2022/06/22　素核合同コロキウム@京都大学

BFSS行列模型における カオス的な不安定性

京都大学理学研究科　素粒子論研究室

吉田　健太郎

福島理氏(京大理)との共同研究に基づく。

[O. Fukushima and K. Y., arXiv:2204.06391]

0.　イントロダクション

カオスとはなにか?

おそらく誰しもが「カオス」という言葉を発したことがあるはず

例えば、机の上がぐちゃぐちゃになっているとき、

「これはカオスだ！」と言うとき、なにかがぐちゃぐちゃになっていると感じている。

実際、この性質はカオスの一面を捉えている： 複雑性 or 乱雑性 (Randomness)

上の例は、日常生活におけるカオス

ここでは、常微分方程式が記述する 非線形な力学系 のカオスに興味がある。

カオスの特徴

1. 初期値鋭敏性
2. 運動の乱雑さ (連続スペクトル)
3. 非周期的かつ有界な運動 (非解析性)

1つ目の性質は非常に重要であり、しばしば「バタフライ効果」と呼ばれる。

"Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?"

The flapping wing (= small change of initial conditions)
may cause a chain of events leading to large scale phenomena.

注　系は決定論的 (deterministic) ⟵ 微分方程式

しかし、長時間経った後の運動は予測できない。

遠い未来の天気予報は不可能 ⟶ 情報の損失
(Kolmogorov-Sinai エントロピー)

このエントロピー生成は、2つ目の乱雑性とも関係している。

カオスは弦理論の研究にも深く関連する

- ブラックホールの情報損失問題に関連？ [Hawking, arXiv:1401.5761]

- 弦の古典的な運動に現れる古典カオス

  AdS/CFT対応で、弦の古典カオスのゲージ理論での対応物？ [Too many]

  古典Yang-Mills理論におけるカオスの重力双対？

  [Matinyan-Savvidy-T.A. Savvidy, Sov. Phys. JETP 53 (1981) 421]

- 超弦理論を定式化する行列模型におけるカオス

  [For BFSS, Arefeva-Medvedev-Rytchkov-Volovich, hep-th/9710032]

  [For BMN, Asano-Kawai-KY, arXiv:1503.04594]

- 弦のカオス的な散乱？ [Gross-Rosenhaus arXiv:2103.15301], [Rosenhaus, arXiv:2112.10269]

背景の分類リスト

(昔に作ったリスト)

可積分な背景

Real beta-deformations [Frolov, hep-th/0503201]

Gravity duals for NC gauge theories [Matsumoto-KY, 1403.2703]

q-deformation of $AdS_5 \times S^5$ [Delduc-Magro-Vicedo, 1309.5850, Arutyunov-Borsato-Frolov, 1312.3542]

TsT transformatios of AdS_5 [Hubeny-Rangamani-Ross , hep-th/0504034] [Dhokarh-Haque-Hashimoto , 0801.3812] [Kawaguchi-Matsumoto-KY, 1401.4855]

非可積分な背景

Complex beta-deformations [Giataganas-Pando Zayas-Zoubos, 1311.3241]

$AdS_5 \times T^{1,1}$ [Basu-Pando Zayas, 1103.4107]

$AdS_5 \times Y^{p,q}$ [Basu-Pando Zayas, 1105.2540]

AdS BH [Pando Zayas-Terrero Escalante, 1007.0277]

AdS solitons [Basu-Das-Ghosh, 1103.4101]

Klebanov-Strassler, Maldacena-Nunez [Basu-Das-Ghosh-Pando Zayas, 1201.5634]

Schrödinger spacetime with $z = 4, 5, 6$ [Giataganas-Sfetsos, 1403.2703]

Lifshitz space (with hyper-scaling violation) [Giataganas-Sfetsos, 1403.2703] [Bai-Chen-Lee-Moon, 1406.5816]

p-brane backgrounds [Stepanchuk-Tseytlin, 1211.3727] [Chervonyi-Lunin, 1311.1521]

今日話す内容のまとめ

調べる模型

超弦理論の非摂動論的な定式化の候補として知られる

Banks-Fischler-Shenker-Susskind (BFSS) 行列模型

知られている二つの事実

- メンブレイン不安定性　[de Wit-Luscher-Nicolai, NPB320 (1989) 135]
- 古典カオス　[Arefeva-Medvedev-Rytchkov-Volovich, hep-th/9710032]

言いたいこと

この二つをまとめてカオス的な散乱として解釈できる。

特徴的な自己相似構造(フラクタル)やその相似次元を計算できる。

今日のセミナーのプラン

1. カオス的散乱のレビュー　(25分)

   具体例：　Four-hill potential model

   Time delay function, Cantor集合, 相似次元の計算

2. BFSS行列模型における不安定性とカオス的散乱 (20分)

   BFSS行列模型のレビュー含む

   Time delay function, Cantor集合, 相似次元の計算

3. まとめと今後の展望 (5分)

1.　カオス的散乱のレビュー

Four-hill potential modelを具体例にして、カオス的散乱における基礎的な事項について概説する。

古典カオスの振る舞い

長時間におけるカオス的な挙動

通常、古典カオスを議論するときは、有界な領域における運動を議論。

一方で、短時間のみカオス的な挙動を示す場合もある。

⇒ 過渡的なカオス (Transient Chaos)

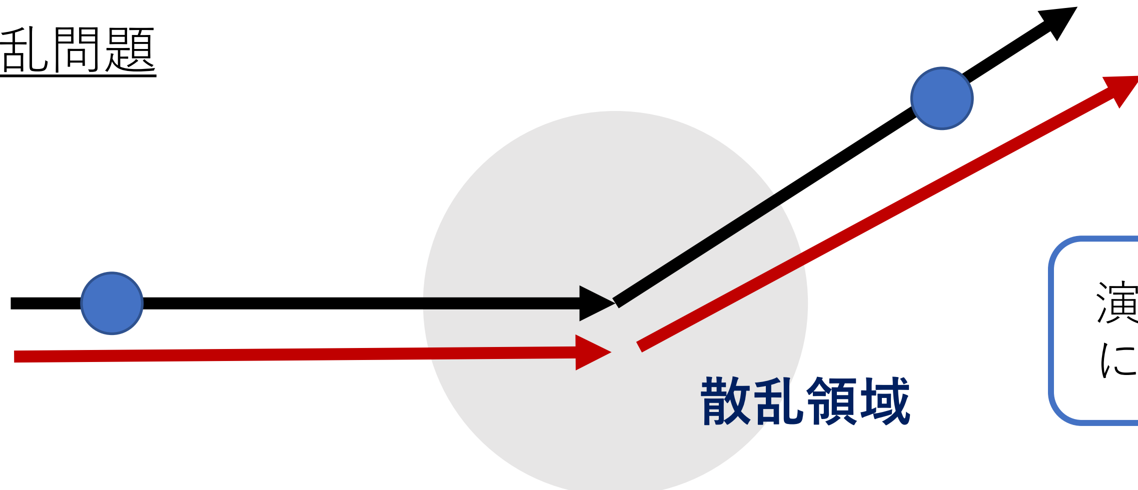
過渡的なカオスの実現例：

カオス的な散乱 (Chaotic Scattering)

カオス的な散乱 (Chaotic Scattering)

