
Cosmic strings from pure Yang-Mills theory



東北大学
山田 將樹

in collaboration with
Kazuya Yonekura (Tohoku Univ.)

Based on hep-th/2204.13123, hep-th/2204.13125



June 1st, 2022 - 京都大学セミナー

目次

- Cosmic strings
- 1-form symmetry and cosmic strings
- Cosmic string のその他の性質
- Cosmic string の時間発展と重力波の放射
- まとめ

Cosmic strings: U(1)対称性の場合

- 通常、U(1)対称性がSSBするときにcosmic stringが形成される。

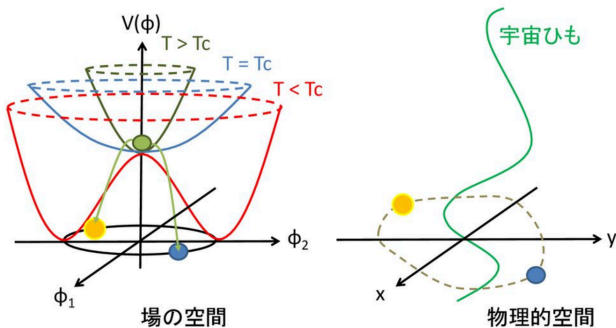
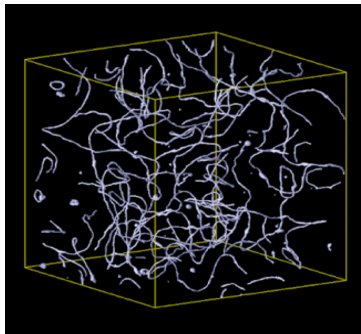
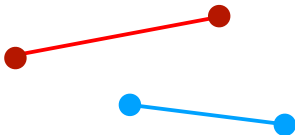


Figure from Daisuke Yamauchi



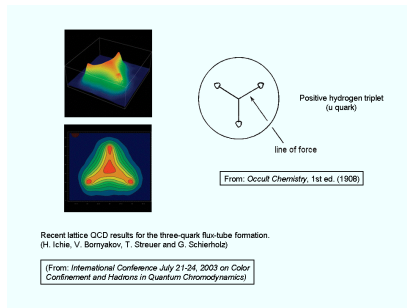
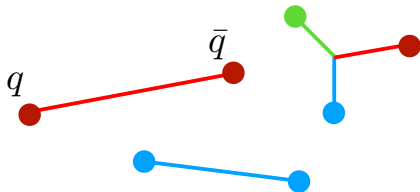
Cosmic strings: U(1)対称性の場合

- 通常、U(1)対称性がSSBするときにcosmic stringが形成される。
- UV理論として $SU(2) \rightarrow U(1)$ のSSBも起きていたとすると、
 - $SU(2) \rightarrow U(1)$ の相転移でモノポールが形成される。
 - $U(1) \rightarrow \text{nothing}$ の相転移でモノポール反モノポールをつなぐようにcosmic stringが形成される。



Cosmic strings: SU(N)ゲージ理論の場合

- "string" といえは他にも、SU(N)ゲージ理論の color flux tube が考えられる。
 - 高温ではクォークはバラバラに存在できる。
 - 閉じ込めの相転移が起こると、カラーを閉じ込めるようにcolor flux tubeが形成される。



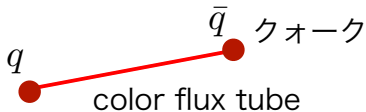
Cosmic strings: SU(N)ゲージ理論の場合

- "string" といえは他にも、SU(N)ゲージ理論の color flux tube が考えられる。

強結合理論の閉じ込め

高温: Deconfinement phase

低温: Confinement phase

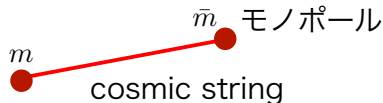


双対性
↔

弱結合理論のSSB

高温: Symmetric phase

低温: Higgs phase



Seiberg, Witten '94

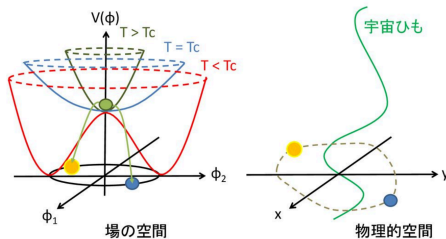
- クォークがいなくてもcolor flux tubeは形成されるはず。

Cosmic strings: SU(N)ゲージ理論の場合

- SSBに伴って cosmic string が存在するかどうかは、homotopy group で判断できる:

$G \rightarrow H$ の対称性の破れが起こったとき、

$\pi_1(G/H) \neq 1 \leftrightarrow \text{cosmic string が存在する。}$



- しかしこれは SU(N) の color flux tube のようなものに対して適用できない。
この場合にも適用できるような systematic な議論はないか？
→ generalized (higher-form) symmetry

Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett, '14

One-form symmetry と cosmic string

1-form symmetry: formalizm

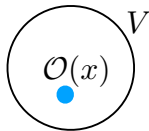
- 通常の(大域的) $U(1)$ 対称性 (0-form symmetry)

チャージ: $Q = \int dV J^0$

保存則: $Q(V_1) - Q(V_2) = \int_{\Gamma} dJ = 0$

粒子の変換性: $U(\alpha)\mathcal{O}(x)U(\alpha)^\dagger = e^{iq\alpha}\mathcal{O}(x)$

$U(\alpha) = \exp[i\alpha Q]$ (引数の V は略)



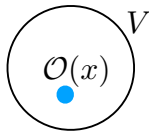
1-form symmetry: formalizm

- 通常の(大域的) $U(1)$ 対称性 (0-form symmetry)

チャージ: $Q = \int dV J^0$

保存則: $Q(V_1) - Q(V_2) = \int_{\Gamma} dJ = 0$

粒子の変換性: $U(\alpha)\mathcal{O}(x)U(\alpha)^\dagger = e^{iq\alpha}\mathcal{O}(x)$ $U(\alpha) = \exp[i\alpha Q]$ (引数の V は略)

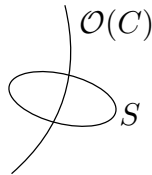


- 1-form $U(1)^{[1]}$ symmetry:

チャージ: $Q = \frac{1}{2} \int dS_{\mu\nu} J^{\mu\nu}$ ← カレントが2-form

保存則: $Q(S_1) - Q(S_2) = \int_V dJ = 0$ ← # of intersection

String の変換性: $U(\alpha)\mathcal{O}(C)U(\alpha)^\dagger = e^{iq\alpha\langle C,S \rangle}\mathcal{O}(C)$



Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett, '14

1-form discrete symmetry: formalism

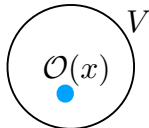
- 通常の(大域的) Z_3 対称性 (0-form symmetry)

~~チャージ:~~ $Q = \int dV J^0$

保存則: $Q(V_1) - Q(V_2) = \int_{\Gamma} dJ = 0$

粒子の変換性: $U(\alpha) \mathcal{O}(x) U(\alpha)^\dagger = e^{iq\alpha} \mathcal{O}(x)$ ~~$U(\alpha) = \exp[i\alpha Q]$~~ (引数の V は略)

$q = 2\pi/3$

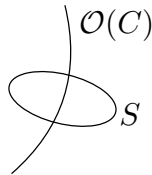


- 1-form $Z_3^{[1]}$ symmetry:

~~チャージ:~~ $Q = \frac{1}{2} \int dS_{\mu\nu} J^{\mu\nu}$

保存則: $Q(S_1) - Q(S_2) = \int_V dJ = 0$ # of intersection

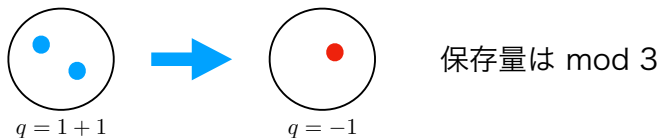
String の変換性: $U(\alpha) \mathcal{O}(C) U(\alpha)^\dagger = e^{iq\alpha \langle C, S \rangle} \mathcal{O}(C)$



