(I_0[\phi,\Phi]+gI_I[\phi,\Phi])}/Z_g$

$\Rightarrow S(P_A||P_B) = W_0 - W_g + g \cdot \left(dW_g/dg\right)_{g=0} \geq 0$ where $W_g \equiv -\ln Z_g$

この不等式は何を意味しているのか?

今回のトークの内容

- イントロダクション
- 二つの理論の間の相対エントロピー
  - 私たちのアイデア
  - 相対エントロピーの計算方法
- エントロピーから生じる制約の例
  - トップダウンアプローチ
  - ボトムアップアプローチ
- まとめ

簡単な例: ガウス分布関数で定義された理論

- 次の二つの関数について考える

A： $I_0[x, X] = M^2X^2 + m^2x^2$

B： $I_{g=1}[x, X] = M^2X^2 + m^2x^2 + \boxed{c \cdot x \cdot X}$

0 $\quad$ 1 $\quad$ g

重い自由度と軽い自由度の間の**相互作用**

- 仮定: Xは動的な自由度(積分変数), xは動的ではない自由度(パラメータとみなして積分しない)

重たい自由度とみなす

背景場のように振る舞う軽い場とみなす

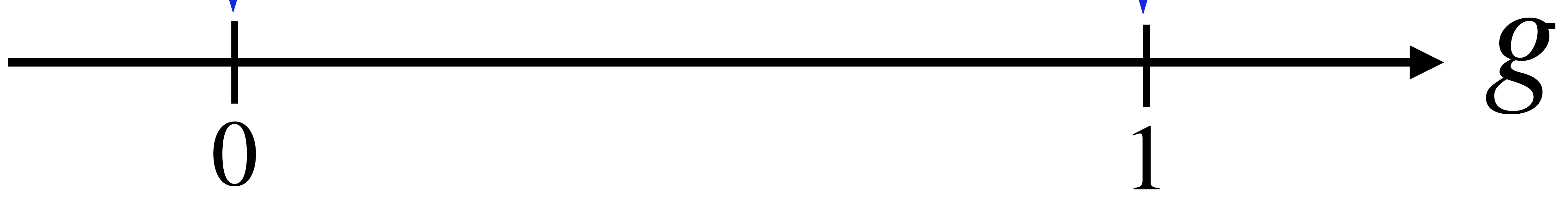
簡単な例: ガウス分布関数で定義された理論

- 次の二つの関数について考える

A : $I_0[x, X] = M^2X^2 + m^2x^2$

B : $I_{g=1}[x, X] = M^2X^2 + m^2x^2 + \boxed{c \cdot x \cdot X}$

相互作用



理論	作用	確率分布関数	分配関数
A	$I_0[x, X] = M^2X^2 + m^2x^2$	$P_A = e^{-I_0[x,X]}/Z_0$	$Z_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dX e^{-I_0[x,X]} = e^{-m^2x^2}\sqrt{\frac{\pi}{m}}$
B	$I_g[x, X] = I_0[x, X] + g \cdot c \cdot x \cdot X$	$P_B = e^{-I_g[x,X]}/Z_g$	$Z_g = \int_{-\infty}^{\infty} dX e^{-I_g[x,X]} = Z_0 \cdot e^{g^2c^2x^2/4M^2}$

相対エントロピー$S(P_A || P_B)$を計算してみる

簡単な例: ガウス分布関数で定義された理論

理論	作用	確率分布関数	分配関数
A	$I_0[x,X] = M^2X^2 + m^2x^2$	$P_A = e^{-I_0[x,X]}/Z_0$	$Z_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dX e^{-I_0[x,X]} = e^{-m^2x^2}\sqrt{\frac{\pi}{m}}$
B	$I_g[x,X] = I_0[x,X] + g\cdot c\cdot x\cdot X$	$P_B = e^{-I_g[x,X]}/Z_g$	$\boxed{Z_g = \int_{-\infty}^{\infty} dX e^{-I_g[x,X]} = Z_0 \cdot e^{g^2c^2x^2/4M^2}}$

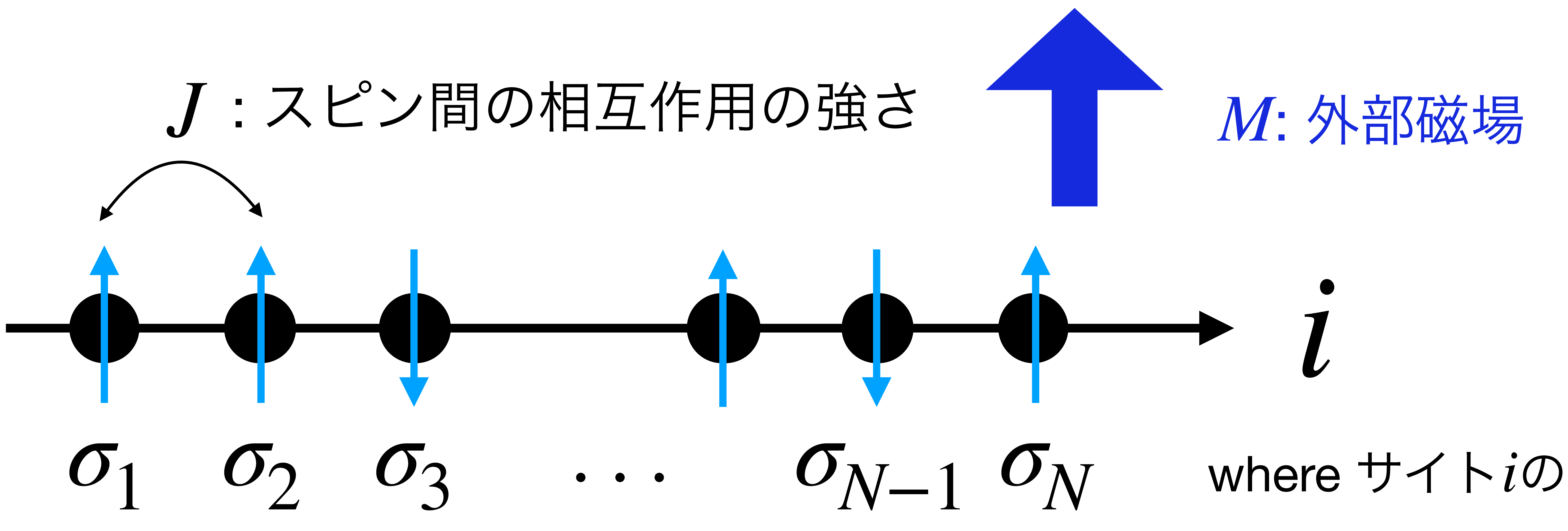
$W_g \equiv -\ln Z_g$

- 相対エントロピー:

$$S(P_A||P_B) = \boxed{W_0 - W_g + g\cdot\left(dW_g/dg\right)_{g=0}} = g^2\cdot c^2\cdot\frac{x^2}{4M^2} \geq 0$$

場の理論や量子力学で記述される理論についても同じように相対エントロピーが計算できる

Example (2): 一次元Ising模型



where サイトiのスピン: $\sigma_i = \pm 1$

理論	ハミルトニアン	確率分布関数	分配関数
A 磁場なし	$H_0 = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1}$	$\rho_A = e^{-\beta\cdot H_0}/Z_0$	$Z_0 = \mathrm{Tr}[e^{-\beta H_0}]$
B 磁場あり	$H_g = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - \boxed{g\cdot M\sum_{j=1}^{N}\sigma_j}$	$\rho_B = e^{-\beta H_g}/Z_g$	$Z_g = \mathrm{Tr}[e^{-\beta H_g}]$