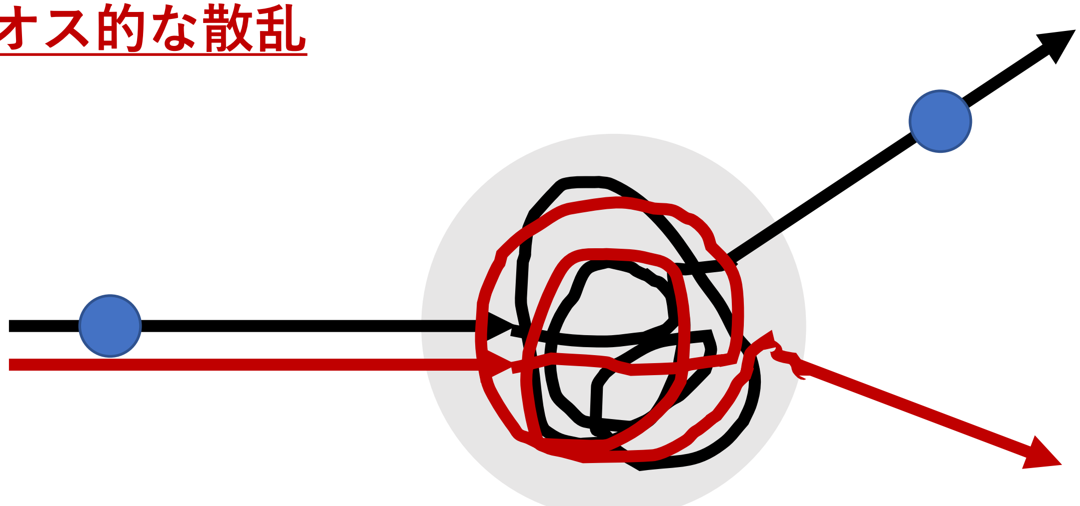
<u>散乱問題</u>

初期値が少しずれると
散乱角も少しずれる



演習問題の散乱問題は厳密
に解けるポテンシャル

<u>**カオス的な散乱**</u>

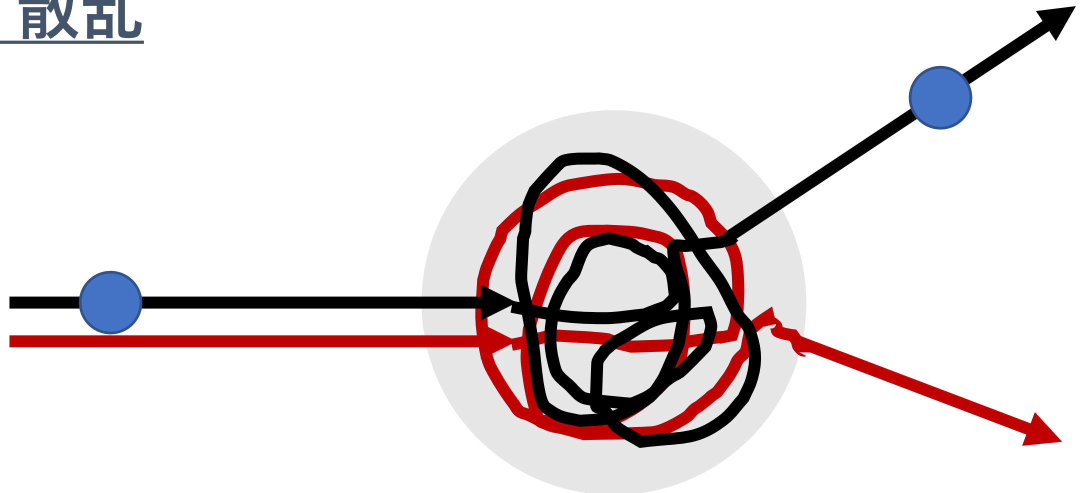


散乱領域における
カオス的な挙動

散乱角に強い初期値鋭敏性

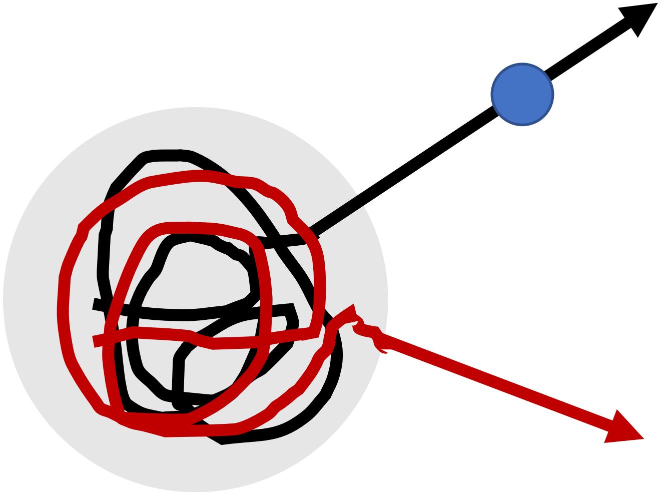
カオス的な散乱の２つのセットアップ

1) 散乱



粒子を散乱領域
に入射する

2) 崩壊



初期値を散乱領域
の内部にとり、
粒子の放出を見る

以下では、BFSS行列模型への応用を念頭において、

four-hill potential modelで 2) 崩壊 のセットアップで

カオス的な散乱の解説をする。

注： 1）散乱 か 2）崩壊 かによって、計算する量が異なる。

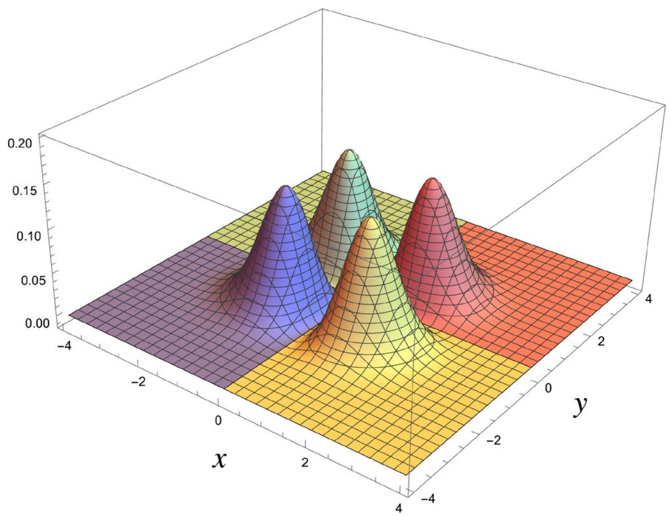
1）散乱の場合の計算に興味のある方は、以下の文献を参照。

2）崩壊の場合も詳しい説明あり。

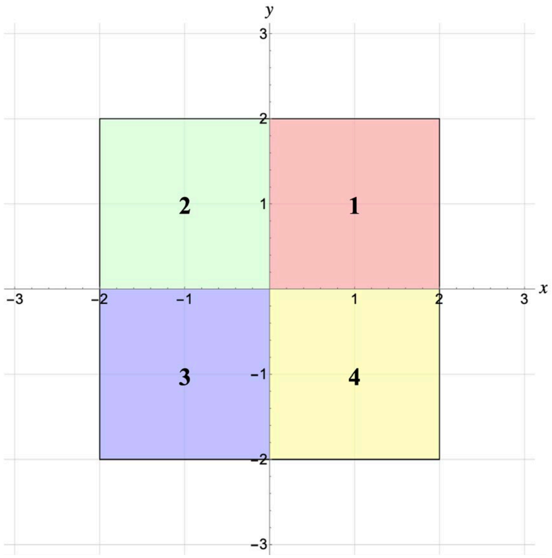
J. M. Seoane and M. A. F. Sanjuan,
``New developments in classical chaotic scattering, ''
Reports on Progress in Physics, 76, 016001.