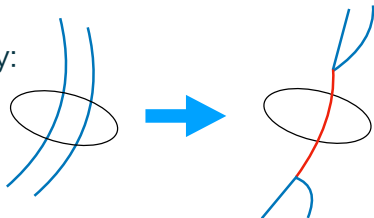
Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett, '14

1-form discrete symmetry と cosmic strings

- 通常の(大域的) Z_3 対称性 (0-form symmetry)



- 1-form $Z_3^{[1]}$ symmetry:



保存量は mod 3 (3本のstringはvertexで結合できる)

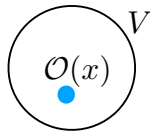
1-form symmetry: SSB

Gaiotto, Kapustin, Seiberg, Willett, '14

- 通常の(大域的)対称性 (0-form symmetry)

全ての荷電演算子について $\langle 0 | \mathcal{O}(x) | 0 \rangle = 0$ であるとき、対称性は破れていない。

このとき、 $\mathcal{O}(x) | 0 \rangle$ は電荷を持った粒子が存在する状態を表す。



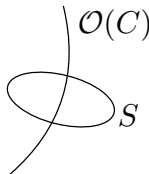
- 1-form symmetry:

全ての荷電演算子について $\langle 0 | \mathcal{O}(C) | 0 \rangle \approx 0$ であるとき、対称性は破れていない。

このとき、 $\mathcal{O}(C) | 0 \rangle$ は電荷を持った一次元の物体を作る。

つまり、1-form symmetry が破れていないときにstring状の物体が存在している。

Wilson loop operator など



1-form symmetry: Scalar QED の例

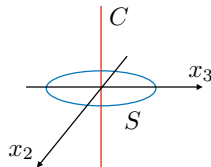
● 例1: Scalar QEDにおける $U(1)^{[1]}$ 対称性

- ビアンキ恒等式 $\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\nabla_\mu F_{\rho\sigma} = 0$ より、 $J^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F_{\rho\sigma} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}$ が保存する。
 ← カレントが2-form

- Higgs phase では one-form $U(1)^{[1]}$ symmetry が破れていない。

そして、cosmic string がその電荷を持つ:

$$Q = \int_S dx^2 dx^3 J^{01} = \frac{1}{2\pi} \int_S dx^2 dx^3 F_{23} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial S} A_\mu dx^\mu = 1$$



- Symmetric phase では one-form $U(1)^{[1]}$ symmetry は破れている。

t' Hooft operator $\langle H(C) \rangle \neq 0$

t' Hooft '78

$$\text{cf) } \langle W_C \rangle = \left\langle \text{Tr} P \exp \left(i \int_C A_\mu dx^\mu \right) \right\rangle \sim e^{\alpha T/R}$$

1-form symmetry: Scalar QED の例

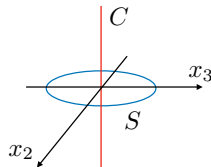
● 例1: Scalar QEDにおける $U(1)^{[1]}$ 対称性

- ビアンキ恒等式 $\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\nabla_\mu F_{\rho\sigma} = 0$ より、 $J^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} F_{\rho\sigma} \epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}$ が保存する。
 ← カレントが2-form

- Higgs phase では one-form $U(1)^{[1]}$ symmetry が破れていない。

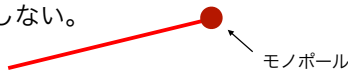
そして、cosmic string がその電荷を持つ:

$$Q = \int_S dx^2 dx^3 J^{01} = \frac{1}{2\pi} \int_S dx^2 dx^3 F_{23} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial S} A_\mu dx^\mu = 1$$



- モノポールがあるとビアンキ恒等式が満たされないため、 $U(1)^{[1]}$ がexplicitに破れている。

このとき、局所的にも string の本数は保存しない。



1-form symmetry: SU(N)ゲージ理論の例

see also t' Hooft '78, '79, Witten '85

- 例2: pure SU(N)ゲージ理論における $Z_N^{[1]}$ 対称性

- $Z_N (\subset SU(N))$ は SU(N) のすべての元と可換 (=center) である。

- 二次元面 S を通ったときに center の元 $e^{2\pi i k/N} I_N$ を作用する operator $U(\alpha)$ を定義する。

