

Topological axion electrodynamics and 4-group symmetry

横倉 諒 (KEK)

2022. 2. 16

京都大学理学部素粒子論研究室セミナー, online

Y. Hidaka, M. Nitta, RY,

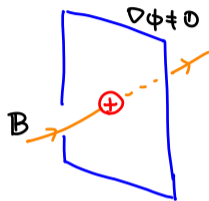
Phys. Lett. B **823** (2021) 136762 [2107.08753]; PTEP **2022** ptab150 [2108.12564]

に基づく

メッセージ

アクシオンの物理には非自明な高次対称性と群論がある

やったこと



- アクシオン電磁気学の有質量ギャップ相には、4 群として記述される 0,1,2,3 次対称性が存在する
- アクシオンドメインウォール (分域壁) や磁束渦の相関は 4 群の構造として理解できる

技術的には、

- アクシオン電磁気学の有質量ギャップ相における高次対称性を示した
- 対称性の生成子の相関関数により 4 群構造を特定した

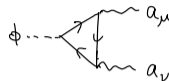
もくじ

- 1 導入 [5 スライド]
- 2 可換ヒッグス模型の高次対称性 (review) [6 スライド]
- 3 有質量アクシオン理論の高次対称性 (review) [6 スライド]
- 4 トポロジカルアクシオン電磁気学とその高次対称性 [6 スライド]
- 5 高次対称性でトポロジカルソリトンの物理をみる [2 スライド]
- 6 トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 [5 スライド]

アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 a_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

$$\frac{N}{4\pi^2} \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \quad (N: \text{整数})$$



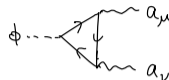
特徴

1. トポロジカル結合: カイラル量子異常によって決まる。時空の計量やスケールによらない
2. 素粒子・ハドロン・物性物理に遍在する: QCD アクシオン, π^0 中間子, 磁性トポロジカル絶縁体, ...

アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 a_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

$$\frac{N}{4\pi^2} \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \quad (N: \text{整数})$$



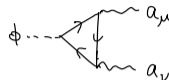
特徴

1. トポロジカル結合: カイラル量子異常によって決まる。時空の計量やスケールによらない
2. 素粒子・ハドロン・物性物理に遍在する: QCD アクシオン, π^0 中間子, 磁性トポロジカル絶縁体, ...
3. アクシオンと光子の有質量/無質量相がある。両方質量があると真空中に質量ギャップがある

アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 a_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

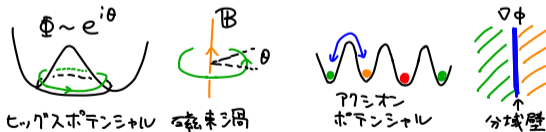
$$\frac{N}{4\pi^2} \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \quad (N: \text{整数})$$



特徴

1. トポロジカル結合: カイラル量子異常によって決まる。時空の計量やスケールによらない
2. 素粒子・ハドロン・物性物理に遍在する: QCD アクシオン, π^0 中間子, 磁性トポロジカル絶縁体, ...
3. アクシオンと光子の有質量/無質量相がある。両方質量があると真空中に質量ギャップがある
4. 有質量ギャップ相にはトポロジカルソリトンが存在し得る: 磁束渦、アクシオン分域壁

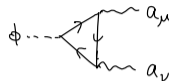
e.g., 宇宙ひもと分域壁の複合系 [Kogan '93], トポロジカル超伝導体 [Qi, Witten, Zhang '12]



アクシオン電磁気学: アクシオン ϕ + 光子 a_μ + トポロジカル結合

[Wilczek '87]

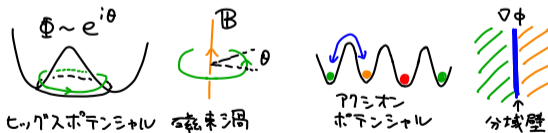
$$\frac{N}{4\pi^2} \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{32\pi^2} \phi \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \quad (N: \text{整数})$$



特徴

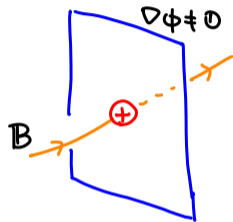
1. トポロジカル結合: カイラル量子異常によって決まる。時空の計量やスケールによらない
2. 素粒子・ハドロン・物性物理に遍在する: QCD アクシオン, π^0 中間子, 磁性トポロジカル絶縁体, ...
3. アクシオンと光子の有質量/無質量相がある。両方質量があると真空中に質量ギャップがある
4. 有質量ギャップ相にはトポロジカルソリトンが存在し得る: 磁束渦、アクシオン分域壁

e.g., 宇宙ひもと分域壁の複合系 [Kogan '93], トポロジカル超伝導体 [Qi, Witten, Zhang '12]



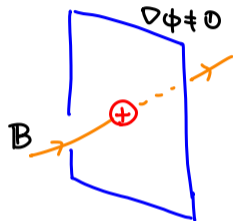
アクシオン・光子結合はソリトン同士に非自明な相関を導く

アクシオン分域壁の Sikivie 効果



- アクシオン分域壁に磁束を差す → 電荷が誘起する [Sikivie '84]

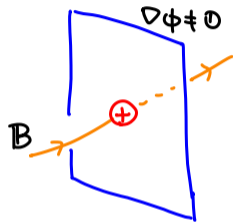
アクシオン分域壁の Sikivie 効果



- アクシオン分域壁に磁束を差す → 電荷が誘起する [Sikivie '84]

電場のガウスの法則がアクシオンで変更される $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$

アクシオン分域壁の Sikivie 効果

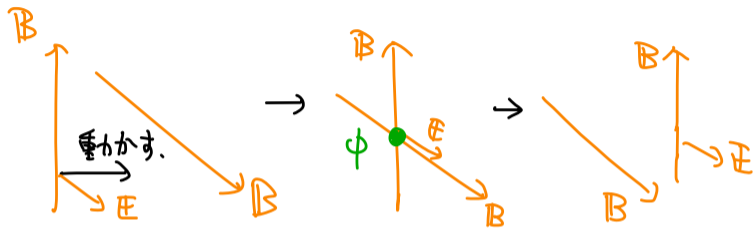


- アクシオン分域壁に磁束を差す → 電荷が誘起する [Sikivie '84]

電場のガウスの法則がアクシオンで変更される $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B}$

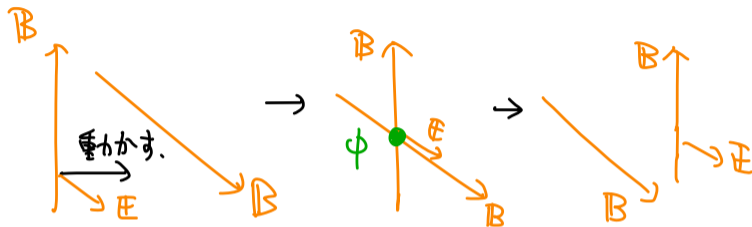
- ヒッグス相では磁束が量子化されている → 誘起した電荷も離散的である

磁束渦の交差



- 磁束渦を動かして交差させる → アクションが誘起する

磁束渦の交差

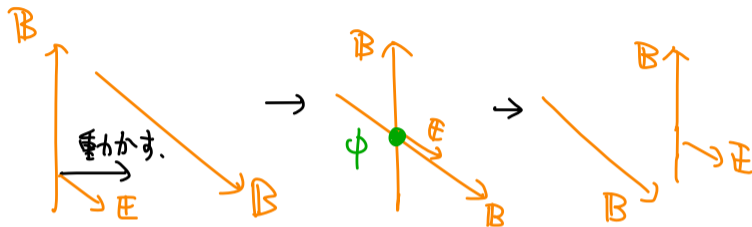


- 磁束渦を動かして交差させる → アクシオンが誘起する

磁束を動かすと電場が生じる: $B_z \rightarrow B_z + E_y$ (x 方向に動かした時)

$E \cdot B$ はアクシオンのソース $\partial^\mu \partial_\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} E \cdot B$

磁束渦の交差



- 磁束渦を動かして交差させる → アクションが誘起する

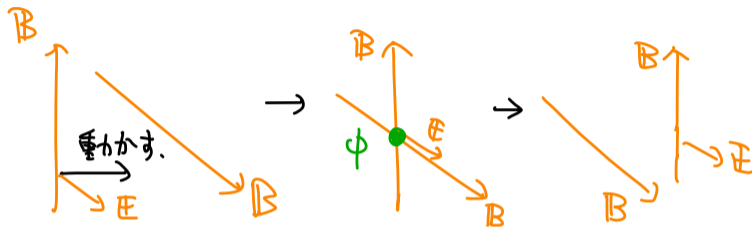
磁束を動かすと電場が生じる: $B_z \rightarrow B_z + E_y$ (x 方向に動かした時)

$$E \cdot B \text{ はアクションのソース } \partial^\mu \partial_\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} E \cdot B$$

Q: この効果の背後にある数学的構造は？

(Atiyah-Singer の指数定理はもちろんだが・・・)

磁束渦の交差



- 磁束渦を動かして交差させる → アクションが誘起する

磁束を動かすと電場が生じる: $B_z \rightarrow B_z + E_y$ (x 方向に動かした時)

$$E \cdot B \text{ はアクションのソース } \partial^\mu \partial_\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} E \cdot B$$

Q: この効果の背後にある数学的構造は？

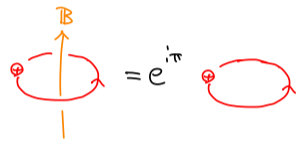
(Atiyah-Singer の指数定理はもちろんだが・・・)

- トポロジカルソリトン = 保存する物体 → 対称性？ 広がった物体に対する対称性？

候補: 大域的高次対称性 [Gaiotto et al. '14]

p 次元の広がった物体への変換の元での対称性

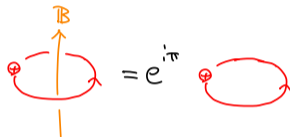
(通常の対称性は 0 次対称性。0 次元物体に作用するため。)