Four-hill potential model

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + x^2 y^2 \exp\left(-x^2 - y^2\right) \,,$$



図：　ポテンシャル

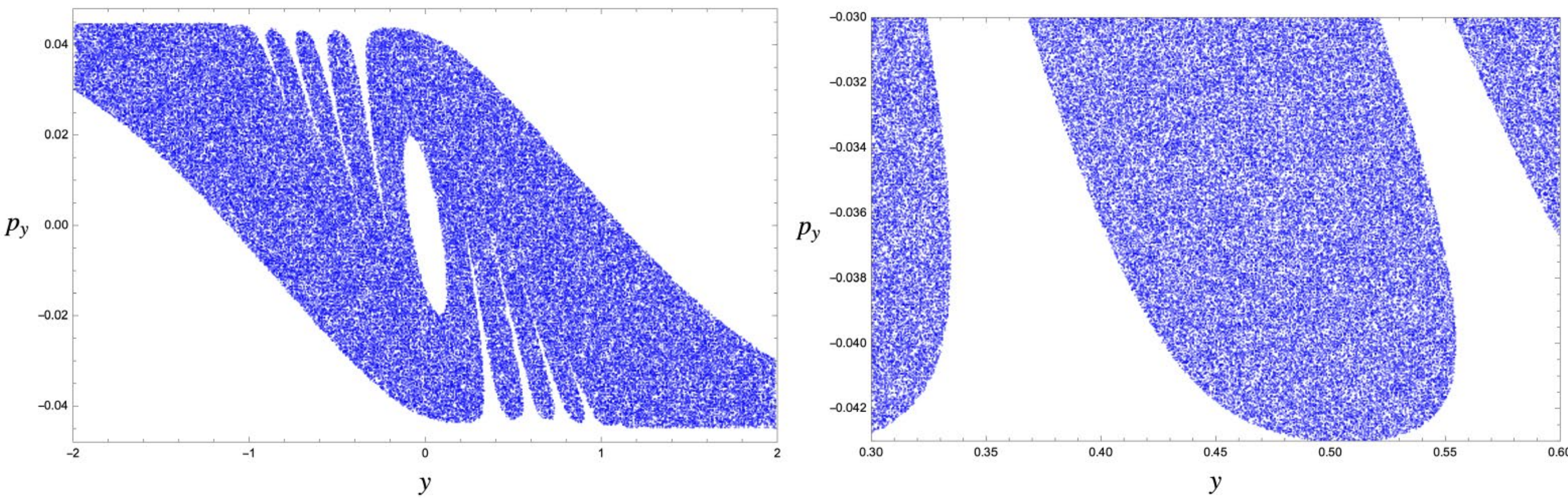


図：カオス的散乱の領域 (カオス領域)