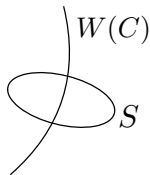
$$e^{2\pi i k/N} \phi \leftarrow \bigcirc_S \rightarrow \phi : \text{fundamental rep. の場}$$

$$(\alpha = 2\pi k/N)$$

- この operator は局所的には自明な作用しかしないが、Wilson loop に作用させると位相を出す。

$$U(\alpha)W(C)U(\alpha)^\dagger = e^{i\alpha\langle C, S \rangle} W(C)$$

→ one-form $Z_N^{[1]}$ symmetry として必要な性質を満たしている。



1-form symmetry: SU(N)ゲージ理論の例

- 例2: pure SU(N)ゲージ理論における $Z_N^{[1]}$ 対称性

- $Z_N (\subset SU(N))$ は SU(N) のすべての元と可換 (=center) である。

- 二次元面 S を通ったときに center の元 $e^{2\pi i k/N} I_N$ を作用する operator $U(\alpha)$ を定義する。

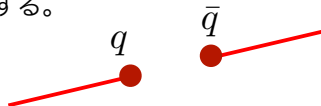
$$e^{2\pi i k/N} \phi \leftarrow \bigcirc_S \rightarrow \phi: \text{fundamental rep. の場}$$

$$(\alpha = 2\pi k/N)$$

- fundamental 表現の quark があると非自明な作用をする。

→ $Z_N^{[1]}$ symmetry は explicit に破れている。

→ 局所的にも string の本数は保存しない。



トンネル効果によるクォーク対生成

$$\Gamma \sim \mu e^{-\pi m^2/\mu}$$

Vilenkin '82

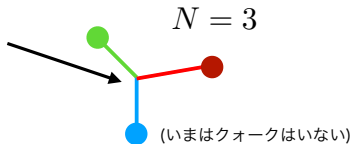
1-form symmetry: SU(N)ゲージ理論の例

- 例2: pure SU(N)ゲージ理論における $Z_N^{[1]}$ 対称性
 - $Z_N (\subset SU(N))$ は SU(N) のすべての元と可換 (=center) である。
 - Wilson loop の真空期待値の振るまい:
 - 非閉じ込め相: $\langle W(C) \rangle \sim e^{C(N)\alpha T/R} \neq 0$ (perimeter law)
 - 閉じ込め相: $\langle W(C) \rangle \sim e^{-\mu RT} \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) (area law)
 - 閉じ込め相では one-form $Z_N^{[1]}$ symmetry が破れていない。
 - Wilson loop が charged object として存在する。

1-form symmetry: SU(N)ゲージ理論の例

- 例2: pure SU(N)ゲージ理論における $Z_N^{[1]}$ 対称性
 - $Z_N (\subset SU(N))$ は SU(N) のすべての元と可換 (=center) である。
 - Wilson loop の真空期待値の振るまい:
 - 非閉じ込め相: $\langle W(C) \rangle \sim e^{C(N)\alpha T/R} \neq 0$ (perimeter law)
 - 閉じ込め相: $\langle W(C) \rangle \sim e^{-\mu RT} \rightarrow 0$ ($R \rightarrow \infty$) (area law)
 - 閉じ込め相では one-form $Z_N^{[1]}$ symmetry が破れていない。

N本の string は一点でつながれる



Cosmic string のその他の性質

Cosmic strings のその他の性質

- Electric-magnetic duality

弱結合理論と同様に、閉じ込め相転移時に cosmic string が形成される。

- One-form $Z_N^{[1]}$ symmetry

Charged object under one-form symmetry = string が存在し、
保存量は mod N (N本が結合するvertexが存在する)