動的なスピンと背景磁場の間の**相互作用**

Example (2): 一次元Ising模型

理論	ハミルトニアン	確率分布関数	分配関数
A 磁場なし	$H_0 = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1}$	$\rho_A = e^{-\beta\cdot H_0}/Z_0$	$Z_0 = \mathrm{Tr}[e^{-\beta H_0}]$
B 磁場あり	$H_g = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - \boxed{g\cdot M\sum_{j=1}^{N}\sigma_j}$	$\rho_B = e^{-\beta H_g}/Z_g$	$Z_g = \mathrm{Tr}[e^{-\beta H_g}]$

動的なスピンと背景磁場の間の**相互作用**

- 相対エントロピー:

$$S(\rho_A||\rho_B) = W_0 - W_g + g\cdot\left(dW_g/dg\right)_{g=0}$$

磁化率に比例する量

$$= \boxed{-g^2\cdot(d^2W_g/dg^2)_{g=0}}/2 + \mathcal{O}(g^3)$$

Example (2): 一次元Ising模型

理論	ハミルトニアン	確率分布関数	分配関数
A 磁場なし	$H_0 = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1}$	$\rho_A = e^{-\beta\cdot H_0}/Z_0$	$Z_0 = \mathrm{Tr}[e^{-\beta H_0}]$
B 磁場あり	$H_g = -J\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sigma_{i+1} - \boxed{g\cdot M\sum_{j=1}^{N}\sigma_j}$	$\rho_B = e^{-\beta H_g}/Z_g$	$Z_g = \mathrm{Tr}[e^{-\beta H_g}]$

動的なスピンと背景磁場の間の**相互作用**

- 相対エントロピー:

$$S(\rho_A||\rho_B) = W_0 - W_g + g\cdot\left(dW_g/dg\right)_{g=0}$$

磁化率　　　　キュリーの法則

$$= M^2\beta\cdot\boxed{g^2\cdot\beta e^{\beta J}}/2 + \mathcal{O}(g^3) \geq 0 \Rightarrow M^2\beta\cdot\boxed{g^2\cdot\beta}/2 + \mathcal{O}(g^3) \geq 0$$

高温極限: $\beta J \ll 1$

相対エントロピーの非負性は非負の磁化率に対応する

Example (3): シフト対称性※を持つスカラー場の理論

[Allan Adams, Nima Arkani-Hamed, Segei Dubovsky, Alberto Nicolis, and Riccardo Rattazzi, arXiv: 0602178]

※ $\phi \to \phi + \text{const}\,.$

理論	ミンコフスキ時空での作用	確率分布関数	分配関数
A	$I_0 = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \right)$	$P_A = e^{-I_0[\phi,\Phi]}/Z_0$	$Z_0 = \int d[\phi]d[\Phi]e^{-I_0[\phi,\Phi]}$
B	$I_g = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi) - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + g \cdot \alpha \Phi (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) \right)$	$P_B = e^{-I_g[\phi,\Phi]}/Z_g$	$Z_g = \int d[\phi]d[\Phi]e^{-I_g[\phi,\Phi]}$

- 相対エントロピー:

$$S(P_A || P_B) = W_0 - W_g + g \cdot \left(\frac{dW_g}{dg} \right)_{g=0} = \boxed{\frac{g^2\alpha^2}{4m^2} \int (d^4x)_E (\partial_\mu \widetilde{\phi}\, \partial^\mu \widetilde{\phi}\,)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{g^2\alpha^2}{4m^2} \geq 0$$

次元8の演算子

相対エントロピーの非負性は次元8の演算子の係数の非負性に対応している

Example (4): Euler-Heisenberg理論

理論	ミンコフスキ時空での作用	確率分布関数	分配関数
A	$I_0 = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi\right)$	$P_A = e^{-I_0[A_\mu,\psi]}/Z_0$	$Z_0 = \int d[A^\mu]d[\psi]d[\bar{\psi}]e^{-I_0[A^\mu,\psi]}$
B	$I_g = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi - g\cdot e(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)A^\mu\right)$	$P_B = e^{-I_g[A^\mu,\psi]}/Z_g$	$Z_g = \int d[A^\mu]d[\psi]d[\bar{\psi}]e^{-I_g[A^\mu,\psi]}$

- 相対エントロピー:

$$S(P_A||P_B) = W_0 - W_g + g\cdot\left(\frac{dW_g}{dg}\right)_{g=0} = \int (d^4x)_E\left(\boxed{\frac{1}{2}\frac{g^4e^4}{6!\pi^2m^4}(\bar{F}_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu})^2 + \frac{7}{8}\frac{g^4e^4}{6!\pi^2m^4}(\bar{F}_{\mu\nu}\widetilde{\bar{F}}^{\mu\nu})^2} + \mathcal{O}(m^{-6})\right) \geq 0$$

次元8の演算子の和

相対エントロピーの非負性は高次演算子の係数の非負性と関係している

トップダウンアプローチのまとめ

トップダウンアプローチ

- 重たい自由度と軽い自由度の間の**相互作用**の形がわかっている場合を考えた

- いくつかの例で**相対エントロピーの**非負性が満たされていることを確認した.

Ex.

- Ising model ⇒ 非負の磁化率

- シフト対称性を持つスカラー場の理論, Euler-Heisenberg理論

⇒ Positivity bound on dim-8 operator

etc

相対エントロピーは様々な現象に対して統一的な理解を与えるかもしれない

今回のトークの内容

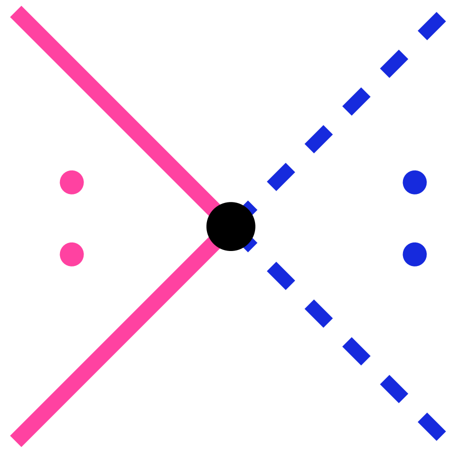
- イントロダクション
- 二つの理論の間の相対エントロピー
  - 私たちのアイデア
  - 相対エントロピーの計算方法
- エントロピーから生じる制約の例
  - トップダウンアプローチ
  - ボトムアップアプローチ
- まとめ