4本の柱でビリヤード的に散乱

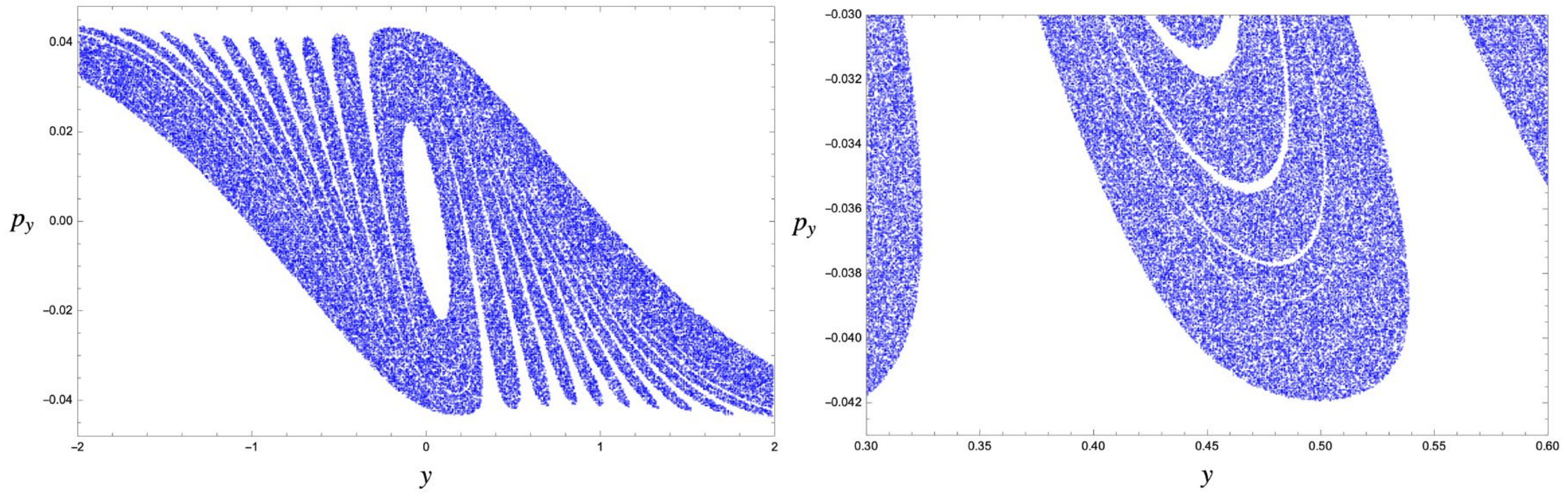
カオス領域内に残る軌道の初期値

E=0.001, x=0, $p_x > 0$ ➡ (y, p_y) の組で初期値が一つ決まる。

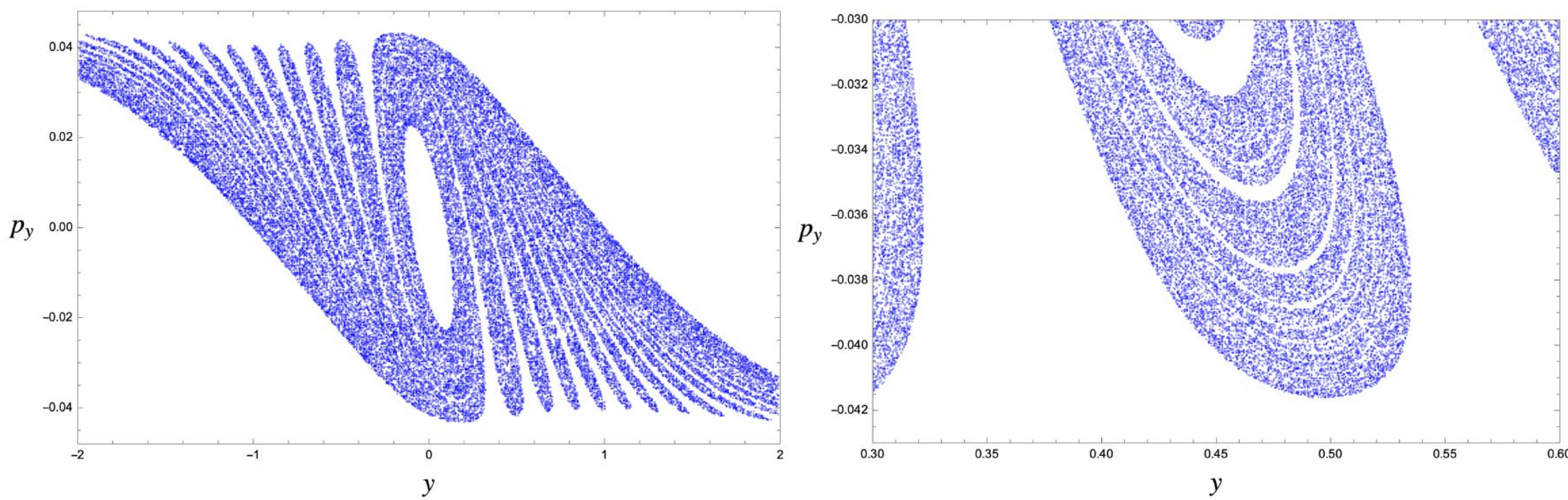


(a) The initial points which remain at $t = 70$

- t=70でカオス領域に滞在している初期値が青い点。
- カオス領域の外に逃げていった軌道の初期値は白くなっている。
- 真ん中の白い部分はカオス領域の真ん中からすぐに外にでてしまう軌道。



(b) The initial points which remain at $t = 100$



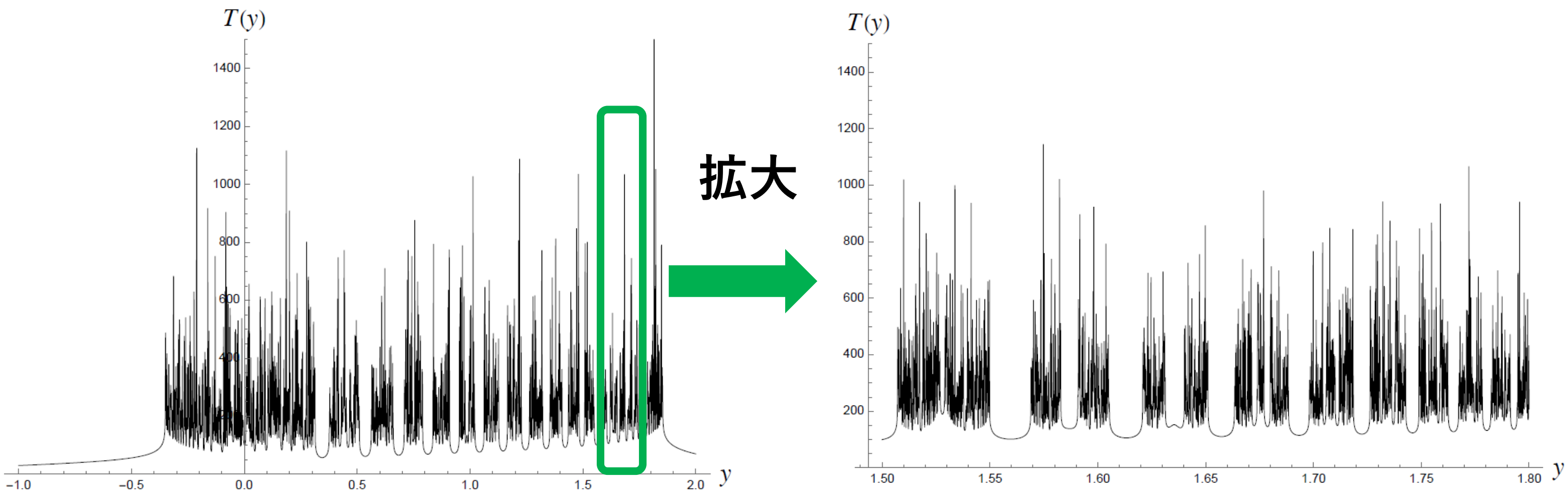
(c) The initial points which remain at $t = 150$

自己相似構造が見える　＝　フラクタル

Time delay function

初期値をE=0.001, x=0, p_y=-0.03 として、yのみで初期値をパラメトライズする。

カオス領域から逃げ出す時間をTとして縦軸、yを横軸にしてプロット。



平坦な部分はすぐに逃げ出す初期値 → 自己相似構造 (フラクタル)

カントール集合に類似

カントール集合

線分を３等分し、得られた線分の真ん中のものを取り除くという操作を再帰的に繰り返すことで得られる集合。

出典：Wikipedia

相似次元は

$$D_S = \log_3 2 = 0.6309$$

(1よりも小さい)

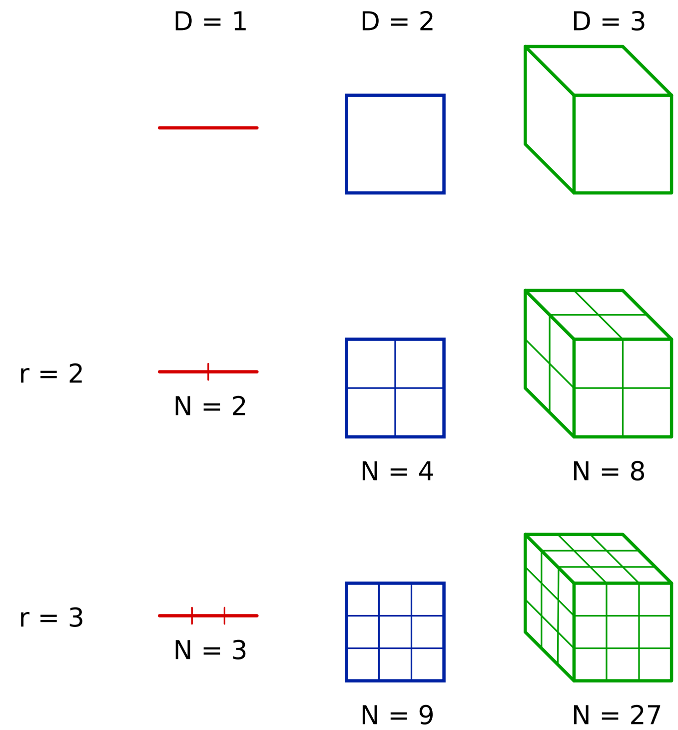
(1/3倍して、必要な個数は２つ)

相似次元

(ハウスドルフ次元、box counting dimension、フラクタル次元ともよばれる。
厳密には違いがあるが、ここでは詳細には踏み入らない。)

例： 正方形(2次元)の各辺を1/2倍して、
4つ集めると元の正方形。
立方体(3次元)の各辺を1/2倍して、
8つ集めると元の立方体。

一般に、*D*次元の立方体を1/*r*倍して、
r^D 個集めると元の立方体



出典：Wikipedia

相似次元の定義

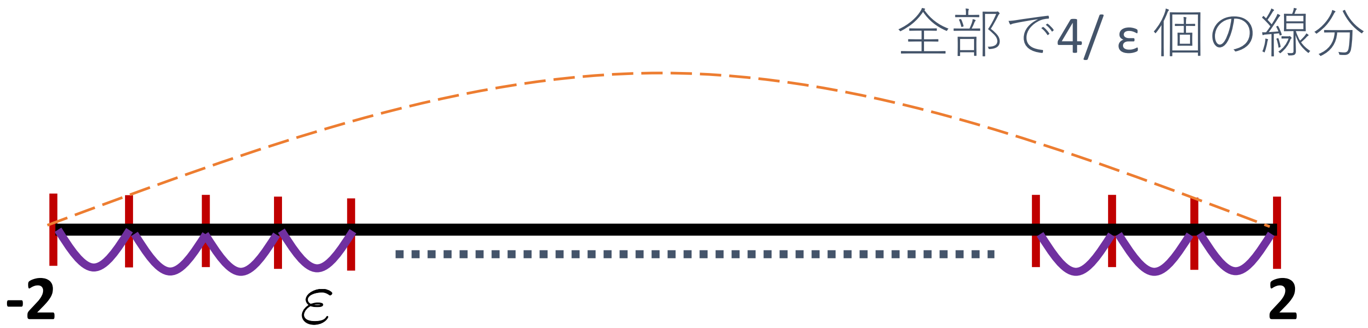
$D_S = \log_r$ (元の形を復元するのに必要な数)