- 他になにか言えることはあるか？

Cosmic strings のその他の性質

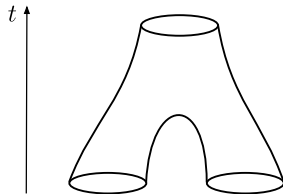
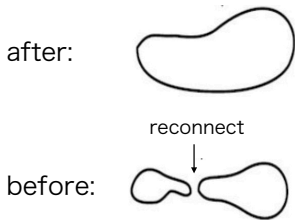
- Large N limit

color flux tube の相互作用の確率は、diagram のオイラー数 $\chi (= 2 - g - h)$ を使って $P \sim N^{2\chi}$ と見積もることができる。

of genus

of holes

→ string が衝突したときに組み替えが起こる確率は $P \sim N^{-2}$



't Hooft '74

See also Jackson, Jones, Polchinski '04,
Polchinski '88, Hanany Hashimoto '05

Cosmic strings その他の性質

- Electric-magnetic duality

弱結合理論と同様に、閉じ込め相転移時に cosmic string が形成される。

- One-form $Z_N^{[1]}$ symmetry

Charged object under one-form symmetry = string が存在し、
保存量は mod N (N 本が結合するvertexが存在する)

- Large N limit

2本の string が衝突したときに、組み替えが起こる確率は $P \sim N^{-2}$

- Holographic dual descriptions

重力理論の描像でいうと fundamental string に対応する。

See, e.g., Witten '98, Polchinski, Strassler '00, Klebanov, Strassler '00, Maldacena, Nunez '00, Vafa '00

Cosmic string のダイナミクスと重力波の放射

Cosmic string の性質

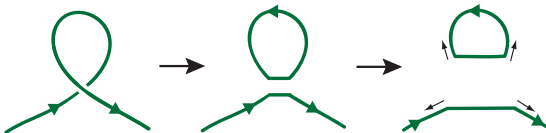
- SU(N) ゲージ理論で形成される cosmic string の性質のまとめ:
 - String tension: $\mu \sim \Lambda^2$
 - 組み替え確率: $P \sim N^{-2}$
 - N本の string が結合する vertex が存在する
 - 熱浴には相互作用する相手がいない (重力相互作用しかない)
 - heavy quark がいたとしたら、 $\Gamma \sim \mu e^{-\pi m^2/\mu}$ の確率で崩壊する。

Cosmic string の性質

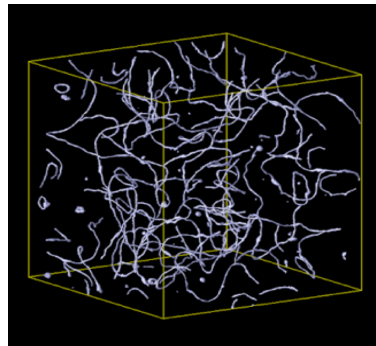
- SU(N) ゲージ理論で形成される cosmic string の性質のまとめ:
 - String tension: $\mu \sim \Lambda^2$
 - 組み替え確率: $P \sim N^{-2}$
 - (N本の string が結合する vertex が存在する)
 - 熱浴には相互作用する相手がいない (重力相互作用しかない)
 - (heavy quark がいたとしたら、 $\Gamma \sim \mu e^{-\pi m^2/\mu}$ の確率で崩壊する。)
- これらの性質をもつ cosmic string のダイナミクスを考え、重力波の放射量を計算したい。

Cosmic string のダイナミクス

- よくわかっている Local $U(1)$ cosmic string の場合から考える:
- 衝突したらほぼ1の確率で組み替えが起こり、全体的に短くなっていく。

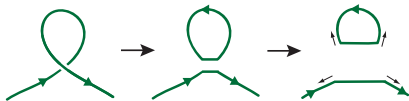


→ 長いstringはホライズン内に $O(1)$ 本。



Cosmic string のダイナミクス: VOS model

- 長い string は小さい loop を作ってエネルギーを失っていく。



- Cosmic string の統計的な性質はone-scale modelで説明できる。

平均エネルギー密度 $\frac{d\rho_\infty}{dt} = -(2H(1 + \bar{v}^2)) \rho_\infty + \left(\frac{d\rho_\infty}{dt}\right)_{\text{loop}}$,

平均速度分散 $\frac{d\bar{v}}{dt} = (1 - \bar{v}^2) \left(\frac{k(\bar{v})}{R} - 2H\bar{v} \right),$