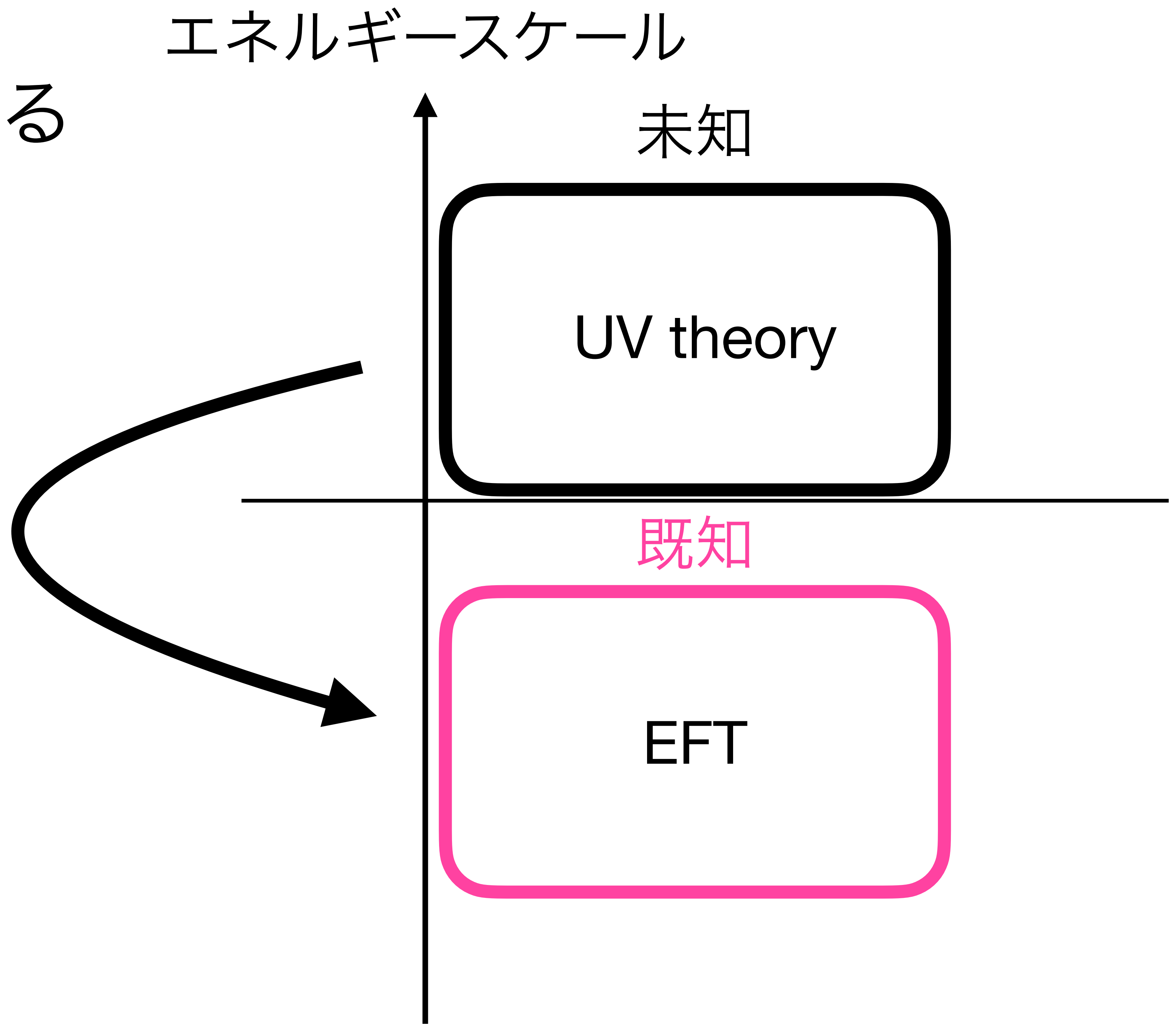
ボトムアップアプローチ

- **仮定:**

  - 重い場と軽い場の間の相互作用からEFTが生成されているとする

$$I_I[\phi, \Phi] = \int (d^4x)_{\mathrm{E}}\, \mathcal{O}[\Phi] \otimes J[\phi] =$$

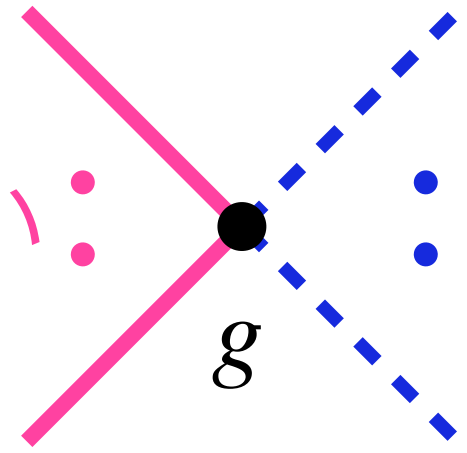
重い :

: 軽い



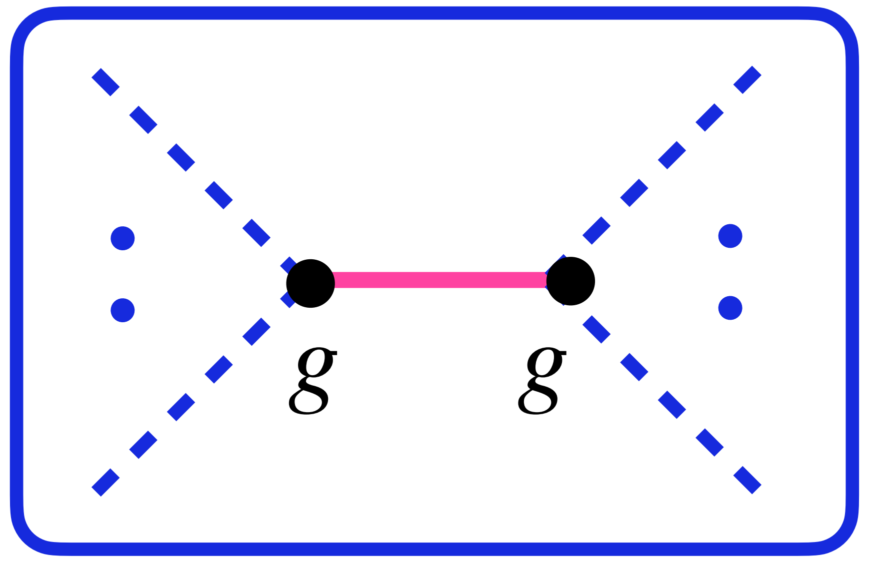
※ ここで $J[\phi]$ は高階微分項は含まないと仮定

相対エントロピーの議論はボトムアップアプローチにおいて何を意味するか?

ツリーレベルのUV理論

$$I_I[\phi,\Phi] = \int (d^4x)_E\, \mathcal{O}[\Phi] \otimes J[\phi] =$$ 重たい  軽い

gの2次以上の寄与の例



※重たい場の一次の寄与は場の再定義で取り除ける

- Ex. シフト対称性($\phi \to \phi + \mathrm{const.}$)を持つスカラー場の理論

  有効作用 (EFT):

$$W_g[\widetilde{\phi}] = \int (d^4x)_E \left(-\frac{1}{2}(1+a_2^{\mathrm{tree}})(\partial_\mu \widetilde{\phi'} \partial^\mu \widetilde{\phi'}) - \frac{c_2^{\mathrm{tree}}}{M^4}(\partial_\mu \widetilde{\phi'} \partial^\mu \widetilde{\phi'})^2 \right)$$

where $a_2^{\mathrm{tree}}, c_2^{\mathrm{tree}}$: gの2次以上の寄与

$$= \int (d^4x)_E \left(-\frac{1}{2}(\partial_\mu \widetilde{\phi}\, \partial^\mu \widetilde{\phi}) - \frac{c_2^{\mathrm{tree}}}{M^4}(1+a_2^{\mathrm{tree}})^{-2}(\partial_\mu \widetilde{\phi}\, \partial^\mu \widetilde{\phi})^2 \right)$$

where $\widetilde{\phi} = (1+a_2^{\mathrm{tree}})^{1/2} \cdot \widetilde{\phi'},\ \partial \widetilde{\phi} = \mathrm{const.}$