$\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$ に注意

Time delay functionに対して、相似次元を計算できるか？

カオス領域の y 方向の幅は-2から2までの4 。

この幅4を微小な長さεで分割する。



この微小線分εの中にピークがある確率f(ε)を求めることができれば、

$$D_{\mathrm{S}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log((4/\varepsilon) \cdot f(\varepsilon))}{\log(4/\varepsilon)} = 1 - \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log f(\varepsilon)}{\log \varepsilon}$$

として、計算できる。

微小線分εの中にピークがある確率f(ε)の計算法

ある点 $x_0 \in [-2,2]$ をランダムに選ぶ。このとき、ある h に対して、

$$|T(x_0+\epsilon)-T(x_0)|>h$$

Time delay functionの高さを見て決める。ここでは *h*=50

この x_0 はε-uncertainであるという。

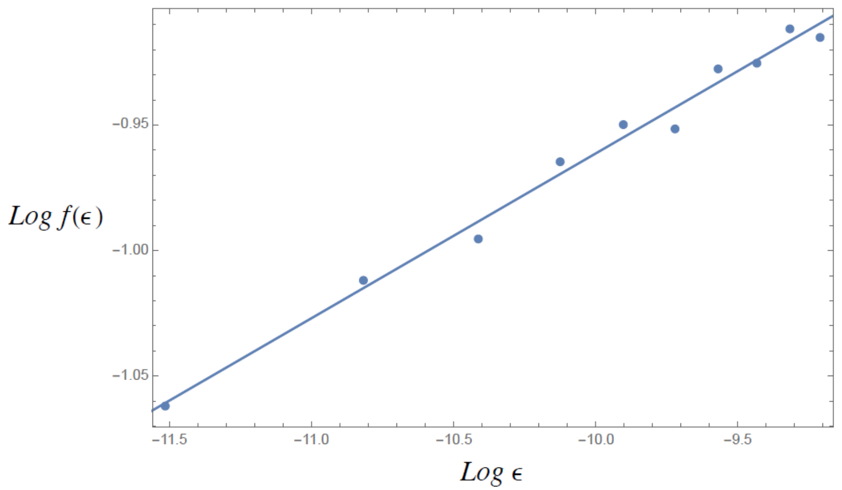
この操作を*N* 回繰り返して、N_ε回 ε-uncertainであったら、

$$f(\varepsilon)=\frac{N_\varepsilon}{N}$$

εの値を変えて、計算を繰り返す。

$$\log f(\varepsilon)=0.066\log\epsilon-0.31$$

が読み取れ、$D_s=0.93$ となる。



2. BFSS行列模型における不安定性とカオス的散乱

先の節で導入したカオス散乱に関する量をBFSS行列模型で計算する。

膜(メンブレイン)の不安定性とカオス散乱の関係について議論する。

超弦理論における最重要研究課題の一つ

超弦理論の非摂動論的な定式化

超弦理論をどう定式化するか？

ひもの理論だけど、ひもから出発する必然性はない。

超弦理論にはD-ブレインなど様々なオブジェクトがいて、みんな平等。

ブレインデモクラシー　　c.f., Townsend, hep-th/9507048

例えば、D0-ブレインをたくさん用意しておけば、超弦理論を再構成できそう。

D0-ブレインの多体系を記述する理論 ⟹ **BFSS行列模型**

[Banks-Fischler-Shenker-Susskind, hep-th/9610043]　被引用数2981 (2022/6/20)

よいレビューとして、 W. Taylor, hep-th/0101126.

BFSS行列模型の古典作用　(ボソン部分のみ)

$$S = \int dt\, \mathrm{Tr} \left(\frac{1}{2} \sum_{r=1}^{9} (DX^r)^2 + \boxed{\frac{1}{4} \sum_{r,s=1}^{9} [X^r, X^s]^2} \right)$$

$$DX^r \equiv \frac{d}{dt} X^r - i[A, X^r]$$

ゲージ群 *SU*(*N*) の1次元ゲージ理論,　X^r は *N* x *N* エルミート行列

ガウス則拘束条件：　$0 = \sum_{r=1}^{9} [X^r, DX^r]$

添え字 *r*,*s* = 1, ... , 9 は時空の空間方向を表すインデックス。

ポイント：　ポテンシャルに平坦方向が存在する

行列の解釈

行列の対角成分は、D0-ブレインの座標

$$X^r = \begin{pmatrix} x^r_{(1)} & & & \\ & x^r_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x^r_{(N)} \end{pmatrix}$$

$x^r_{(i)}$ は *i* 番目のD0-ブレインの座標

- 非対角成分はD0-ブレイン間の相互作用を媒介

BFSS行列模型は超膜理論の行列正則化としても得られる。

[de Wit-Hoppe-Nicolai, NPB305(1988) 545]

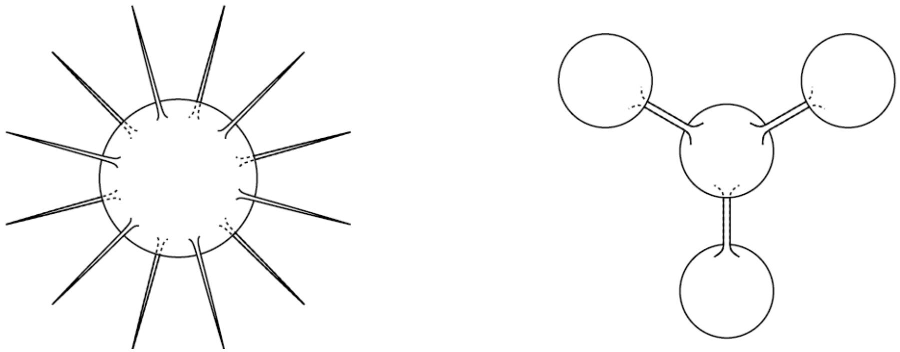
$$X^r = \begin{pmatrix} X^r_{(1)} & & & \\ & X^r_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & X^r_{(M)} \end{pmatrix}$$

ブロック対角な部分を膜
として解釈できる

メンブレイン不安定性

[de Wit-Luscher-Nicolai, NPB320 (1989) 135]

ポテンシャルに平坦方向があるので、膜は無限に伸びることができる。



[p.17 & 20 of W. Taylor, hep-th/0101126]

ボソニックの場合、古典的なポテンシャルには平坦方向があるが、
量子補正でポテンシャルが持ち上がり、不安定性は消失する。

しかし、超対称性がある場合には、量子補正が相殺され、平坦方向は保存される。

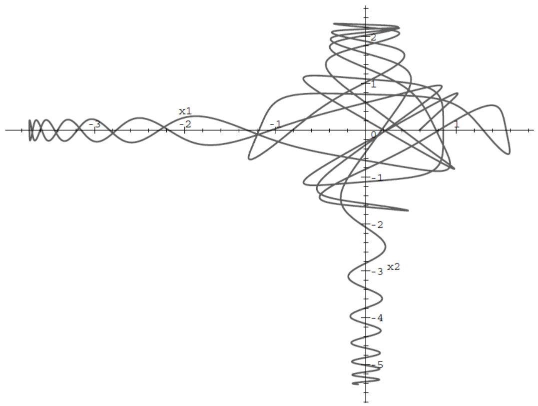
de Wit, et al. の論文のタイトルは、``The supermembrane is unstable''.