候補: 大域的高次対称性 [Gaiotto et al. '14]

p 次元の広がった物体への変換の元での対称性

(通常の対称性は 0 次対称性。0 次元物体に作用するため。)



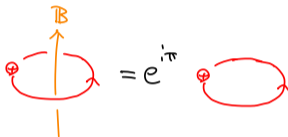
- 例: アハラノフ・ボーム (AB) 効果: 1 次対称性の変換

生成子 = 保存量: 磁束, 変換をうける物体: 試験電荷の世界線

候補: 大域的高次対称性 [Gaiotto et al. '14]

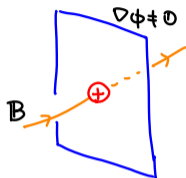
p 次元の広がった物体への変換の元での対称性

(通常の対称性は 0 次対称性。0 次元物体に作用するため。)



- 例: アハラノフ・ボーム (AB) 効果: 1 次対称性の変換
生成子 = 保存量: 磁束, 変換をうける物体: 試験電荷の世界線
- 広がった物体の物理を対称性で理解できる
- 通常の対称性を超えた場の量子論の相分類が可能
 - (3 + 1) 次元のマクスウェル理論: 光子 = NG ボソン (大域的 $U(1)$ 1 次対称性の自発的破れ)
 - 電荷 2 可換 Higgs 模型 (超伝導体) \neq 電荷 1 可換 Higgs 模型 [cf. Hansson, et al. '04]

この発表の目的



有質量ギャップを持つアクシオン電磁気学において

- 高次対称性とその対称性の群を特定する
- Sikivie 効果などのトポロジカルソリトンの相関から、高次対称性同士の相関を導く

以下ではソリトンに注目するため、低エネルギー (長波長) 極限の議論をする

- アクシオンや光子はソリトン以外の励起無し $f_{\mu\nu} = 0, \partial_\mu\phi = 0$
- ソリトンの太さは無視してデルタ関数的配位で近似

もくじ

- 1 導入 [5 スライド]
- 2 可換ヒッグス模型の高次対称性 (review) [6 スライド]
- 3 有質量アクシオン理論の高次対称性 (review) [6 スライド]
- 4 トポロジカルアクシオン電磁気学とその高次対称性 [6 スライド]
- 5 高次対称性でトポロジカルソリトンの物理をみる [2 スライド]
- 6 トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 [5 スライド]

可換ヒッグス模型の高次対称性 (review) [6 スライド]

Banks & Seiberg '10; Seiberg & Kapustin '14; Gaiotto, et al. '14
に基づく

メッセージ: 3つの高次対称性がある

1次



2次



セットアップ

Stückelberg 作用: 可換ヒッグス模型の低エネルギー極限での作用

$$S_{\text{St.}} = -\frac{v^2}{2} \int d^4x |\partial_\mu \chi - qa_\mu|^2$$

ローカルな励起がない極限 ($f_{\mu\nu} = 0$)

光子: a_μ

- $U(1)$ ゲージ場 (ディラックの量子化条件 $\int_{S^2} B \cdot dS \in 2\pi\mathbb{Z}$)
- $|\partial_\mu \chi - qa_\mu|^2$: 質量項。 χ は電荷 q のヒッグス場の NG モードで、光子に食べられる

磁束渦は双対トポロジカル理論だと扱いやすい

UV 作用: $\int (-|d\Phi - qa\Phi|^2 - \frac{1}{2e^2}|da|^2 - V(|\Phi|^2))$; $\Phi \rightarrow \frac{v}{\sqrt{2}} e^{i\chi}$

光子の質量項 \longleftrightarrow トポロジカル項

$$S_{BF} = \frac{q}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

光子の質量項 \longleftrightarrow トポロジカル項

$$S_{BF} = \frac{q}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

双対場

- $b_{\mu\nu}$: 2 階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (NG ボソン χ の双対変数) [Cremmer & Scherk '74]

光子の質量項 \longleftrightarrow 等価 トポロジカル項

$$S_{BF} = \frac{q}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

双対場

- $b_{\mu\nu}$: 2 階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (NG ボソン χ の双対変数) [Cremmer & Scherk '74]

等価性 (のラフな説明): 低エネルギー極限を再現する。 $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $f_{\mu\nu} = 0$

技術的にはルジャンドル変換を行う [導出]

光子の質量項 \longleftrightarrow 等価 トポロジカル項

$$S_{BF} = \frac{q}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

双対場

- $b_{\mu\nu}$: 2 階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (NG ボソン χ の双対変数) [Cremmer & Scherk '74]

等価性 (のラフな説明): 低エネルギー極限を再現する。 $b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $f_{\mu\nu} = 0$

技術的にはルジャンドル変換を行う [導出]

どのようにトポロジカルソリトンを扱うか? 反対称テンソルゲージ場の物理的意味は?

磁束渦 = 双対場 $b_{\mu\nu}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

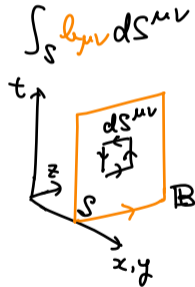
ソリトンも含めた作用

$$S_{BF+\text{vort.}} = \frac{1}{2!} \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \frac{q}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

磁束渦

- 磁束渦の配位を $b_{\mu\nu}$ の運動方程式で再現:

例: 磁束渦の作用 = $\int_{zt \text{ 平面}} b_{tz} dt dz$ のとき、 $f_{xy} = \frac{2\pi}{q} \delta(x) \delta(y)$



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

磁束渦 = 双対場 $b_{\mu\nu}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

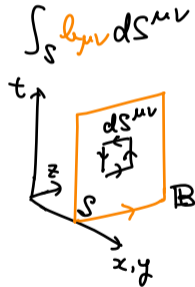
$$S_{BF+\text{vort.}} = \frac{1}{2!} \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \frac{q}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

磁束渦

- 磁束渦の配位を $b_{\mu\nu}$ の運動方程式で再現:

例: 磁束渦の作用 = $\int_{zt \text{ 平面}} b_{tz} dt dz$ のとき、 $f_{xy} = \frac{2\pi}{q} \delta(x)\delta(y)$

- 2階反対称テンソル ゲージ場 $b_{\mu\nu}$ の 物理的意味



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

磁束渦 = 双対場 $b_{\mu\nu}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

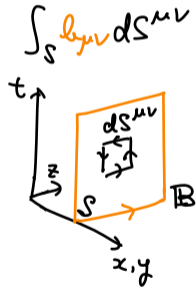
$$S_{BF+\text{vort.}} = \frac{1}{2!} \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \frac{q}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

磁束渦

- 磁束渦の配位を $b_{\mu\nu}$ の運動方程式で再現:

例: 磁束渦の作用 = $\int_{zt \text{ 平面}} b_{tz} dt dz$ のとき, $f_{xy} = \frac{2\pi}{q} \delta(x) \delta(y)$

- 2 階反対称テンソル ゲージ場 $b_{\mu\nu}$ の 物理的意味
 - 2 階: 磁束渦の時空次元



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

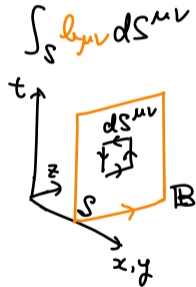
磁束渦 = 双対場 $b_{\mu\nu}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

$$S_{BF+\text{vort.}} = \frac{1}{2!} \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \frac{q}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

磁束渦

- 磁束渦の配位を $b_{\mu\nu}$ の運動方程式で再現:
例: 磁束渦の作用 = $\int_{zt \text{ 平面}} b_{tz} dt dz$ のとき, $f_{xy} = \frac{2\pi}{q} \delta(x) \delta(y)$
- 2 階反対称テンソル ゲージ場 $b_{\mu\nu}$ の 物理的意味
 - 2 階: 磁束渦の時空次元
 - 反対称: ソリトンの向きづけ (ヤコビアン) = ソリトン電荷の正負



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

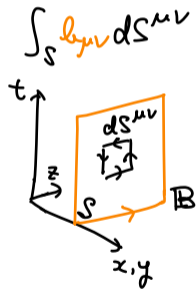
磁束渦 = 双対場 $b_{\mu\nu}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

$$S_{BF+\text{vort.}} = \frac{1}{2!} \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \frac{q}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

磁束渦

- 磁束渦の配位を $b_{\mu\nu}$ の運動方程式で再現:
例: 磁束渦の作用 = $\int_{zt \text{ 平面}} b_{tz} dt dz$ のとき, $f_{xy} = \frac{2\pi}{q} \delta(x)\delta(y)$
- 2 階反対称テンソル ゲージ場 $b_{\mu\nu}$ の 物理的意味
 - 2 階: 磁束渦の時空次元
 - 反対称: ソリトンの向きづけ (ヤコビアン) = ソリトン電荷の正負
 - ゲージ場: ソリトンの保存則 (低エネルギー極限ではソリトンが勝手に消えない)



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

磁束渦 = 双対場 $b_{\mu\nu}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

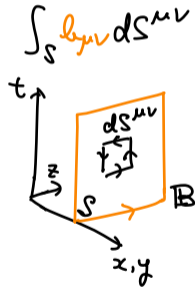
$$S_{BF+\text{vort.}} = \frac{1}{2!} \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \frac{q}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

磁束渦

- 磁束渦の配位を $b_{\mu\nu}$ の運動方程式で再現:

例: 磁束渦の作用 = $\int_{zt \text{ 平面}} b_{tz} dt dz$ のとき、 $f_{xy} = \frac{2\pi}{q} \delta(x)\delta(y)$

- 2 階反対称テンソル ゲージ場 $b_{\mu\nu}$ の 物理的意味
 - 2 階: 磁束渦の時空次元
 - 反対称: ソリトンの向きづけ (ヤコビアン) = ソリトン電荷の正負
 - ゲージ場: ソリトンの保存則 (低エネルギー極限ではソリトンが勝手に消えない)



BF 理論を用いて高次対称性を調べる

添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

保存量から高次対称性を特定する

保存量は以下の3つ

1. 磁束渦の世界面 $\exp(i \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu})$

保存則: a_μ の運動方程式 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu b_{\rho\sigma} = 0$