※ 次元6の寄与は消える

- 相対エントロピー

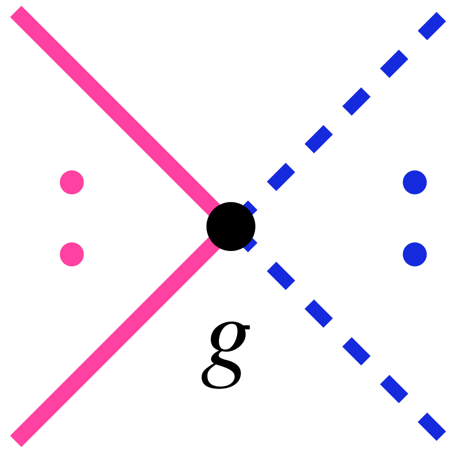
$$S(P_A||P_B) = W_0[\widetilde{\phi}] - W_g[\widetilde{\phi}] + g \cdot \left(dW_g/dg \right)_{g=0} = \frac{c_2^{\mathrm{tree}}}{M^4}(1+a_2^{\mathrm{tree}})^{-2} \int (d^4x)_E (\partial_\mu \widetilde{\phi}\, \partial^\mu \widetilde{\phi})^2 \geq 0 \Rightarrow c_2^{\mathrm{tree}} \geq 0$$

相対エントロピーは次元8の演算子の係数に制約を与える

1-ループレベルのUV理論

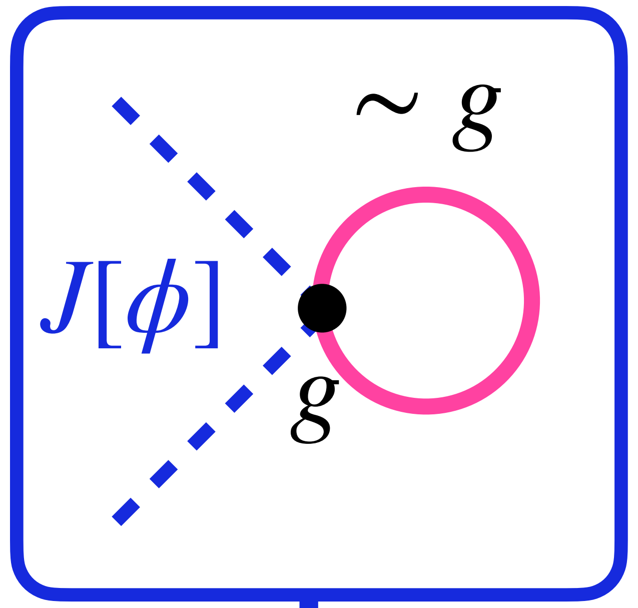
$$I_I[\phi,\Phi] = \int (d^4x)_{\mathrm{E}}\, \mathscr{O}[\Phi] \otimes J[\phi] =$$

重い :



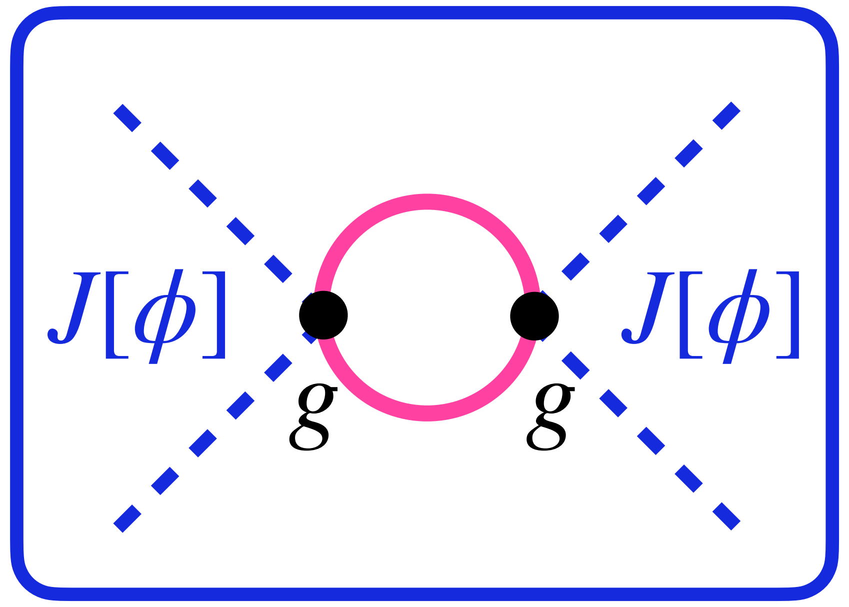
: 軽い

gの一次の寄与



+

gの二次以上の寄与の例



$J[\phi]$ は高階微分項を含まないと仮定しているから寄与はない

- Ex. シフト対称性($\phi \to \phi + \mathrm{const}\,.$)を持つスカラ

有効作用 (EFT): $$W_g[\widetilde{\phi}] = \int (d^4x)_{\mathrm{E}} \left(-\frac{1}{2}(1 + a_1^{\mathrm{loop}} + a_2^{\mathrm{loop}})(\partial_\mu \widetilde{\phi}' \partial^\mu \widetilde{\phi}') - \frac{\boxed{c_2^{\mathrm{loop}}}}{M^4}(\partial_\mu \widetilde{\phi}' \partial^\mu \widetilde{\phi}')^2 \right)$$

where a_1^{loop} : gの一次の寄与 , $a_2^{\mathrm{loop}}, c_2^{\mathrm{loop}}$: gの二次以上の寄与

$$= \int (d^4x)_{\mathrm{E}} \left(-\frac{1}{2}(\partial_\mu \widetilde{\phi}\, \partial^\mu \widetilde{\phi}\,) - \frac{c_2^{\mathrm{loop}}}{M^4}(\partial_\mu \widetilde{\phi}\, \partial^\mu \widetilde{\phi}\,)^2 \right)$$

where $\widetilde{\phi} = (1 + a_1^{\mathrm{loop}} + a_2^{\mathrm{loop}})^{1/2} \cdot \widetilde{\phi}',\ \partial \widetilde{\phi} = \mathrm{const}\,.$

- 相対エントロピー

$$S(P_A || P_B) = W_0[\widetilde{\phi}\,] - W_g[\widetilde{\phi}\,] + g \cdot \left(dW_g/dg \right)_{g=0} = \frac{c_2^{\mathrm{loop}}}{M^4} \int (d^4x)_{\mathrm{E}} (\partial_\mu \widetilde{\phi}\, \partial^\mu \widetilde{\phi}\,)^2 \geq 0 \ \Rightarrow c_2^{\mathrm{loop}} \geq 0$$

相対エントロピーは次元8の演算子に制約を与える

制約が得られるクラスの理論

- 高次演算子への制約が得られたのはなぜか? $\int (d^4x)_E \left(\boxed{-\frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)} - \frac{c}{M^4}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2 \right)$