この不安定性に基づいて、膜理論を第２量子化した理論として解釈できる。

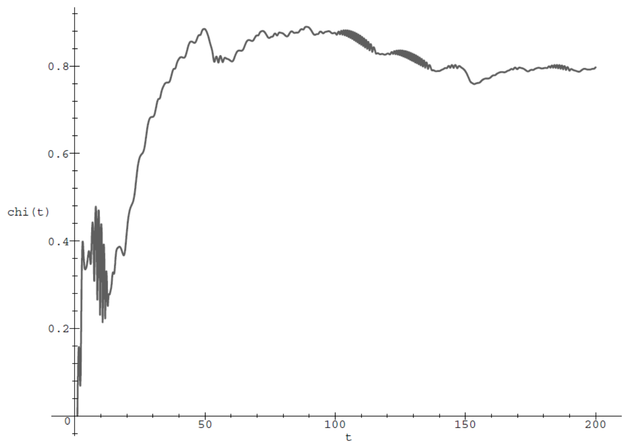
BFSS行列模型における古典カオス

[Arefeva-Medvedev-Rytchkov-Volovich, hep-th/9710032]

いろいろなansatzを置いて系をリダクションし、カオス的な軌道をプロットしたり、リヤプノフ指数を計算。



典型的な軌道



リヤプノフ指数

カオス的散乱として、メンブレイン不安定性を記述できないか？

BFSS行列模型のリダクション

カオス的な振る舞いを調べるために、特別な配位に注目：

$$X^1(t) = x(t)\frac{\sigma^1}{2}\,, \quad X^2(t) = y(t)\frac{\sigma^2}{2}\,, \quad X^3(t) = z(t)\frac{\sigma^3}{2}\,,$$
$$X^s(t) = 0 \qquad (s = 4, \ldots, 9)\,.$$

一つの小さなメンブレインの配位

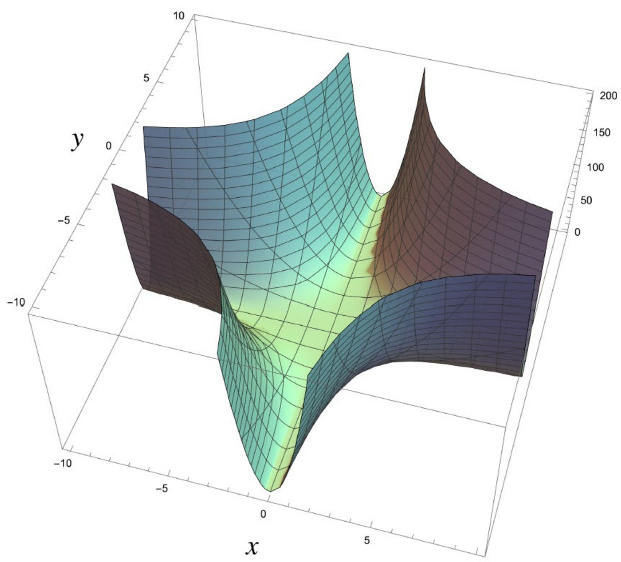
運動方程式は次のように簡略化される：

$$0 = \frac{d^2}{d\tau^2}x(t) + x(t)\big(y(t)^2 + z(t)^2\big)\,,$$
$$0 = \frac{d^2}{d\tau^2}y(t) + y(t)\big(z(t)^2 + x(t)^2\big)\,,$$
$$0 = \frac{d^2}{d\tau^2}z(t) + z(t)\big(x(t)^2 + y(t)^2\big)\,.$$

ガウス則拘束条件も満たされる。

解析を簡単にするために、さらに z=0 と置くと、系のダイナミクスは
次のハミルトニアンで記述される：

$$H = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} + \frac{x^2 y^2}{2}$$



注：この系は、BFSS行列模型だけでなく、
4次元Yang-Mills理論からも導出できる。

[Matinyan-Savvidy-T.A. Savvidy, Sov. Phys. JETP 53 (1981) 421]

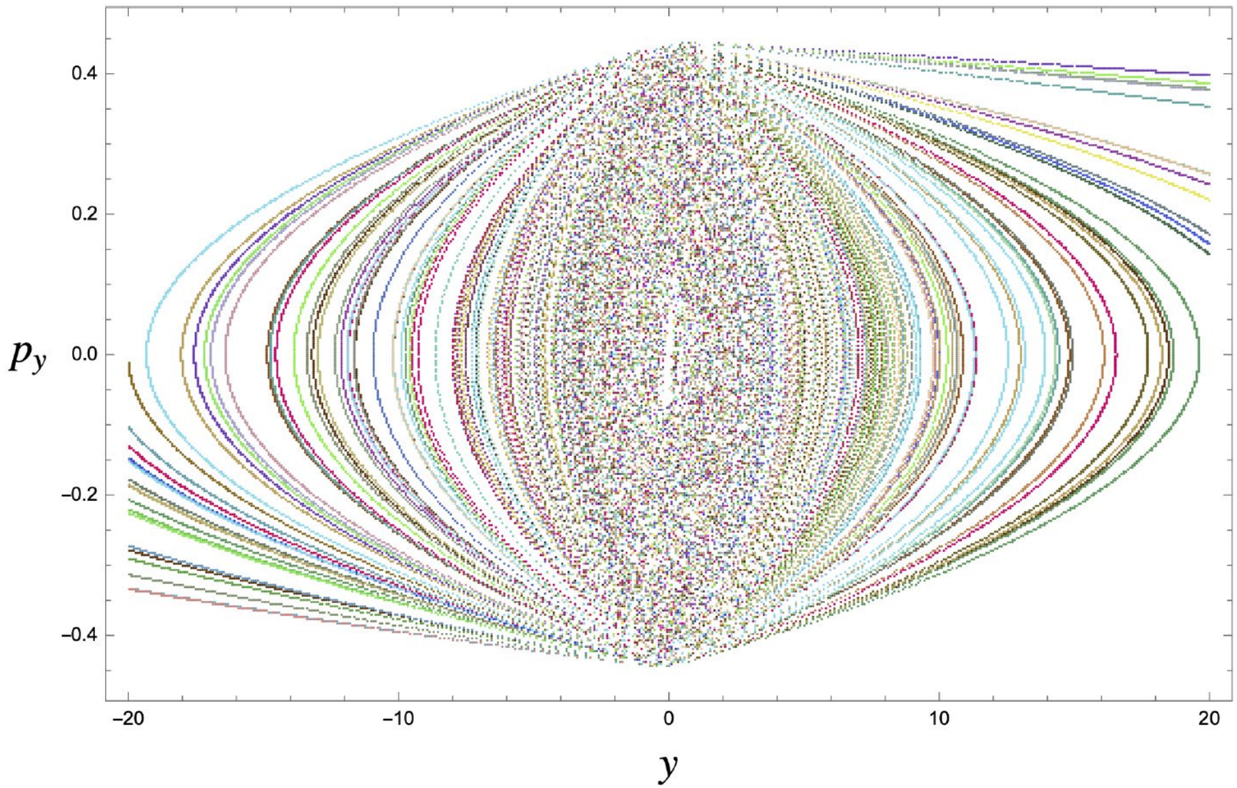
[Arefeva-Medvedev-Rytchkov-Volovich, hep-th/9710032]