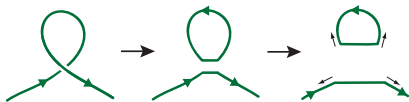
曲率 (ホライズン長程度)

$$k(\bar{v}) \simeq \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{1 - 8\bar{v}^6}{1 + 8\bar{v}^6}$$

Kibble '85,
Martins, Shellard '95, '96, '00

Cosmic string のダイナミクス: VOS model

- 長い string は 小さい loop を作ってエネルギーを失っていく。



組み替え確率 $\ll 1$ の
効果はここに現れる

- Cosmic string の統計的な性質は one-scale model で説明できる。

平均エネルギー密度 $\frac{d\rho_\infty}{dt} = -(2H(1 + \bar{v}^2)) \rho_\infty + \left(\frac{d\rho_\infty}{dt} \right)_{\text{loop}},$

平均速度分散 $\frac{d\bar{v}}{dt} = (1 - \bar{v}^2) \left(\frac{k(\bar{v})}{R} - 2H\bar{v} \right),$

曲率 (ホライズン長程度)

Kibble '85,
Martins, Shellard '95, '96, '00

Cosmic string のダイナミクス: VOS model

- 長い string は 小さい loop を作ってエネルギーを失っていく。

組み替え確率 $\ll 1$ の
効果はここに現れる

- (エネルギー損失率) = (組み替え確率) $\times$ (string # density)
 $\times$ (単位時間あたりにぶつかる string の本数)
 $\times$ (組み替えが起きた時に失うエネルギー)

$$\left(\frac{d\rho_\infty}{dt} \right)_{\text{loop}} = -P n_\infty (\tilde{c}\mu\xi) \frac{n_\infty \xi^3 \bar{v}}{\xi}$$

$\xi = c_\xi t$: 相関長

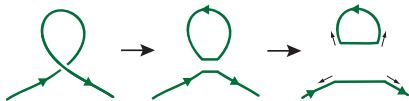
- これを代入して one-scale model の方程式を解くと、 $\rho_\infty \propto P^{-1}$ が得られる。
- つまり $1/P$ 倍だけ cosmic string が多く残ることになる。

Avgoustidis, Shellard '05

Cosmic string のダイナミクス: VOS model

- 長い string は 小さい loop を作ってエネルギーを失っていく。

組み替え確率 $\ll 1$ の
効果はここに現れる



- 同様に string loop の量も計算できる。

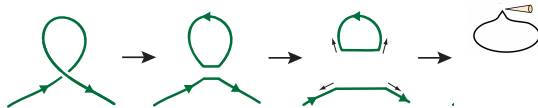
$$\dot{\rho}_{\text{loop}}(l_i, t) = -3H\rho_{\text{loop}}(l_i, t) + P \frac{\rho_{\infty}(t)\bar{v}_{\infty}(t)l_i}{L^2(t)} f(l_i, t).$$

← 組み替えでどの長さの loop
ができるかを表す分布関数

Cosmic string のダイナミクスと重力波の放射

- 長い string は 小さい loop を作ってエネルギーを失っていく。

組み替え確率 $\ll 1$ の
効果はここに現れる



- 同様に string loop の量も計算できる。

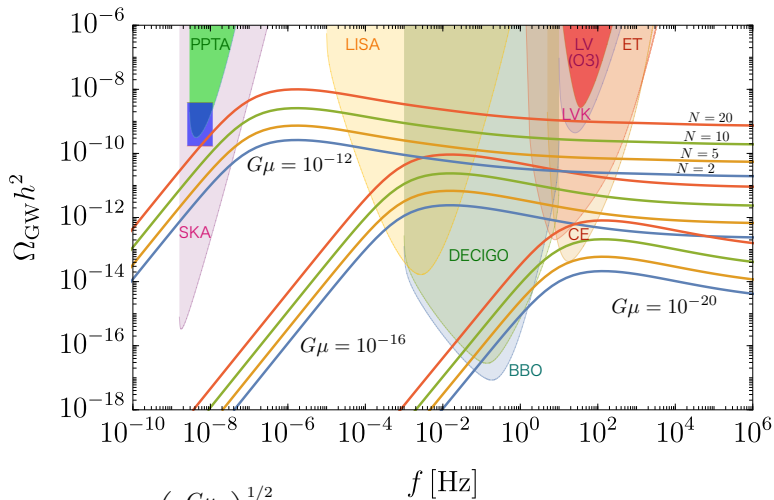
$$\dot{\rho}_{\text{loop}}(l_i, t) = -3H\rho_{\text{loop}}(l_i, t) + P \frac{\rho_{\infty}(t)\bar{v}_{\infty}(t)l_i}{L^2(t)} f(l_i, t).$$