⇒ 主要な演算子への補正が場の再定義($\phi \to \phi + \delta\phi$)で取り除けるから

Ex. SMEFT SU(N) ゲージボゾン演算子

$$\int d^4x \left(\boxed{-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu}} + \frac{1}{\Lambda^4}\sum_i c_i\mathcal{O}_i \right)$$

$\mathcal{O}_1^{F^4} = (F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu})(F^b_{\rho\sigma}F^{b,\rho\sigma})$

$\mathcal{O}_2^{F^4} = (F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a,\mu\nu})(F^b_{\rho\sigma}\tilde{F}^{b,\rho\sigma})$

$\mathcal{O}_3^{F^4} = (F^a_{\mu\nu}F^{b,\mu\nu})(F^a_{\rho\sigma}F^{b,\rho\sigma})$

$\mathcal{O}_4^{F^4} = (F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{b,\mu\nu})(F^a_{\rho\sigma}\tilde{F}^{b,\rho\sigma})$

$\mathcal{O}_5^{F^4} = d^{abe}d^{cde}(F^a_{\mu\nu}F^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma}F^{d,\rho\sigma})$

$\mathcal{O}_6^{F^4} = d^{abe}d^{cde}(F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma}\tilde{F}^{d,\rho\sigma})$

$\mathcal{O}_7^{F^4} = d^{ace}d^{bde}(F^a_{\mu\nu}F^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma}F^{d,\rho\sigma})$

$\mathcal{O}_8^{F^4} = d^{ace}d^{bde}(F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma}\tilde{F}^{d,\rho\sigma})$

$\tilde{\mathcal{O}}_1^{F^4} = (F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu})(F^b_{\rho\sigma}\tilde{F}^{b,\rho\sigma})$

$\tilde{\mathcal{O}}_2^{F^4} = (F^a_{\mu\nu}F^{b,\mu\nu})(F^a_{\rho\sigma}\tilde{F}^{b,\rho\sigma})$

$\tilde{\mathcal{O}}_3^{F^4} = d^{abe}d^{cde}(F^a_{\mu\nu}F^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma}\tilde{F}^{d,\rho\sigma})$

$\tilde{\mathcal{O}}_4^{F^4} = d^{ace}d^{bde}(F^a_{\mu\nu}F^{b,\mu\nu})(F^c_{\rho\sigma}\tilde{F}^{d,\rho\sigma})$

T^a : generator of $SU(N)$ Lie algebra

$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c$

$\{T^a, T^b\} = \delta^{ab}\hat{1}/N + d^{abc}T^c$

⇒ 主要な演算子への補正が場の再定義($A^a_\mu \to A^a_\mu + \delta A^a_\mu$)で取り除ける

シフト対称性を持つスカラー場の理論の同じ方法で制約が得られる

SMEFTゲージボソン演算子に生じる制約

- 相対エントロピーの非負性:

$$S(P_A||P_B) = W_0 - W_g + g \cdot (dW_g/dg)_{g=0} = \int (d^4x)_{\rm E} \frac{1}{\Lambda^4} \sum_i c_i \mathcal{O}_i \geq 0$$

- 運動方程式 $\partial^\mu F^a_{\mu\nu} + g f^{abc} A^{\mu,b} F^c_{\mu\nu} = 0$ の古典解: $A^a_\mu = u^a_1 \epsilon_{1\mu} w_1 + u^a_2 \epsilon_{2\mu} w_2$ with $f^{abc} u^a_1 u^b_2 = 0$, $\partial_\mu w_1 = l_\mu$, and $\partial_\mu w_2 = k_\mu$

※ l_μ, k_μ : 定数ベクトル

- $U(1)_Y$: $c_1^{B^4} \geq 0, \quad c_2^{B^4} \geq 0, \quad 4c_1^{B^4} c_2^{B^4} \geq (\tilde{c}_1^{B^4})^2,$
- $SU(2)_L$: $c_1^{W^4} + c_3^{W^4} \geq 0, \quad c_2^{W^4} + c_4^{W^4} \geq 0, \quad 4(c_1^{W^4} + c_3^{W^4})(c_2^{W^4} + c_4^{W^4}) \geq (\tilde{c}_1^{W^4} + \tilde{c}_2^{W^4})^2,$
- $SU(3)_C$: $2c_1^{G^4} + c_3^{G^4} \geq 0, \quad 3c_2^{G^4} + 2c_5^{G^4} \geq 0, \quad 3c_2^{G^4} + 3c_4^{G^4} + c_6^{G^4} \geq 0, \quad 3c_4^{G^4} + 2c_6^{G^4} \geq 0,$

$$4(3c_1^{G^4} + 3c_3^{G^4} + c_5^{G^4})(3c_2^{G^4} + 3c_4^{G^4} + c_6^{G^4}) \geq (3\tilde{c}_1^{G^4} + 3\tilde{c}_2^{G^4} + \tilde{c}_3^{G^4})^2$$

$$4(3c_3^{G^4} + 2c_5^{G^4})(3c_4^{G^4} + 2c_6^{G^4}) \geq (3\tilde{c}_2^{G^4} + 2\tilde{c}_3^{G^4})^2$$

これらの制約はユニタリー性と因果律から得られる制約と矛盾しない

[G.N. Remmen, and N.L. Rodd, arXiv:1908.09845]

高階微分項を伴うEinstein-Maxwell理論でのエントロピーの議論について

- これまで**重力を伴わないEFT**について考えてきた

Ex.

SMEFT SU(N) ゲージボソン演算子など

$$\int d^4x \left(-\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a,\mu\nu} + \frac{1}{\Lambda^4} \sum_i c_i \mathcal{O}_i \right)$$

Einstein-Maxwell理論のようなEFTにエントロピーの議論は使えるか?

現段階の僕の理解

散乱振幅を使ったユニタリー性の議論が使えない状況で
エントロピーの議論も使えなくなりうる

高階微分項を伴うEinstein-Maxwell理論

- 4階微分までの演算子を含むEinstein-Maxwell理論

$$\mathscr{L} = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

$$+c_{13}R^2 + c_{23}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$$

$$(c_1 - c_3)R^2 + (c_2 + 4c_3)R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$$

$$+c_4 RF_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_5 R_{\mu\nu}F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} + c_6 R_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$$

$$c_{13} \equiv c_1 - c_3,\ c_{23} \equiv c_2 + 4c_3$$

$$+c_7 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + c_8 F_{\mu\nu}F^{\nu\rho}F_{\rho\sigma}F^{\sigma\mu}$$

- Gauss-Bonnet combination, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$ は4次元時空では消える

高階微分項を伴うEinstein-Maxwell理論

- 4階微分までの演算子を含むEinstein-Maxwell理論

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} = {} & \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
& + c_{13}R^2 + c_{23}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \\
& + c_4 R F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_5 R_{\mu\nu}F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} + c_6 R_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} \\
& + c_7 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + c_8 F_{\mu\nu}F^{\nu\rho}F_{\rho\sigma}F^{\sigma\mu}
\end{aligned}
$$

- 場の再定義 $g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, は物理量を変えない

$$
\sqrt{-g}\cdot\mathscr{L} \to \sqrt{-g}\cdot\mathscr{L} + \sqrt{-g}\cdot \boxed{\left(\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} - F_{\mu}{}^{\rho}F_{\nu\rho}\right)\right)} \cdot \delta g^{\mu\nu}
$$