2. 磁束を測る演算子 $\exp(i \int_S f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}) \sim \exp(i \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})$

保存則: a_μ のビアンキ恒等式 $\partial_\mu \tilde{f}^{\mu\nu} = 0$ ($\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$)



3. ウィルソン・ループ (点電荷の世界線)

$$\exp(i \int_C a_\mu dx^\mu)$$

保存則: $b_{\mu\nu}$ の運動方程式 $f_{\mu\nu} = 0$



これらが対称性の生成子となる。荷電物体と群は？

高次対称性 1/3: 電氣的 1 次対称性

生成子: 磁束渦の世界面 $U_{1E} := \exp(i \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu})$

荷電物体はウィルソングループ、群は \mathbb{Z}_q [導出]

$$\langle U_{1E}(S) e^{i \int_C a_\mu dx^\mu} \rangle = e^{\frac{2\pi i}{q} \text{Link}(S,C)} \langle e^{i \int_C a_\mu dx^\mu} \rangle$$



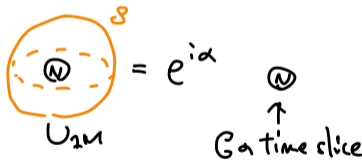
- 物理的意味: 試験電荷の軌跡に磁束渦を差して AB 効果を起こすと分数位相が出る
- S を空間的にとると、ローレンツ対称性により電場を表す (あとで使います)

高次対称性 2/3: 磁氣的 1 次対称性

生成子: 磁束を測る面積分 $U_{1M} = \exp(i\frac{\alpha}{2\pi} \int_S f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}) \sim \exp(i\frac{\alpha}{2\pi} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S})$

荷電物体は点磁荷の世界線 (トーフトループ) $T(C)$ 、群は $U(1)$

$$\langle U_{1M}(S)T(C) \rangle = e^{i\alpha \text{Link}(S,C)} \langle T(C) \rangle$$



- 物理的意味: S の中にある点磁荷をガウスの法則で測る $\int_S f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi$

高次対称性 3/3: 2次対称性

生成子: ウィルソンループ $U_{2E}(C) = \exp(i \int_C a_\mu dx^\mu)$

荷電物体は磁束渦、群は \mathbb{Z}_q

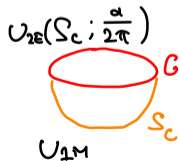
$$\langle U_{2E}(C) e^{i \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}} \rangle = e^{\frac{2\pi i}{q} \text{Link}(S,C)} \langle e^{i \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}} \rangle$$

$$S \text{ (orange) } \text{Link} \text{ } C \text{ (red)} = e^{\frac{2\pi i}{q}} S \text{ (orange)}$$

- 物理的意味: AB 効果で分数位相が出る

整数電荷でない U_{2E} も考えられる。これは U_{1M} の境界としてのみ存在する

$$U_{2E}(S_C; \frac{\alpha}{2\pi}) = \exp(i \frac{\alpha}{2\pi} \int_C a_\mu dx^\mu) := \exp(i \alpha \frac{1}{2\pi} \int_{S_C} f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}) \quad (\text{ストークスの定理})$$



まとめ: 3つの高次対称性がある

1次



2次



有質量アクシオン理論の高次対称性 (review) [6 スライド]

Seiberg & Kapustin '14; Gaiotto, et al. '14; Hidaka, Nitta, RY, '19
に基づく

メッセージ: 3つの高次対称性がある

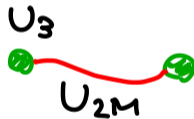
0次



2次



3次



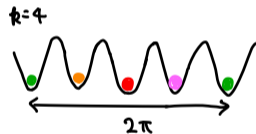
セットアップ

k 個の真空を持つアキオン理論の低エネルギー極限

$$S_{\text{ax.}} = - \int d^4x V_k(\phi) - \frac{f^2}{2} \int |d\phi|^2$$

アキオン: ϕ

- 2π 周期性 $\phi + 2\pi \sim \phi$ を持つ擬スカラー場 (NG ボソン $e^{i\phi}$)
量子化条件: $\int_C \partial_\mu \phi dx^\mu \in 2\pi\mathbb{Z}$ (C : loop)
- ポテンシャル $V_k(\phi)$ は k 個の極小点を持ち、 $\phi \rightarrow \phi + \frac{2\pi}{k}$ の元で対称なもの



アキシオンの局所的な励起は無いが、アキシオン分域壁はありうる。

→ トポロジカル双対理論だと見やすい。

$$V_k\left(\frac{2\pi n}{k}\right) = V_k\left(\frac{2\pi n}{k}\right)' = 0, \quad V_k''\left(\frac{2\pi n}{k}\right) = M^4 > 0$$

双対トポロジカル理論

有質量アクシオン理論の低エネルギー極限 \longleftrightarrow トポロジカル理論

作用

$$S_{\text{ax.,top}} = \frac{k}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

双対トポロジカル理論

有質量アクシオン理論の低エネルギー極限 $\xleftrightarrow{\text{等価}}$ トポロジカル理論

作用

$$S_{\text{ax.,top}} = \frac{k}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

双対場

双対トポロジカル理論

有質量アクシオン理論の低エネルギー極限 $\xleftrightarrow{\text{等価}}$ トポロジカル理論

作用

$$S_{\text{ax.,top}} = \frac{k}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

双対場

- $c_{\mu\nu\rho}$: 3階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (ポテンシャルの極小点 (局所定数) の双対変数) [Aurilia, Takahashi, Townsend '80]

双対トポロジカル理論

有質量アクシオン理論の低エネルギー極限 $\xleftrightarrow{\text{等価}}$ トポロジカル理論

作用

$$S_{\text{ax.,top}} = \frac{k}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

双対場

- $c_{\mu\nu\rho}$: 3階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (ポテンシャルの極小点 (局所定数) の双対変数) [Aurilia, Takahashi, Townsend '80]

等価性 (のラフな説明): 低エネルギー極限を再現する。 $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\partial_\mu \phi = 0$

技術的にはルジャンドル変換を行う

双対トポロジカル理論

有質量アクシオン理論の低エネルギー極限 $\xleftrightarrow{\text{等価}}$ トポロジカル理論

作用

$$S_{\text{ax.}, \text{top}} = \frac{k}{2\pi} \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

双対場

- $c_{\mu\nu\rho}$: 3階反対称テンソル $U(1)$ ゲージ場 (ポテンシャルの極小点 (局所定数) の双対変数) [Aurilia, Takahashi, Townsend '80]

等価性 (のラフな説明): 低エネルギー極限を再現する。 $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\partial_\mu \phi = 0$

技術的にはルジャンドル変換を行う

どのようにトポロジカルソリトンを扱うか? 反対称テンソルゲージ場の物理的意味は?

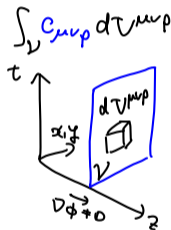
アクシオン分域壁 = 双対場 $c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Aurilia & Takahashi '79]

ソリトンも含めた作用

$$S = \frac{1}{3!} \int_{\mathcal{V}} c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

アクシオン分域壁

アクシオン分域壁の配位を運動方程式で再現:



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{S}} dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{V}} dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

アクシオン分域壁 = 双対場 $c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Aurilia & Takahashi '79]

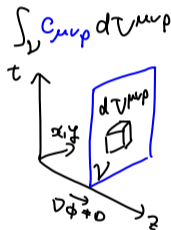
ソリトンも含めた作用

$$S = \frac{1}{3!} \int_{\mathcal{V}} c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

アクシオン分域壁

アクシオン分域壁の配位を運動方程式で再現:

- 例: 分域壁の作用 = $\int_{txy \text{ 平面}} c_{txy} dt dx dy$ の時、 $\partial_z \phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)$



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{S}} dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{V}} dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

アクシオン分域壁 = 双対場 $c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Aurilia & Takahashi '79]

ソリトンも含めた作用

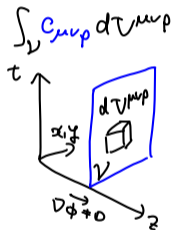
$$S = \frac{1}{3!} \int_{\mathcal{V}} c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

アクシオン分域壁

アクシオン分域壁の配位を運動方程式で再現:

- 例: 分域壁の作用 = $\int_{txy \text{ 平面}} c_{txy} dt dx dy$ の時、 $\partial_z \phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)$

3 階反対称テンソルゲージ場の物理的意味



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{S}} dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{V}} dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

アクシオン分域壁 = 双対場 $c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Aurilia & Takahashi '79]

ソリトンも含めた作用

$$S = \frac{1}{3!} \int_{\mathcal{V}} c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

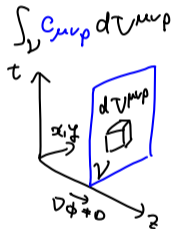
アクシオン分域壁

アクシオン分域壁の配位を運動方程式で再現:

- 例: 分域壁の作用 = $\int_{txy \text{ 平面}} c_{txy} dt dx dy$ の時、 $\partial_z \phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)$

3 階反対称テンソルゲージ場の物理的意味

- 3 階: 分域壁の時空次元



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{S}} dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{V}} dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

アクシオン分域壁 = 双対場 $c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Aurilia & Takahashi '79]

ソリトンも含めた作用

$$S = \frac{1}{3!} \int_{\mathcal{V}} c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

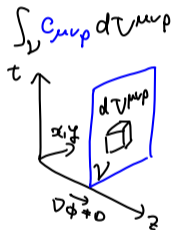
アクシオン分域壁

アクシオン分域壁の配位を運動方程式で再現:

- 例: 分域壁の作用 = $\int_{txy \text{ 平面}} c_{txy} dt dx dy$ の時、 $\partial_z \phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)$

3 階反対称テンソルゲージ場の物理的意味

- 3 階: 分域壁の時空次元
- 反対称: ソリトンの向きづけ (ヤコビアン) = 分域壁の電荷の正負



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{S}} dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{V}} dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

アクシオン分域壁 = 双対場 $c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Aurilia & Takahashi '79]

ソリトンも含めた作用

$$S = \frac{1}{3!} \int_{\mathcal{V}} c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