ポテンシャル：　平坦方向が存在

ポアンカレ切断

色の違いは初期値の違い。

E=0.1, x=0, px >0

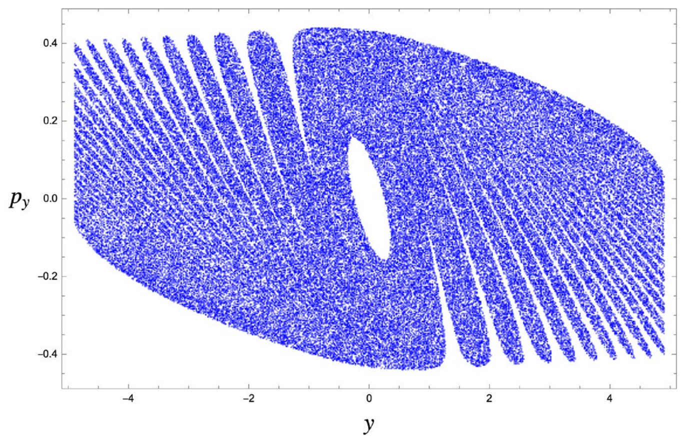


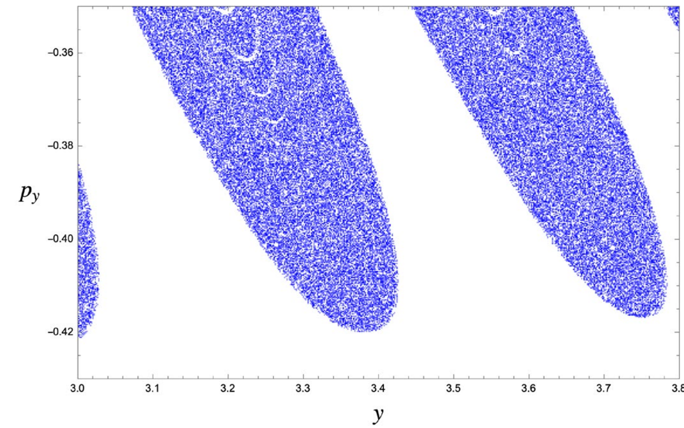
カオス的な振る舞いは -5< y < 5 の内部に集中しているので、

カオス領域をこの範囲に設定して計算してみる。

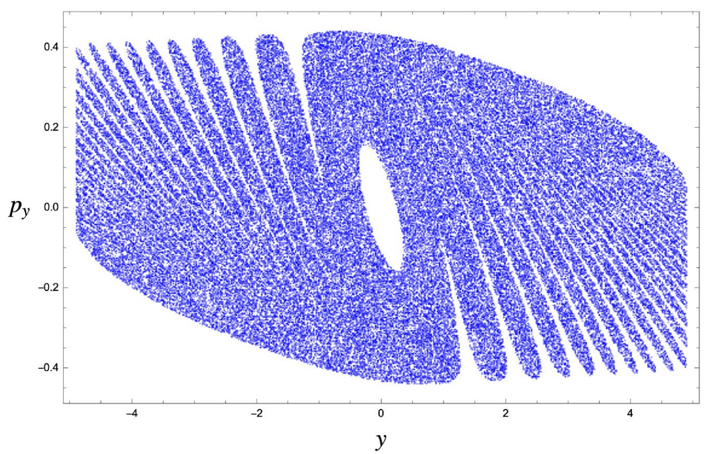
カオス領域中に残る初期値の図

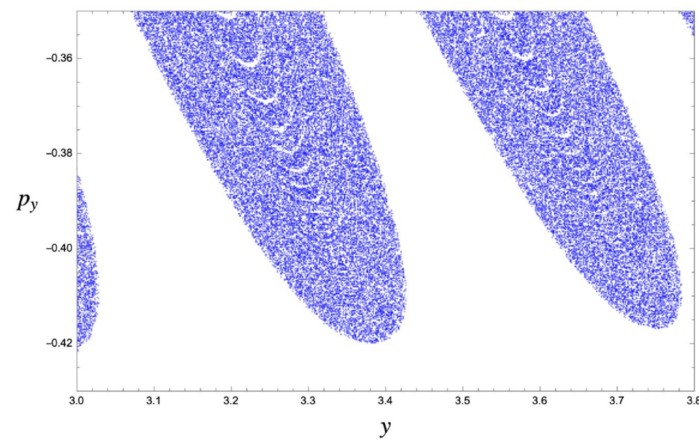
E=0.1, x=0, $p_x > 0$　として、(y, p_y) の組で初期値を一つ決める。