古典解 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, $F_{\mu\nu}$ に対して、**運動方程式**を使うことでこの寄与は消える

where

$$
\delta g^{\mu\nu} = -\frac{2}{M_{\rm Pl}^2}c_{23}R^{\mu\nu} + \frac{2}{M_{\rm Pl}^2}\left(c_{13} + \frac{1}{2}c_{23}\right)g^{\mu\nu}R - 2\left(c_5 + \frac{1}{M_{\rm Pl}^2}c_{23}\right)M_{\rm Pl}^{-2}F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} + 2\left(\frac{1}{4M_{\rm Pl}^2}c_{23} + c_4 + \frac{1}{2}c_5\right)M_{\rm Pl}^{-2}g^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}
$$

高階微分項を伴うEinstein-Maxwell理論

- 4階微分までの演算子を含むEinstein-Maxwell理論

$$\mathscr{L} = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$
$$+c_{13}R^2 + c_{23}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$$
$$+c_4 R F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + c_5 R_{\mu\nu}F^{\mu\rho}F^{\nu}{}_{\rho} + c_6 R_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$$
$$+c_7 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma} + c_8 F_{\mu\nu}F^{\nu\rho}F_{\rho\sigma}F^{\sigma\mu}$$
$$\to \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$
$$\boxed{\begin{aligned}&+c_6 R_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}\\ &+\left(\frac{1}{4M_{\rm Pl}^4}c_{23} + \frac{1}{4M_{\rm Pl}^2}c_5 + \frac{1}{2}(2c_7 + c_8)\right)(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \left(\frac{1}{4M_{\rm Pl}^4}c_{23} + \frac{1}{4M_{\rm Pl}^2}c_5 + \frac{1}{4}c_8\right)(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2\end{aligned}}$$

三つの高階微分項を含むEinstein-Maxwell理論について考える

重力を含む理論で相互作用をどのように定義するか

- 作用 $I[g_{\mu\nu}; R_{\mu\nu\rho\sigma}, A_\mu, \Phi]$ で記述される理論を考える

where Φ: 重たい場, A_μ: U(1) ゲージ場, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$: Riemann tensor, $g_{\mu\nu}$: 時空の計量

- 相互作用を次のように定義: $I_I = I - I_0$ with $I_0 = I[g_{\mu\nu}; R_{\mu\nu\rho\sigma}, A_\mu, 0] + I[g_{\mu\nu}; 0, 0, \Phi]$

Φと$(R_{\mu\nu\rho\sigma}, A_\mu)$の間の相互作用

ここで、Φと$g_{\mu\nu}$の間の相互作用は含まれてない

Φと$(R_{\mu\nu\rho\sigma}, A_\mu)$の相互作用から生じる高次演算子について考える

$\Rightarrow$ Φと$g_{\mu\nu}$の間の相互作用の効果は?

高階微分項を伴うEinstein-Maxwell理論への制約

- 4階微分までの演算子を含むEinstein-Maxwell理論

$$\mathscr{L} = \frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

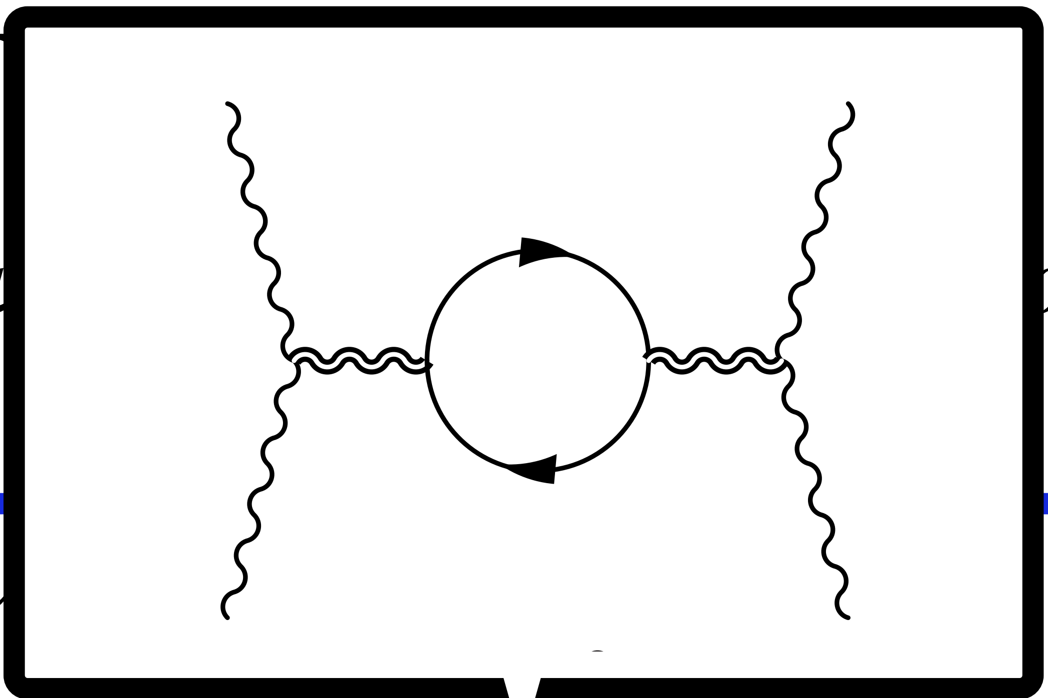
Φと$g_{\mu\nu}$の間の相互作用から生じうる

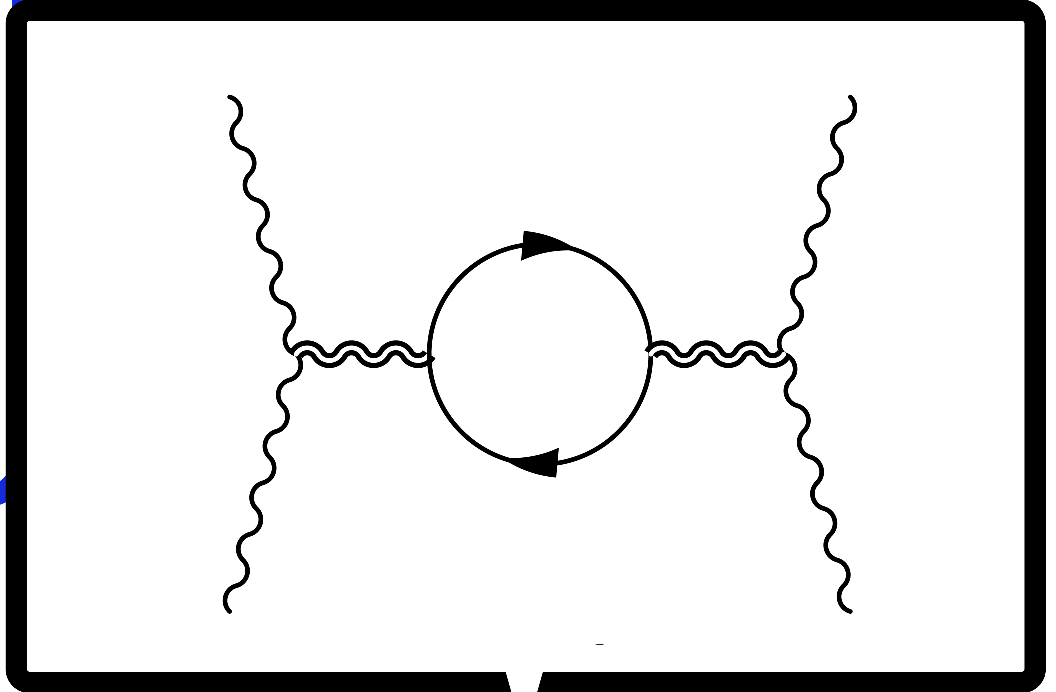
$$+\boxed{c_{13}R^2 + c_{23}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}}$$

$$+c_4 R F_{\mu\nu}F \quad + c_6 R_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$$

$$+c_7 F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad F_{\rho\sigma}F^{\sigma\mu}$$