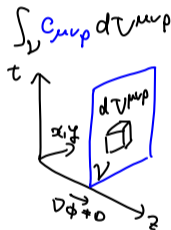
アクシオン分域壁

アクシオン分域壁の配位を運動方程式で再現:

- 例: 分域壁の作用 = $\int_{txy \text{ 平面}} c_{txy} dt dx dy$ の時、 $\partial_z \phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)$

3 階反対称テンソルゲージ場の物理的意味

- 3 階: 分域壁の時空次元
- 反対称: ソリトンの向きづけ (ヤコビアン) = 分域壁の電荷の正負
- ゲージ場: ソリトンの保存則 (低エネルギー極限ではソリトンが勝手に消えない)



添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{S}} dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{V}} dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

アクシオン分域壁 = 双対場 $c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Aurilia & Takahashi '79]

ソリトンも含めた作用

$$S = \frac{1}{3!} \int_{\mathcal{V}} c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi$$

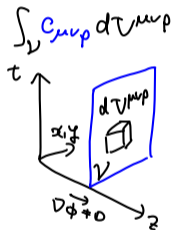
アクシオン分域壁

アクシオン分域壁の配位を運動方程式で再現:

- 例: 分域壁の作用 = $\int_{txy \text{ 平面}} c_{txy} dt dx dy$ の時、 $\partial_z \phi = \frac{2\pi}{k} \delta(z)$

3 階反対称テンソルゲージ場の物理的意味

- 3 階: 分域壁の時空次元
- 反対称: ソリトンの向きづけ (ヤコビアン) = 分域壁の電荷の正負
- ゲージ場: ソリトンの保存則 (低エネルギー極限ではソリトンが勝手に消えない)



双対トポロジカル理論を用いて高次対称性を調べる。やることは BF 理論と同じ!

添字で書くと $f_{\mu\nu} = \frac{2\pi}{q} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_S dS^{\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$, $\partial_\mu \phi = \frac{2\pi}{k} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \int_{\mathcal{V}} dV^{\nu\rho\sigma}(y) \delta^4(x-y)$

保存量から高次対称性を特定する

保存量は以下の3つ

1. アクション分域壁の世界面 $\exp(i \int_V c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho})$

保存則: ϕ の運動方程式 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu c_{\nu\rho\sigma} = 0$



2. アクションの巻きつき数 $\exp(i \int_C \partial_\mu \phi dx^\mu)$

保存則: ϕ のビアンキ恒等式 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \phi = 0$ ($\nabla \times \nabla \phi = 0$)



3. アクション 2点演算子 $\exp(i(\phi(\mathcal{P}) - \phi(\mathcal{P}')))$

保存則: $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式 $\partial_\mu \phi = 0$



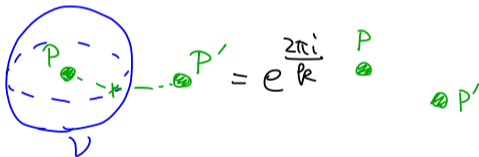
これらが対称性の生成子となる。荷電物体と群は？

高次対称性 1/3: 0 次対称性 (つまりただの対称性)

生成子: アクシオン分域壁 $U_0(\mathcal{V}) = \exp(i \int_{\mathcal{V}} c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho})$

荷電物体はアクシオン 2 点演算子、群は \mathbb{Z}_k

$$\langle U_0(\mathcal{V}) e^{i\phi(\mathcal{P}) - i\phi(\mathcal{P}')} \rangle = e^{\frac{2\pi i}{k} \text{Link}(\mathcal{V}, (\mathcal{P}, \mathcal{P}'))} \langle e^{i\phi(\mathcal{P}) - i\phi(\mathcal{P}')} \rangle$$



- 単にアクシオンのシフト対称性 $\phi \rightarrow \phi + \frac{2\pi}{k}$ のこと

高次対称性 2/3: 2 次対称性

生成子: アクシオンの巻きつき数 $U_{2M}(C) = \exp(i \frac{\alpha}{2\pi} \int_C \partial_\mu \phi dx^\mu)$

荷電物体はアクシオン弦の世界面 $V(S)$ 、群は $U(1)$

$$\langle U_{2M}(C)V(S) \rangle = e^{i\alpha \text{Link}(C,S)} \langle V(S) \rangle$$

The diagram shows a red curve C that links a black surface S . The curve C is labeled U_{2M} and the surface S is labeled S . The diagram is annotated with the handwritten text "アクシオン弦" (Axion string) above the curve and the equation $U_{2M} = e^{i\alpha}$ to the right of the curve. The surface S is represented by a circle with a small loop inside it.

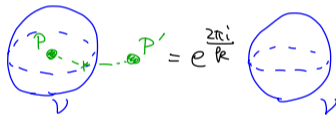
- 物理的意味: C 中にあるアクシオン弦 $\int_C \partial_\mu \phi dx^\mu = 2\pi$ を測る

高次対称性 3/3: 3次対称性

生成子: アクシオン 2点演算子 $U_3(\mathcal{V}) = \exp(i\phi(\mathcal{P}) - i\phi(\mathcal{P}'))$

荷電物体はアクシオン分域壁、群は \mathbb{Z}_k

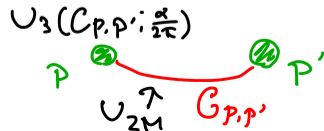
$$\langle U_3(\mathcal{P}, \mathcal{P}') e^{i \int_{\mathcal{V}} c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho}} \rangle = e^{\frac{2\pi i}{k} \text{Link}(\mathcal{V}, (\mathcal{P}, \mathcal{P}'))} \langle e^{i \int_{\mathcal{V}} c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho}} \rangle$$



- 物理的意味: アクシオン分域壁の存在を 2点演算子で測る

整数係数でない U_3 もありうる。これは U_{2M} の境界としてのみ存在する

$$U_3(\mathcal{C}_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}; \frac{\alpha}{2\pi}) = \exp\left(i \frac{\alpha}{2\pi} (\phi(\mathcal{P}) - \phi(\mathcal{P}'))\right) := \exp\left(i\alpha \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}_{\mathcal{P}, \mathcal{P}'}} \partial_\mu \phi dx^\mu\right)$$



まとめ: 3つの高次対称性がある

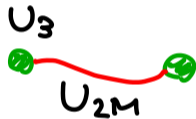
0次



2次



3次



まとめ: 3つの高次対称性がある

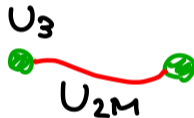
0次



2次



3次



これからの話

アクシオン・光子結合があると高次対称性はどうなる？

トポロジカルアクシオン電磁気学とその高次対称性 [6 スライド]

Y. Hidaka, M. Nitta, RY, 2107.08753, 2108.12564

メッセージ 6 つの対称性がある

0次



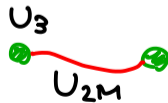
1次



2次



3次



セットアップ [e.g., Kogan '93]

低エネルギー極限での作用: 質量項 + トポロジカル結合

$$S = - \int d^4x \left(V_k(\phi) + \frac{v^2}{2} |\partial_\mu \chi - qa_\mu|^2 - \frac{N}{16\pi^2} \phi f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} \right) - \int \left(\frac{v'^2}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + \frac{1}{4e^2} |f_{\mu\nu}|^2 \right)$$

アクシオン・光子結合

- N : 整数 (UV 理論での Dirac フェルミオンの数) (時空多様体 M_4 はスピン多様体とする)

低エネルギー極限での作用: 質量項 + トポロジカル結合

$$S = - \int d^4x \left(V_k(\phi) + \frac{v^2}{2} |\partial_\mu \chi - qa_\mu|^2 - \frac{N}{16\pi^2} \phi f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} \right) - \int \left(\frac{v'^2}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + \frac{1}{4e^2} |f_{\mu\nu}|^2 \right)$$

アクシオン・光子結合

- N : 整数 (UV 理論での Dirac フェルミオンの数) (時空多様体 M_4 はスピン多様体とする)

トポロジカルソリトンを扱いたい。そのために双対トポロジカル理論を構成する。

トポロジカルアクシオン電磁気学

アクシオンおよび光子の質量項 $\overset{\text{等価}}{\longleftrightarrow}$ トポロジカル項

作用: トポロジカル項 + アクシオン・光子結合

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{2!2!} \frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{1}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

- 等価性 (のラフな説明): 低エネルギー極限を再現する。

$b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $f_{\mu\nu} = 0$, $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\partial_\mu \phi = 0$

技術的にはルジャンドル変換を行う

- アクシオン・光子結合は双対変換で動かない

トポロジカルアクシオン電磁気学

アクシオンおよび光子の質量項 $\overset{\text{等価}}{\longleftrightarrow}$ トポロジカル項

作用: トポロジカル項 + アクシオン・光子結合

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{2!2!} \frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{1}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

- 等価性 (のラフな説明): 低エネルギー極限を再現する。

$b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $f_{\mu\nu} = 0$, $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\partial_\mu \phi = 0$

技術的にはルジャンドル変換を行う

- アクシオン・光子結合は双対変換で動かない

この理論を「トポロジカルアクシオン電磁気学」と呼ぶことにする。作用が全てトポロジカル項で書けている。

トポロジカルアクシオン電磁気学

アクシオンおよび光子の質量項 $\xleftrightarrow{\text{等価}}$ トポロジカル項

作用: トポロジカル項 + アクシオン・光子結合

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{2!2!} \frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{1}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

- 等価性 (のラフな説明): 低エネルギー極限を再現する。

$b_{\mu\nu}$ の運動方程式: $f_{\mu\nu} = 0$, $c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式: $\partial_\mu \phi = 0$

技術的にはルジャンドル変換を行う

- アクシオン・光子結合は双対変換で動かない

この理論を「トポロジカルアクシオン電磁気学」と呼ぶことにする。作用が全てトポロジカル項で書けている。

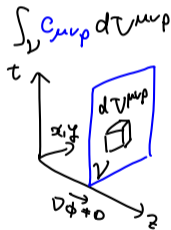
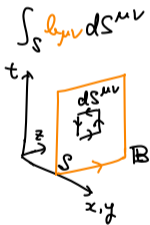
トポロジカルソリトンはアクシオン・光子結合が無い場合と同じ