組み替えでどの長さの loop
ができるかを表す分布関数

- 重力波は主に string loop から放射される。

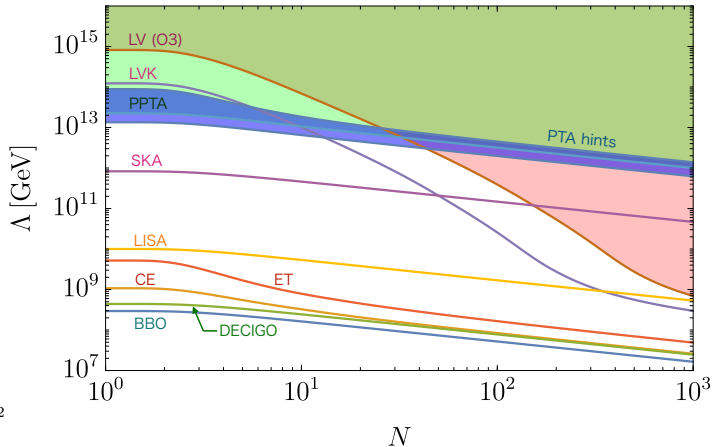
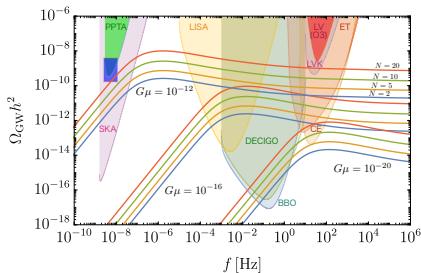
$$\frac{d\rho_{\text{GW}}}{df}(t) = \int_{t_i}^t dt' \left(\frac{a(t')}{a(t)} \right)^3 \int_0^l dl n_{\text{loop}}(l, t') h \left(f \frac{a(t)}{a(t')}, l \right)$$

Vilenkin '81, Vachaspati, Vilenkin '85



$$(\Omega_{\text{GW}} h^2)^{(\text{peak})} \simeq 2.5 \times 10^{-10} \times P^{-1} \left(\frac{G\mu}{10^{-12}} \right)^{1/2}$$

$$f^{(\text{peak})} \simeq 1.9 \times 10^{-6} \text{ Hz} \times \left(\frac{G\mu}{10^{-12}} \right)^{-1}$$



$$(\Omega_{\text{GW}} h^2)^{(\text{peak})} \simeq 2.5 \times 10^{-10} \times P^{-1} \left(\frac{G\mu}{10^{-12}} \right)^{1/2}$$

$$f^{(\text{peak})} \simeq 1.9 \times 10^{-6} \text{ Hz} \times \left(\frac{G\mu}{10^{-12}} \right)^{-1}$$

$$\begin{cases} \mu \sim \Lambda^2 \\ P \sim N^{-2} \end{cases} \text{とした場合の sensitivity plot}$$

まとめ

- pure SU(N)ゲージ理論は one-form $Z_N^{[1]}$ symmetry を持っている。閉じ込め相ではその対称性が破れておらず、color flux tube がその"電荷"を持つ。
- color flux tube は $Z_N^{[1]}$ symmetry によって安定性が保証され、N本のstringが結合する vertex も存在できる。
- 初期宇宙で閉じ込め相転移が起こるとマクロなスケールな color flux tube (cosmic string) が形成され、そのダイナミクスから重力波が放射される。
- Large N limit の計算によると、string の組み替え確率は $P \sim N^{-2}$