By redefining $g^{\mu\nu}$





$$c_6 R_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} + \left(\boxed{\frac{1}{4M_{\rm Pl}^4}c_{23}} + \frac{1}{4M_{\rm Pl}^2}c_5 + \frac{1}{2}(2c_7 + c_8)\right)(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \left(\boxed{\frac{1}{4M_{\rm Pl}^4}c_{23}} + \frac{1}{4M_{\rm Pl}^2}c_5 + \frac{1}{4}c_8\right)(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2$$

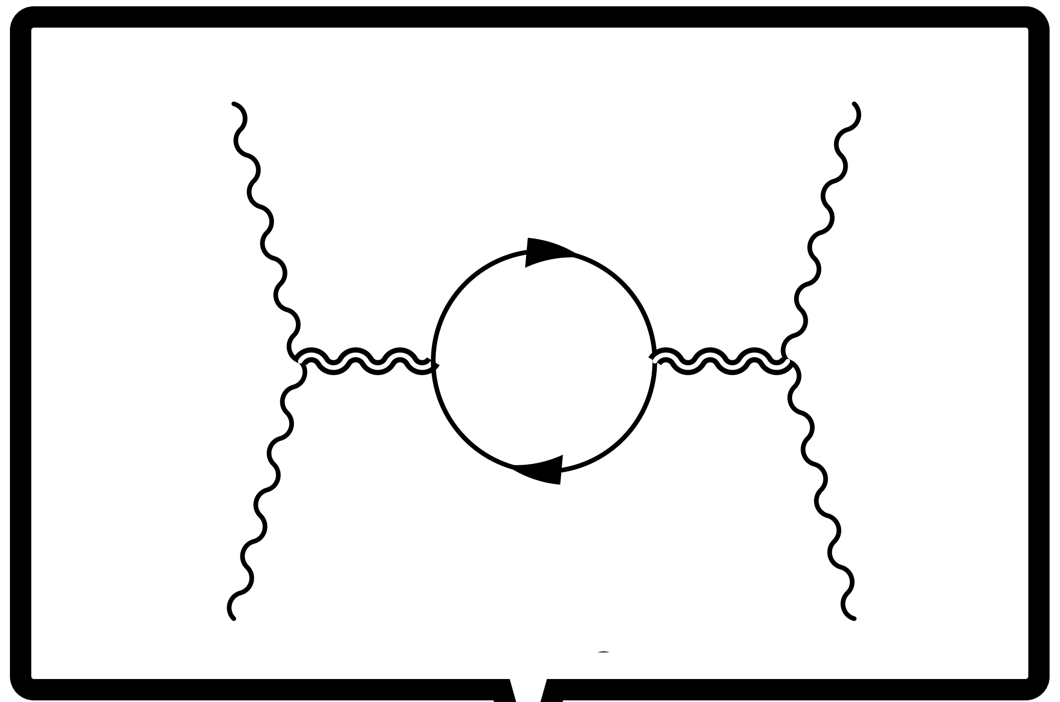
相対エントロピーの方法はピンクボックスの効果に対して制限を与えられない

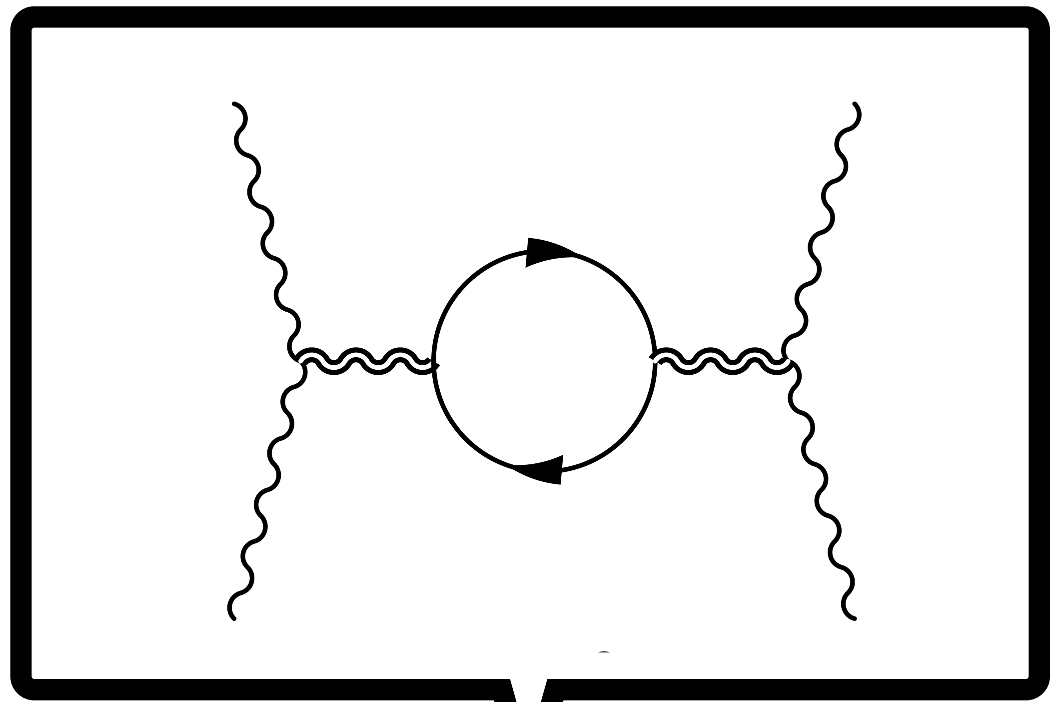
⇒この振る舞いは散乱振幅の議論の場合と似ている

[Yuta Hamada, Toshifumi Noumi, and Gary Shiu, arXiv: 1810.03637]

高階微分項を伴うEinstein-Maxwell理論への制約

- 4階微分までの演算子を含むEinstein-Maxwell理論





$$c_6 R_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma} + \left(\boxed{\frac{1}{4M_{\mathrm{Pl}}^4}c_{23}} + \frac{1}{4M_{\mathrm{Pl}}^2}c_5 + \frac{1}{2}(2c_7 + c_8)\right)(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \left(\boxed{\frac{1}{4M_{\mathrm{Pl}}^4}c_{23}} + \frac{1}{4M_{\mathrm{Pl}}^2}c_5 + \frac{1}{4}c_8\right)(F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu})^2$$

相対エントロピーの方法はピンクボックスの効果に対して制限を与えられない

⇒この振る舞いは散乱振幅の議論の場合と似ている

[Yuta Hamada, Toshifumi Noumi, and Gary Shiu, arXiv: 1810.03637]