トポロジカルソリトン = 双対場 $b_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

$$S = \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \int_V c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

磁束渦 アクション分域壁



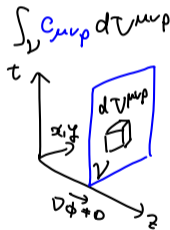
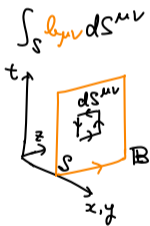
磁束渦、分域壁の配位を運動方程式で再現できる (アクション・光子結合が無い時と同じ)

トポロジカルソリトン = 双対場 $b_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu\rho}$ に結合する物体 [e.g., Sugamoto '78]

ソリトンも含めた作用

$$S = \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + \int_V c_{\mu\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} + \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

磁束渦 アクション分域壁



磁束渦、分域壁の配位を運動方程式で再現できる (アクション・光子結合が無い時と同じ)

トポロジカルアクション電磁気学の高次対称性はどうなるか？

アクシオン・光子結合があると、0次・電氣的1次対称性が変更される

光子とアクシオンの運動方程式が変わる

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{2!2!} \frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{1}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

において運動方程式をたてると、

アクシオン・光子結合があると、0次・電氣的1次対称性が変更される

光子とアクシオンの運動方程式が変わる

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{2!2!} \frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{1}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

において運動方程式をたてると、

- アクシオン: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left(\frac{k}{2\pi} c_{\nu\rho\sigma} + \frac{N}{8\pi^2} a_\nu \partial_\rho a_\sigma \right) = 0$

アクシオン・光子結合があると、0次・電氣的1次対称性が変更される

光子とアクシオンの運動方程式が変わる

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{2!2!} \frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{1}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

において運動方程式をたてると、

- アクシオン: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left(\frac{k}{2\pi} c_{\nu\rho\sigma} + \frac{N}{8\pi^2} a_\nu \partial_\rho a_\sigma \right) = 0$
- 光子: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \left(\frac{q}{2\pi} b_{\rho\sigma} + \frac{N}{4\pi^2} \phi \partial_\rho a_\sigma \right) = 0$

アクシオン・光子結合があると、0次・電氣的1次対称性が変更される

光子とアクシオンの運動方程式が変わる

$$S_{\text{TAE}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left(\frac{1}{2!2!} \frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} + \frac{1}{3!1!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} \partial_\sigma \phi + \frac{N}{32\pi^2} \phi f_{\mu\nu} f_{\rho\sigma} \right)$$

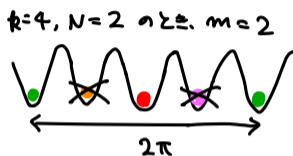
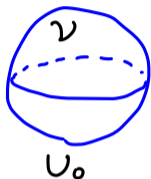
において運動方程式をたてると、

- アクシオン: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \left(\frac{k}{2\pi} c_{\nu\rho\sigma} + \frac{N}{8\pi^2} a_\nu \partial_\rho a_\sigma \right) = 0$
- 光子: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \left(\frac{q}{2\pi} b_{\rho\sigma} + \frac{N}{4\pi^2} \phi \partial_\rho a_\sigma \right) = 0$
- $b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho}$ の運動方程式は変わらない

アクシオンおよび光子の運動方程式を保存則として持つ0次、1次対称性の群が変形される。

0 次対称性の変形 $\mathbb{Z}_k \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{gcd}(N,k)}$

アクシオンのシフト対称性がアクシオン・光子結合 (アノマリー) で変形される。



- ポテンシャルを保つ対称性 \mathbb{Z}_k のうち、
アノマリーで破れない部分 \mathbb{Z}_m , $m = \text{gcd}(N, k)$ が残った対称性
- 物理的意味: アクシオン・光子結合があるとトポロジカルに保存する分域壁が制限される

$m = 1$ だとトポロジカルに安定な分域壁がなくなる。cf. ドメインウォール問題へのアプローチ [Sato, Takahashi, Yamada '18]

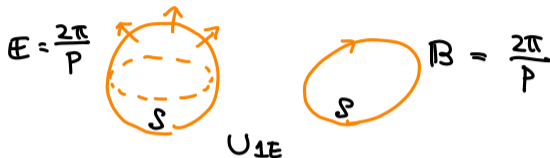
生成子の変更をあらわに書くと、

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{k} \int_{\mathcal{V}} dV^{\mu\nu\rho} \frac{1}{3!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{2\pi i}{m} \int_{\mathcal{V}} dV^{\mu\nu\rho} \left(\frac{1}{3!} \frac{k}{2\pi} c_{\mu\nu\rho} + \frac{N}{8\pi^2} a_\mu \partial_\nu a_\rho\right)\right)$$

対称性の制限は、生成子のゲージ不変性からも議論できる

1 次対称性の変形 $\mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_{\gcd(N,q)}$

磁束渦もアノマリーの影響を受ける



- 磁場とアクシオンが電流を作りうる $\frac{N}{16\pi^2} \phi f_{\mu\nu} \tilde{f}^{\mu\nu} \sim \frac{N}{4\pi^2} \mathbf{A} \cdot (\dot{\phi} \mathbf{B})$ (cf. カイラル磁気効果)
- 電流が N 本の誘導磁場を作るため、磁束は mod N でしか保存しなくなる
(例えば $N + 1$ 本 と 1 本の磁束は区別できない)
- 保存する磁束渦は $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}_{\gcd(N,q)}$ に制限される

生成子の変更をあらわに書くと、

$$\exp\left(\frac{2\pi i}{q} \int_S dS^{\mu\nu} \frac{1}{2!} \frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu}\right) \rightarrow \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \int_S dS^{\mu\nu} \frac{1}{2!} \left(\frac{q}{2\pi} b_{\mu\nu} + \frac{N}{4\pi^2} \phi f_{\mu\nu}\right)\right)$$

対称性の制限は、生成子のゲージ不変性からも議論できる

ここまでのまとめ: 6つの対称性がある

0次



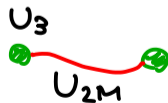
1次



2次

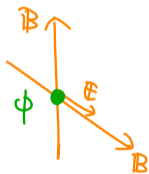
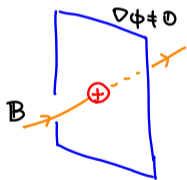


3次



高次対称性でトポロジカルソリトンの物理をみる [2 スライド]

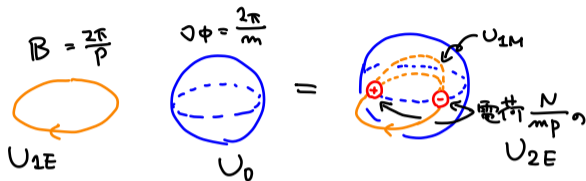
- Sikivie 効果 (電荷の誘起)
- 磁束の交差 $\xrightarrow{\text{単純化}}$ 磁束渦に電場をかける (アクシオンの誘起)



単純化

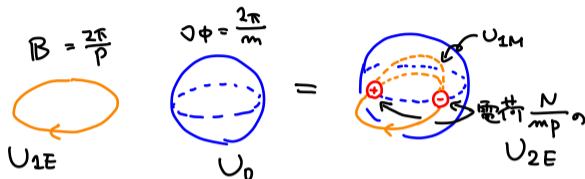


Sikivie 効果: $U_0 \times U_{1E} \rightarrow U_{1M} \times U_{2E}$



1. 磁場 U_{1E} と分域壁 U_0 を用意して、トポロジカルに動して交差させる

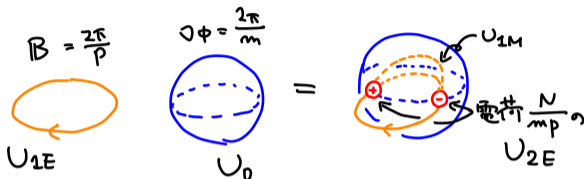
Sikivie 効果: $U_0 \times U_{1E} \rightarrow U_{1M} \times U_{2E}$



1. 磁場 U_{1E} と分域壁 U_0 を用意して、トポロジカルに動して交差させる
2. (一般には) 分数の誘導電荷が現れる $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{mp}$

$$m = \text{gcd}(N, k); p = \text{gcd}(N, q)$$

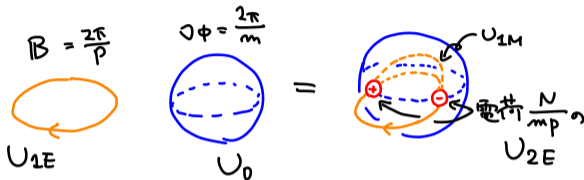
Sikivie 効果: $U_0 \times U_{1E} \rightarrow U_{1M} \times U_{2E}$



1. 磁場 U_{1E} と分域壁 U_0 を用意して、トポロジカルに動して交差させる
2. (一般には) 分数の誘導電荷が現れる $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{mp}$
3. 分数電荷の誘起 = U_{1M} を内部に持つ U_{2E} の誘起:

$m = \text{gcd}(N, k); p = \text{gcd}(N, q)$

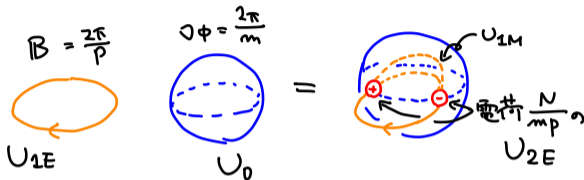
Sikivie 効果: $U_0 \times U_{1E} \rightarrow U_{1M} \times U_{2E}$