t=40



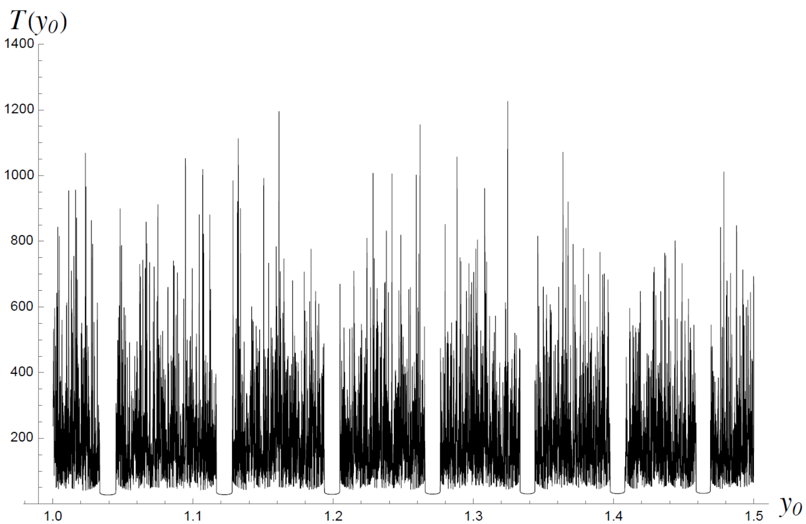


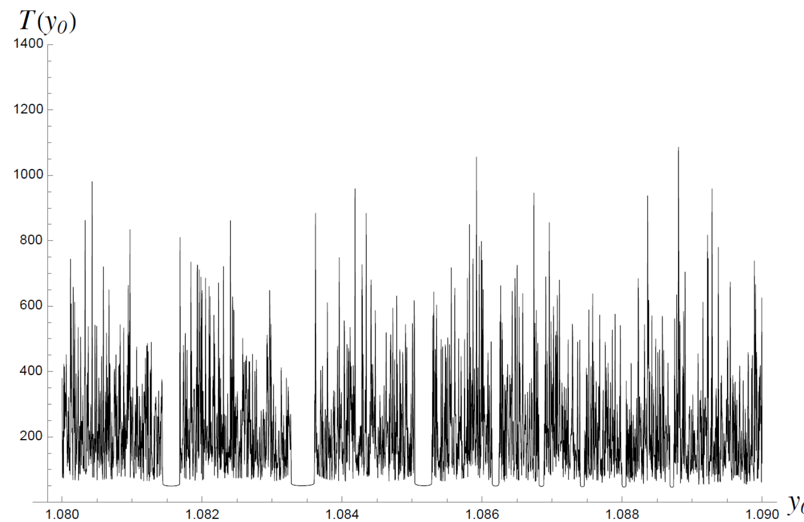
t=70

Time delay function

初期値を$E=0.1$, $x=0$, $p_y=0.3$ として、yのみで初期値をパラメトライズする。

カオス領域から逃げ出す時間をTとして縦軸、yを横軸にしてプロット。

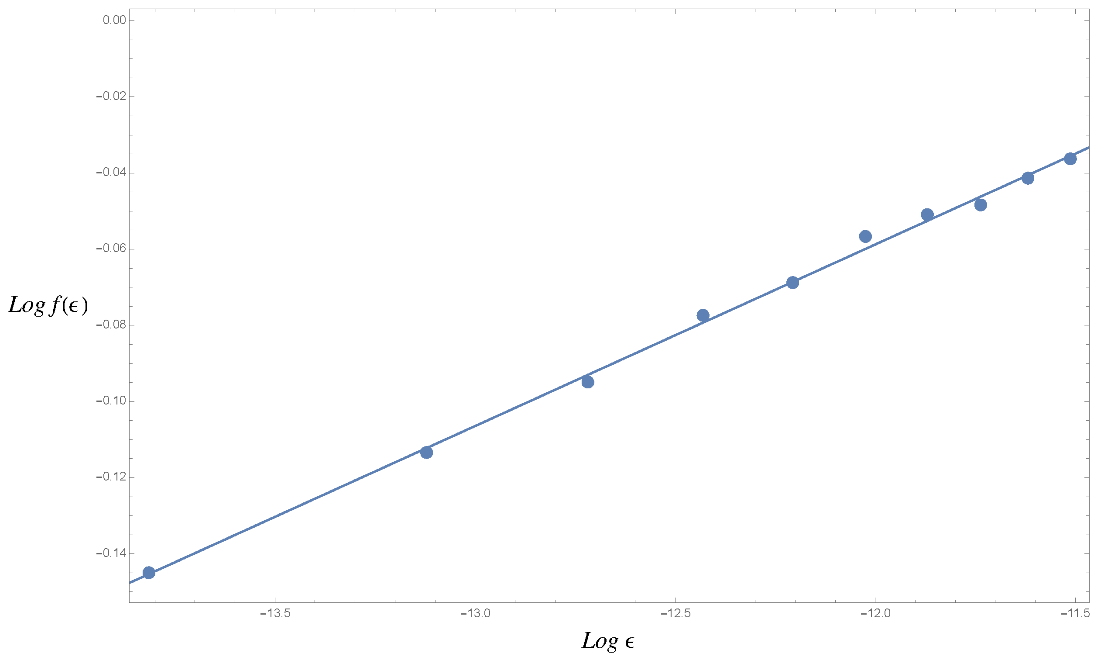




Four-hill potential modelと同様に、カントール集合の構造が見える。

相似次元の計算

Four-hill potential modelの場合と同様に計算



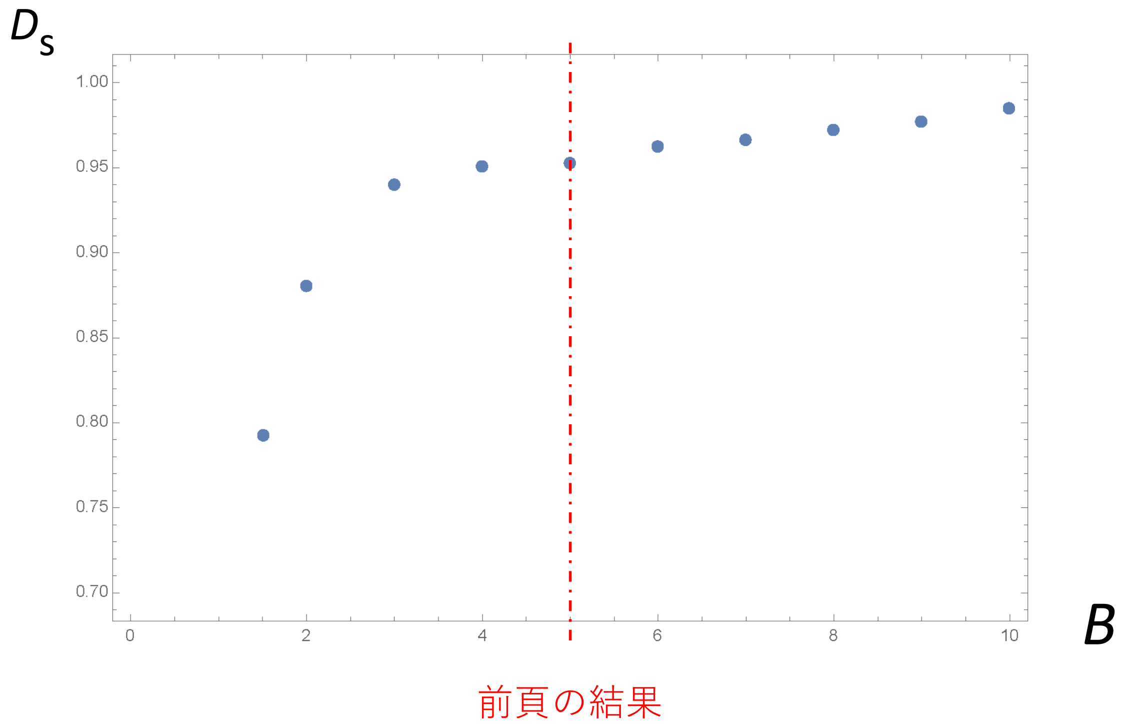
h=1

$$\log f(\varepsilon) = 0.048 \log \varepsilon + 0.514$$ であり、

相似次元は $D_{\mathrm{S}} = 0.95$

カットオフ依存性

カットオフ (箱の大きさ) を変えたときの相似次元の変化



緩やかではあるが
上がっていく傾向？

カットオフを大きくすると、
相似次元の計算が不安定に

カットオフのサイズは何らかの物理的な要請で決めるべき？

3.　　　まとめと今後の展望

まとめ

- BFSS行列模型におけるメンブレイン不安定性 = カオス的な散乱
- カオス領域に残る軌道の初期値空間における自己相似構造
- time delay functionのカントール集合とその相似次元の計算

今後の展望

- フラクタル次元の計算の精密化、カットオフ依存性の理解
- フラクタル次元のエネルギー依存性、結合定数依存性の解析

  c.f., リヤプノフ指数のエネルギー依存性　[Hashimoto-Murata-Tanahashi-Watanabe, 2112.11163]
- D0-ブレインを放出することによる情報損失

  (トポロジカルエントロピー)

Thank you for your attention!