ピンクボックスの効果が支配的でないこと, i.e., (重たい場の電荷)/(重たい場の質量) >>1を1-ループレベルで仮定する

Einstein-Maxwell理論への制約を求める際の前提条件

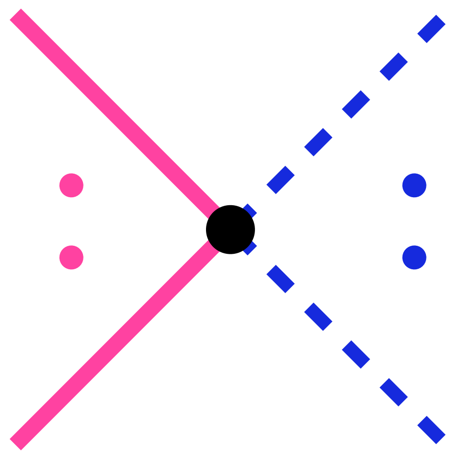
- 場の理論で記述されるUV理論からEFTが生成されているとする

- ボトムアップアプローチをとる:

  - Φ と $(R_{\mu\nu\rho\sigma},\ A_\mu)$ の間の相互作用から高階微分項が生成されているとする

$$I_I[g_{\mu\nu}; R_{\mu\nu\rho\sigma}, A_\mu, \Phi] = \int d^4x\sqrt{-g}\ \mathcal{O}[\Phi] \otimes J[g_{\mu\nu}; R_{\mu\nu\rho\sigma}, A_\mu] =$$

重い :



: 軽い

  - J は高階微分項を含まないとする　Ex. $J \propto F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\ R,\ \cdots$

- 主要な演算子への補正は場の再定義($A_\mu \to A_\mu + \delta A_\mu,\ \ g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$)で取り除ける

$$\int d^4x\sqrt{-g}\left[\boxed{\frac{M_{\rm Pl}^2}{2}R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}} + \frac{\alpha_1}{4M_{\rm Pl}^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_2}{4M_{\rm Pl}^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_3}{2M_{\rm Pl}^2}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\right]$$

$\Rightarrow$ シフト対称性を持つスカラー場の理論の場合と同じ制約の議論が使える

Einstein-Maxwell理論への制約

- 相対エントロピーの非負性:

$$S(P_A||P_B) = \int (d^4x)_E \sqrt{g} \left(\frac{\alpha_1}{4M_{Pl}^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_2}{4M_{Pl}^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_3}{2M_{Pl}^2}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \right) = -\lim_{T\to 0}(\Delta G)_{\beta,\mu} \geq 0$$

⇒ゼロ温度極限(extremal limit)で、自由エネルギーが高階微分項の効果によって小さくなる

$$\beta \cdot \boxed{G[\alpha_i;\beta,\mu]} = \int_\beta (d^4x)_E \sqrt{g} \left(-\frac{M_{Pl}^2}{2}R + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\alpha_1}{4M_{Pl}^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 - \frac{\alpha_2}{4M_{Pl}^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2 - \frac{\alpha_3}{2M_{Pl}^2}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \right)$$

理論Bの自由エネルギー

- 熱力学関係式を使うと以下が得られる

系の電荷と温度を固定したときの自由エネルギーの高階微分項によるシフト

$$\lim_{T\to 0}(\Delta M)_{\beta,Q} = \lim_{T\to 0}(\Delta G)_{\beta,\mu} + \mathcal{O}(\alpha_i^2)$$

系の電荷と温度を固定したときのエネルギーの高階微分項によるシフト

極大ブラックホールの質量

[Clifford Cheng, Junyu Liu, and Grant N. Remmen, arXiv: 1801.08546]

[G. Goon, and R. Penco, arXiv: 1909.05254]

Einstein-Maxwell理論への制約

- 相対エントロピーの非負性:

$$\boxed{S(P_A||P_B) = \int (d^4x)_\mathrm{E}\sqrt{g}\left(\frac{\alpha_1}{4M_\mathrm{Pl}^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_2}{4M_\mathrm{Pl}^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_3}{2M_\mathrm{Pl}^2}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\right) = -\lim_{T\to 0}(\Delta G)_{\beta,\mu} \geq 0}$$

⇒ゼロ温度極限(extremal limit)で、自由エネルギーが高階微分項の効果によって小さくなる

$$\beta \cdot \boxed{G[\alpha_i;\beta,\mu]} = \int_\beta (d^4x)_\mathrm{E}\sqrt{g}\left(-\frac{M_\mathrm{Pl}^2}{2}R + \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\alpha_1}{4M_\mathrm{Pl}^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 - \frac{\alpha_2}{4M_\mathrm{Pl}^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2 - \frac{\alpha_3}{2M_\mathrm{Pl}^2}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\right)$$

理論Bの自由エネルギー

- 熱力学関係式を使うと以下が得られる

$$\boxed{\lim_{T\to 0}(\Delta M)_{\beta,Q} = \lim_{T\to 0}(\Delta G)_{\beta,\mu} + \mathcal{O}(\alpha_i^2)}$$

[Clifford Cheng, Junyu Liu, and Grant N. Remmen, arXiv: 1801.08546]

[G. Goon, and R. Penco, arXiv: 1909.05254]

$$\lim_{T\to 0}(\Delta M)_{\beta,Q} = -S(P_A||P_B) + \mathcal{O}(\alpha_i^2) \leq 0$$

Einstein-Maxwell理論への制約

- 相対エントロピーの非負性:

$$S(P_A||P_B) = \int (d^4x)_{\mathrm{E}}\sqrt{g}\left(\frac{\alpha_1}{4M_{\mathrm{Pl}}^4}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_2}{4M_{\mathrm{Pl}}^4}(F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu})^2 + \frac{\alpha_3}{2M_{\mathrm{Pl}}^2}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\right) \geq 0$$

- 電荷を持つブラックホールの場合、熱力学関係式から次のようになった

$$\lim_{T\to 0}(\Delta M)_{\beta,Q} = -S(P_A||P_B) \leq 0$$ where Q は ブラックホールのU(1)電荷

電荷を固定したときの極大ブラックホールの質量の高階微分項によるシフト

高階微分項によるシフト

極大ブラックホールの電荷と質量の比: $\dfrac{Q}{M_{\mathrm{ext}}/\sqrt{2}M_{\mathrm{Pl}}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{Q}{(M_{\mathrm{ext}} + \lim_{T\to 0}(\Delta M)_{\beta,Q})/\sqrt{2}M_{\mathrm{Pl}}} \geq 1$

極大ブラックホールが電荷と質量の比が1より大きい状態として振る舞える

⇒ Mild Weak Gravity Conjecture

※ 1-ループレベルのUV理論では(重い場の電荷)/(重い場の質量) >>1を仮定している

まとめ

- 相対エントロピーは**相互作用のある理論とない理論の違い**を特徴付ける

- 相対エントロピーの非負性から**様々な現象の統一的な理解**が得られることがわかった

  Ex. - Ising模型の磁化率の非負性

  - SMEFT SU(N) ゲージボソン演算子への制約

  - Mild WGC

- 相対エントロピーは**EFTを制約する新しい方法**を提供する

- 様々な理論でその有効性を検証することが重要だと思う