1. 磁場 U_{1E} と分域壁 U_0 を用意して、トポロジカルに動して交差させる
2. (一般には) 分数の誘導電荷が現れる $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla\phi \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{mp}$
3. 分数電荷の誘起 = U_{1M} を内部に持つ U_{2E} の誘起: $\exp\left(i\frac{N}{mp} \int_C a_\mu dx^\mu\right) = \exp\left(i\frac{N}{mp} \int_{S_C} f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}\right)$

$$m = \gcd(N, k); p = \gcd(N, q)$$

Sikivie 効果: $U_0 \times U_{1E} \rightarrow U_{1M} \times U_{2E}$



1. 磁場 U_{1E} と分域壁 U_0 を用意して、トポロジカルに動して交差させる

2. (一般には) 分数の誘導電荷が現れる $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{N}{4\pi^2} \nabla \phi \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{m} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{mp}$

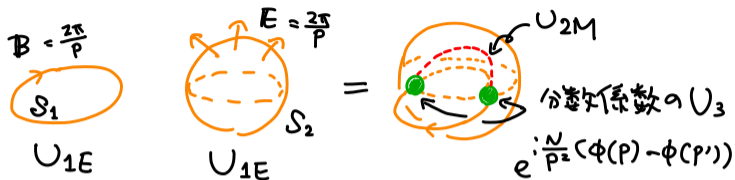
3. 分数電荷の誘起 = U_{1M} を内部に持つ U_{2E} の誘起: $\exp\left(i \frac{N}{mp} \int_C a_\mu dx^\mu\right) = \exp\left(i \frac{N}{mp} \int_{S_C} f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}\right)$

わかること: 2次対称性が \mathbb{Z}_q から $\mathbb{Z}_Q \ni e^{\frac{2\pi i}{q} \cdot \frac{N}{mp}}$ と拡大している。

誘導電荷で測る磁束洞の AB 位相: $\exp\left(i \frac{N}{mp} \int_C a_\mu dx^\mu\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{q} \frac{N}{mp}\right)$

$$m = \gcd(N, k); p = \gcd(N, q)$$

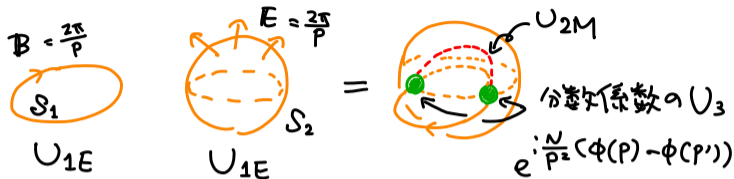
磁束渦に電場をかける: $U_{1E} \times U_{1E} \rightarrow U_{2M} \times U_3$



1. 磁束渦 $U_{1E}(S_1)$ を用意し、それに電場 $U_{1E}(S_2)$ をトポロジカルに動かしてぶつける

(磁束渦の世界面 S_2 を空間的に置くとローレンツ変換により電場になる)

磁束渦に電場をかける: $U_{1E} \times U_{1E} \rightarrow U_{2M} \times U_3$



1. 磁束渦 $U_{1E}(S_1)$ を用意し、それに電場 $U_{1E}(S_2)$ をトポロジカルに動かしてぶつける

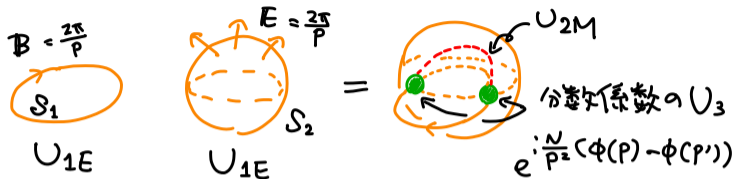
(磁束渦の世界面 S_2 を空間的に置くとローレンツ変換により電場になる)

2. (一般には) 分数のアクシオン演算子が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{p^2}$ ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース)

$$p = \text{gcd}(N, q)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \text{ はアクシオンのソース項とみなせる: } \partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

磁束渦に電場をかける: $U_{1E} \times U_{1E} \rightarrow U_{2M} \times U_3$



1. 磁束渦 $U_{1E}(S_1)$ を用意し、それに電場 $U_{1E}(S_2)$ をトポロジカルに動かしてぶつける

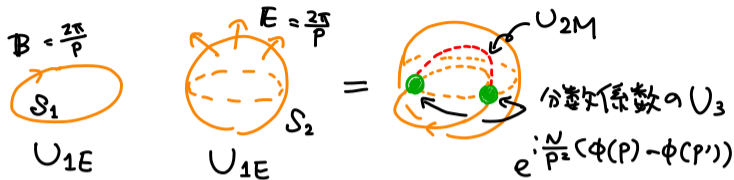
(磁束渦の世界面 S_2 を空間的に置くとローレンツ変換により電場になる)

2. (一般には) 分数のアクシオン演算子が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{p^2}$ ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース)
3. 分数係数のアクシオンの誘起 = U_{2M} を境界を持つ U_3 の誘起

$$p = \text{gcd}(N, q)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \text{ はアクシオンのソース項とみなせる: } \partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

磁束渦に電場をかける: $U_{1E} \times U_{1E} \rightarrow U_{2M} \times U_3$



1. 磁束渦 $U_{1E}(S_1)$ を用意し、それに電場 $U_{1E}(S_2)$ をトポロジカルに動かしてぶつける

(磁束渦の世界面 S_2 を空間的に置くとローレンツ変換により電場になる)

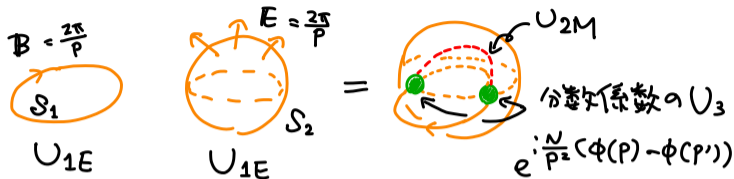
2. (一般には) 分数のアクシオン演算子が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{p^2}$ ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース)
3. 分数係数のアクシオンの誘起 = U_{2M} を境界に持つ U_3 の誘起

$$\exp\left(i\frac{N}{p^2}(\phi(P) - \phi(P'))\right) = \exp\left(i\frac{N}{p^2} \int_{C_{P,P'}} \partial_\mu \phi dx^\mu\right)$$

$$p = \text{gcd}(N, q)$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \text{ はアクシオンのソース項とみなせる: } \partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$$

磁束渦に電場をかける: $U_{1E} \times U_{1E} \rightarrow U_{2M} \times U_3$



1. 磁束渦 $U_{1E}(S_1)$ を用意し、それに電場 $U_{1E}(S_2)$ をトポロジカルに動かしてぶつける

(磁束渦の世界面 S_2 を空間的に置くとローレンツ変換により電場になる)

2. (一般には) 分数のアクシオン演算子が現れる $\frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \frac{N}{4\pi^2} \frac{2\pi}{p} \cdot \frac{2\pi}{p} = \frac{N}{p^2}$ ($\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース)
3. 分数係数のアクシオンの誘起 = U_{2M} を境界に持つ U_3 の誘起

$$\exp\left(i \frac{N}{p^2} (\phi(P) - \phi(P'))\right) = \exp\left(i \frac{N}{p^2} \int_{C_{P, P'}} \partial_\mu \phi dx^\mu\right)$$

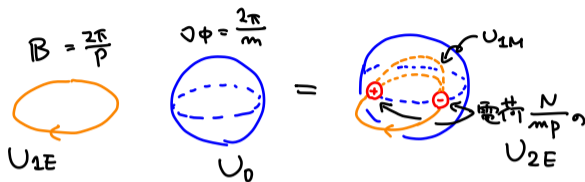
わかること: 3次対称性が \mathbb{Z}_k から $\mathbb{Z}_K \ni e^{\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}}$ に拡大している。

誘起したアクシオンで分域壁を測る: $\exp\left(i \frac{N}{p^2} (\phi(P) - \phi(P'))\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}\right)$

$p = \text{gcd}(N, q)$

$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ はアクシオンのソース項とみなせる: $\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi = \frac{N}{4\pi^2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$

対称性の生成子の交差から別の対称性が出てきた



対称性の生成子の相関 (カレント代数) \rightarrow 群構造

- 通常対称性: $0 \text{ 次} \times 0 \text{ 次} = 0 \text{ 次} \rightarrow$ 通常 (非可換) 群
 - 角運動量の代数 $SO(3), SO(3, 1)$
 - ハドロン物理における $SU(N)$ カレント代数
 - 2d CFT の Virasoro 代数
- 高次対称性の生成子の相関 = ??? 群

この高次対称性の相関を記述する群は何か？

トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 [5 スライド]

4 群とは？

[Arvasi, et al. '09]

正確には、3-crossed module や semi-strict 4-group などと呼ばれる

群の 4 つ組で、次の公理を満たすもの (今回使うもののみ。あと約 20 個の公理がある。)

- 4 つの群 G_0, G_1, G_2, G_3
- 群の間の写像 $G_3 \xrightarrow{\partial_3} G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0$ ただし、 $\partial_n \circ \partial_{n-1} g = 1$
- G_0 から他の群への作用 (adjoint 変換の一般化) $\triangleright: g \triangleright g' = gg'g^{-1}$ for $g, g' \in G_0$, $g \triangleright h \in G_1$ for $h \in G_1, \dots$
- パイファー・リフティング $\{h, h'\} \in G_2$ for $h, h' \in G_1$
- これらの間の整合性: $g \triangleright \{h, h'\} = \{g \triangleright h, g \triangleright h'\}$ など

4 群とは？

[Arvasi, et al. '09]

正確には、3-crossed module や semi-strict 4-group などと呼ばれる

群の 4 つ組で、次の公理を満たすもの (今回使うもののみ。あと約 20 個の公理がある。)

- 4 つの群 G_0, G_1, G_2, G_3
- 群の間の写像 $G_3 \xrightarrow{\partial_3} G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0$ ただし、 $\partial_n \circ \partial_{n-1} g = 1$
- G_0 から他の群への作用 (adjoint 変換の一般化) $\triangleright: g \triangleright g' = gg'g^{-1}$ for $g, g' \in G_0$, $g \triangleright h \in G_1$ for $h \in G_1, \dots$
- パイファー・リフティング $\{h, h'\} \in G_2$ for $h, h' \in G_1$
- これらの間の整合性: $g \triangleright \{h, h'\} = \{g \triangleright h, g \triangleright h'\}$ など

物理的な解釈をしたい

4 群の物理的解釈: 互いに相関する 0,1,2,3 次対称性の組 (1/2)

[cf. Hidaka, Nitta, RY '20]

次の解釈で公理を満たせる (これから使うものに関してはこれで OK)

- 4 つの群 G_0, G_1, G_2, G_3 : それぞれの群でラベルされた 0, 1, 2, 3 次対称性の生成子



4 群の物理的解釈: 互いに相関する 0,1,2,3 次対称性の組 (1/2)

[cf. Hidaka, Nitta, RY '20]

次の解釈で公理を満たせる (これから使うものに関してはこれで OK)

- 4 つの群 G_0, G_1, G_2, G_3 : それぞれの群でラベルされた 0, 1, 2, 3 次対称性の生成子



- 群間の写像 $G_3 \xrightarrow{\partial_3} G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1 \xrightarrow{\partial_1} G_0$: 生成子の内部をとる操作。

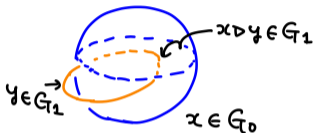


$\partial_{n-1} \circ \partial_n g = 1$: 内部の内部は何もない (境界の境界は何もない)

4 群の物理的解釈: 互いに相関する 0,1,2,3 次対称性の組 (2/2)

[cf. Hidaka, Nitta, RY '20]

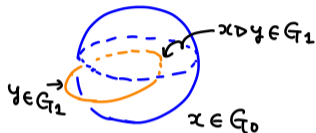
- G_0 から他の群への作用 ▷: 0 次対称性の生成子を他の生成子に当てる (正確にはきちんと包む)



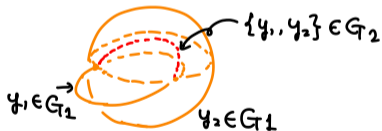
4群の物理的解釈: 互いに相関する 0,1,2,3 次対称性の組 (2/2)

[cf. Hidaka, Nitta, RY '20]

- G_0 から他の群への作用 \triangleright : 0 次対称性の生成子を他の生成子に当てる (正確にはきちんと包む)



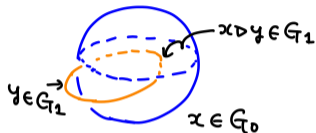
- パイファー (Peiffer) ・リフティング: 1 次対称性の生成子同士を当てる (正確にはきちんと包む (surface link と呼ばれる))



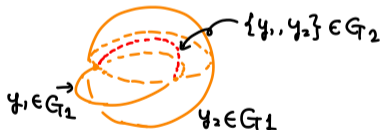
4群の物理的解釈: 互いに相関する 0,1,2,3 次対称性の組 (2/2)

[cf. Hidaka, Nitta, RY '20]

- G_0 から他の群への作用 ▷: 0 次対称性の生成子を他の生成子に当てる (正確にはきちんと包む)



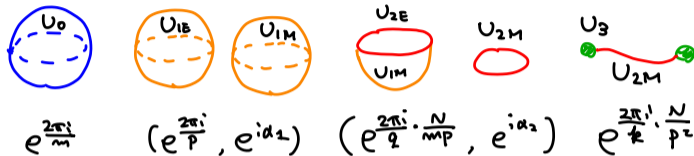
- パイファー (Peiffer) ・リフティング: 1 次対称性の生成子同士を当てる (正確にはきちんと包む (surface link と呼ばれる))



Sikivie 効果や磁束と電場の相関を表現できそう

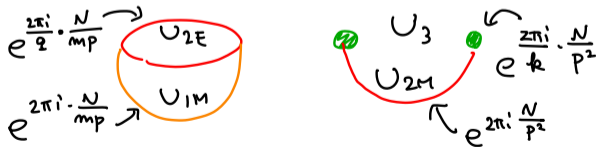
トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 (1/2)

- 4 つの群 $G_0 = \mathbb{Z}_m$, $G_1 = \mathbb{Z}_p \times U(1)$, $G_2 = \mathbb{Z}_Q \times U(1)$, $G_3 = \mathbb{Z}_K$



- 生成子の内部をとる写像: $G_3 \xrightarrow{\partial_3} G_2 \xrightarrow{\partial_2} G_1$:

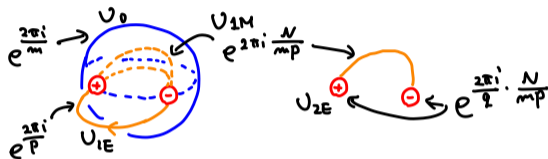
$$\partial_2(e^{\frac{2\pi i}{q} \cdot \frac{N}{mp}}, e^{i\alpha_2}) = (1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}), \quad \partial_3 e^{\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}} = (1, e^{2\pi i \frac{N}{p^2}})$$



$\partial_2 \circ \partial_3 \exp(\frac{2\pi i}{k} \cdot \frac{N}{p^2}) = 1$ も満たしている

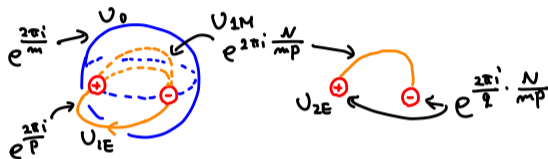
トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 (2/2)

- G_0 から G_1 への作用: $e^{2\pi i/m} \triangleright (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1}) = (1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}) \cdot (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1})$

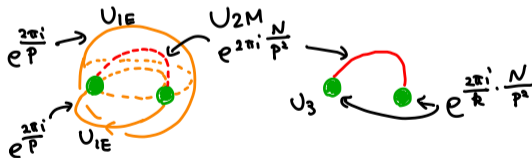


トポロジカルアクシオン電磁気学における 4 群 (2/2)

- G_0 から G_1 への作用: $e^{2\pi i/m} \triangleright (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1}) = (1, e^{2\pi i \frac{N}{mp}}) \cdot (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1})$

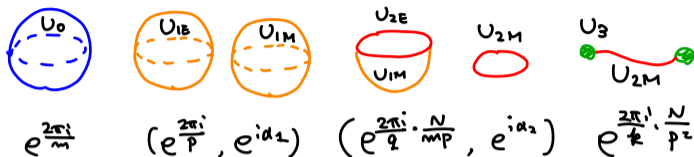


- パイファー・リフティング: $\{(e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha_1}), (e^{2\pi i/p}, e^{i\alpha'_1})\} = (1, e^{2\pi i \frac{N}{p^2}})$



コメント: パイファー・リフティングの構造は QCD にも現れる [Tanizaki & Ünsal '19]

まとめ



トポロジカルアクシオン電磁気学には「4 群」で記述される大域的対称性が存在する

- トポロジカルアクシオン電磁気学には、0,1,2,3 次対称性が存在して、それらは 4 群として記述される
- Sikivie 効果やは、4 群の「作用」として理解できる
- 磁束と電場の相関は、4 群の「パイファー・リフティング」として理解できる

今後の課題:

- 既知の物理に非自明な高次対称性があるかも (特に広がった物体)
e.g., Lazarides-Shafi 機構はどうか? アリス弦には非可逆対称性があるが... [Heidenreich et al, '21]
- トポロジカル超伝導体への応用

Appendix

トポロジカルアクシオン電磁気学におけるトーフト量子異常 [3 スライド]

トーフト量子異常: ダイナミカルにゲージ化できない大域的対称性

理論の inconsistency ではない。

一般的な性質

- 保存カレントの保存則 (ゲージ不変性) が他の保存カレントの挿入によって破られる
- 対称性を保つ自明な基底状態は量子異常を再現できないため禁止される。
- 保存則 (ゲージ不変性) が破れているため、トーフト量子異常を持つ対称性をダイナミカルにゲージ化すると、理論が不整合になる

BF 理論で具体的にみる

BF 理論のトーフト量子異常

電氣的 1 次対称性と 2 次対称性間のトーフト量子異常

$$\langle U_{1E}(S)U_{2E}(C) \rangle = e^{\frac{2\pi i}{q} \text{Link}(S,C)} \langle U_{1E}(S) \rangle = e^{\frac{2\pi i}{q} \text{Link}(S,C)} \neq 1$$

- 電氣的 1 次対称性の保存則 $\langle U_{1E}(S) \rangle = \langle e^{i \int_S b} \rangle = 1$ が、
2 次対称性の生成子 $U_{2E}(C) = e^{i \int_C a}$ の挿入で変更される
- 基底状態は自明でなくトポロジカル秩序相:
広がった物体に分数 AB 位相が存在する有ギャップ相 (Abelian のとき)
- 電氣的 1 次対称性と 2 次対称性は同時にゲージ化できない

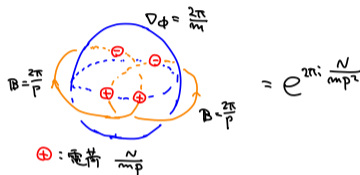
$S = 1$

$S = e^{\frac{2\pi i}{q}}$

トポロジカルアクシオン電磁気学ではどうか？

トポロジカルアクシオン電磁気学のトーフト量子異常

0 次対称性と電氣的 1 次対称性間のトーフト量子異常



誘起された U_{1M} などは略した

- 電氣的 1 次対称性の保存則 $\langle U_{1E}(S) \rangle = 1$ が、Sikivie 効果を起こした分域壁の挿入で変更される
- 分域壁の基底状態はトポロジカル秩序相になっている

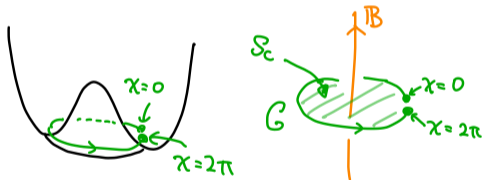
ラフな導出

- Sikivie 効果により、0 次対称性と 1 次対称性の複合演算子には分数電荷 $N/(mp)$ の世界線 $\exp(i \frac{N}{mp} \int_C a_\mu dx^\mu)$ がある
- 従って $\int_C a_\mu dx^\mu = \frac{2\pi}{p}$ の磁束渦である U_{1E} に対する分数電荷による AB 効果を考えると、 $\exp(i \frac{N}{mp} \int_C a_\mu dx^\mu) = \exp(2\pi i \frac{N}{mp^2})$ の位相が出る

Abrikosov-Nielsen-Olesen (ANO) 磁束渦: 分数量子化された磁束

磁束渦の量子化 = χ の巻きつき

$$\int_{S_C} da = \frac{1}{q} \int_C d\chi = \frac{2\pi}{q}$$



BF 作用への双対変換 [Horowitz '89; Blau & Tompson '89]

Stückelberg 作用 $\xleftrightarrow{\text{dual}}$ BF 作用

$$\frac{v^2}{2} \int |\partial_\mu \chi - qa_\mu|^2 \xleftrightarrow{\text{dual}} \frac{q}{2\pi} \int \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{2!2!} b_{\mu\nu} f_{\rho\sigma}$$

$b_{\mu\nu}$: 2 階反対称テンソルゲージ場

導出:

1. Stückelberg 作用を 3 階反対称テンソル場 $h_{\mu\nu\rho}$ 加えて書き換える:

$$\frac{1}{8\pi^2 v^2} \int |h_{\mu\nu\rho}|^2 + \frac{1}{2\pi} \int \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\mu\nu\rho} (\partial_\mu \chi - qa_\mu)$$

2. NG モード χ を運動方程式で消去する: $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu h_{\nu\rho\sigma} = 0 \rightarrow h_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu b_{\nu\rho} + \text{cyclic}$
3. $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu b_{\nu\rho} a_\sigma$ が BF 作用になる。 $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu b_{\nu\rho} \partial_\sigma \chi$ は表面項となって落ちる。
4. 低エネルギー極限をとる ($v \rightarrow \infty$)

注意: 整数電荷でない 2 次対称性の生成子について

整数電荷でないウィルソンループは、磁氣的 1 次対称性の生成子の境界にのみ住む

ディラックの量子化条件 $\frac{1}{2!} \int_S f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \in 2\pi\mathbb{Z}$ から従う

- 電荷 $Q \in \mathbb{R}$ のウィルソンループを、ゲージ不変な量 $f_{\mu\nu}$ を用いて

$$\exp(iQ \int_C a_\mu dx^\mu) := \exp(iQ \int_{S_C} f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}) \text{ と定義する}$$

- この定義では、 S_C を手で与えてしまった。定義が S_C の取り方によらないための条件は、

別の S'_C で定義した時の差が

$$\exp(iQ \int_{S_C} f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} - iQ \int_{S'_C} f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}) = \exp(iQ \int_S f_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}) = \exp(2\pi i Q n) = 1 \text{ となるとき。}$$

- よって、 $Q \in \mathbb{Z}$ の時はウィルソンループは S_C の取り方によらない。

そうでないときは、 S_C の取り方を与えて定義する。

- 特に、整数電荷でない 2 次対称性の生成子は、パラメータが $2\pi Q$ の磁氣的 1 次対称性の境界で定義する

$$\exp(iQ \int_C a_\mu dx^\mu) := \exp(2\pi i Q \int_{S_C} \frac{f_{\mu\nu}}{2\pi} dS^{\mu\nu})$$

BF 理論での相関関数の計算 0/5

[Horowitz & Srednicki '89; Oda & Yahkikozawa '89; cf. Chen, Tiwari, Ryu '15 [1509.04266]]

次の相関関数を求める

1 次対称性変換

$$\langle U_{1E}(S) e^{i \int_C a_\mu dx^\mu} \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}a \mathcal{D}b e^{\frac{iq}{2\pi} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} b_{\mu\nu} \partial_\rho a_\sigma + i \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + i \int_C a_\mu dx^\mu}$$

対称性の生成子 $e^{i \int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}}$ を作用に吸収させることで計算したいが、2 つ困ることがある

- 作用は 1 階微分だが、 $\int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}$ に微分がない
- 作用は時空積分であるのに対し、 $\int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}$ は面積分

それぞれ解決する。

BF 理論での相関関数の計算 1/5

[Horowitz & Srednicki '89; Oda & Yahkikozawa '89; cf. Chen, Tiwari, Ryu '15 [1509.04266]]

ストークスの定理で $\int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}$ を 1 階微分の量にできる

ストークスの定理

$$\int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} = \int_{\mathcal{V}_S} \partial_\mu b_{\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho}$$



しかし、まだ $\int_{\mathcal{V}_S} \partial_\mu b_{\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho}$ は体積積分であり、時空積分でない

BF 理論での相関関数の計算 2/5

[Horowitz & Srednicki '89; Oda & Yahkikozawa '89; cf. Chen, Tiwari, Ryu '15 [1509.04266]]

デルタ関数で $\int_{\mathcal{V}_S} \partial_\mu b_{\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho}$ を時空積分にできる

デルタ関数

$$\int_{\mathcal{V}_S} \partial_\mu b_{\nu\rho} dV^{\mu\nu\rho} = \int d^4x \partial_\mu b_{\nu\rho} \delta^{\mu\nu\rho}(\mathcal{V}_S), \quad \delta^{\mu\nu\rho}(\mathcal{V}_S) = \int_{\mathcal{V}_S} \delta^4(x-y) dV^{\mu\nu\rho}(y)$$

導出

- デルタ関数を使った書き換えで、体積積分を分離できる

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}_S} \partial_\mu b_{\nu\rho}(y) dV^{\mu\nu\rho}(y) &= \int d^4x \int_{\mathcal{V}_S} \delta^4(x-y) \partial_\mu b_{\nu\rho}(x) dV^{\mu\nu\rho}(y) \\ &= \int d^4x \partial_\mu b_{\nu\rho}(x) \left(\int_{\mathcal{V}_S} \delta^4(x-y) dV^{\mu\nu\rho}(y) \right) \end{aligned}$$

- \mathcal{V}_S 上で non-zero なデルタ関数を次のように与える:

$$\delta^{\mu\nu\rho}(\mathcal{V}_S) := \left(\int_{\mathcal{V}_S} \delta^4(x-y) dV^{\mu\nu\rho}(y) \right)$$

BF 理論での相関関数の計算 3/5

[Horowitz & Srednicki '89; Oda & Yahkikozawa '89; cf. Chen, Tiwari, Ryu '15 [1509.04266]]

これより、作用 $+\int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}$ は次のようになる:

$$\frac{q}{2\pi} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} b_{\mu\nu} \partial_\rho a_\sigma + \int d^4x \partial_\rho b_{\mu\nu} \delta^{\rho\mu\nu} (\mathcal{V}_S) = \frac{q}{2\pi} \int d^4x b_{\mu\nu} \partial_\rho (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} a_\sigma - \frac{2\pi}{q} \delta^{\rho\mu\nu} (\mathcal{V}_S))$$

よって、 a_μ の再定義 $a_\mu - \frac{2\pi}{q} \frac{1}{3!} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \delta^{\nu\rho\sigma} (\mathcal{V}_S) \rightarrow a_\mu$ で $\int_S b_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}$ を作用に吸収できる:

1 次対称性変換

$$\begin{aligned} \langle U_{1E}(S) e^{i \int_C a_\mu dx^\mu} \rangle &= e^{\frac{2\pi i}{q} \int_C \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \delta^{\nu\rho\sigma} (\mathcal{V}_S) dx^\mu} \mathcal{N} \int \mathcal{D}a \mathcal{D}b e^{\frac{iq}{2\pi} \int \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} b_{\mu\nu} \partial_\rho a_\sigma + i \int_C a_\mu dx^\mu} \\ &= e^{\frac{2\pi i}{q} \int_C \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \delta^{\nu\rho\sigma} (\mathcal{V}_S) dx^\mu} \langle e^{i \int_C a_\mu dx^\mu} \rangle \end{aligned}$$

a_μ の再定義に連動して $e^{i \int_C a_\mu dx^\mu}$ から定数位相 $e^{\frac{2\pi i}{q} \int_C \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \delta^{\nu\rho\sigma} (\mathcal{V}_S) dx^\mu}$ が出てきた。これは何か？

BF 理論での相関関数の計算 4/5

[Horowitz & Srednicki '89; Oda & Yahkikozawa '89; cf. Chen, Tiwari, Ryu '15 [1509.04266]]

リンク数

$$\int_C \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \delta^{\nu\rho\sigma}(\mathcal{V}_S) dx^\mu = \text{Link}(S, C)$$



- 積分 = \mathcal{V}_S と C の交差数

$\delta^{\nu\rho\sigma}(\mathcal{V}_S)$ は \mathcal{V}_S 上のデルタ関数なので、 \mathcal{V}_S と C の交点で積分が有限になる

- \mathcal{V}_S と C の交差数 = S と C のリンク数

BF 理論での相関関数の計算 5/5

[Horowitz & Srednicki '89; Oda & Yahkikozawa '89; cf. Chen, Tiwari, Ryu '15 [1509.04266]]

よって、求めたい式を得る

1 次対称性変換

$$\langle U_{1E}(\mathcal{S}) e^{i \int_{\mathcal{C}} a_{\mu} dx^{\mu}} \rangle = e^{\frac{2\pi i}{q} \text{Link}(\mathcal{S}, \mathcal{C})} \langle e^{i \int_{\mathcal{C}} a_{\mu} dx^{\mu}} \rangle$$

[back]

Bibliography

Bibliography - I

- [1] Y. Hidaka, M. Nitta, and R. Yokokura, "Topological axion electrodynamics and 4-group symmetry," arXiv:2107.08753 [hep-th].
(pages 1, 60).
- [2] Y. Hidaka, M. Nitta, and R. Yokokura, "Global 4-group symmetry and 't Hooft anomalies in topological axion electrodynamics," arXiv:2108.12564 [hep-th].
(pages 1, 60).
- [3] I. I. Kogan, "Axions, monopoles and cosmic strings," arXiv:hep-ph/9305307.
(pages 5, 6, 7, 8, 62, 63).
- [4] X.-L. Qi, E. Witten, and S.-C. Zhang, "Axion topological field theory of topological superconductors," Phys. Rev. B **87** (2013) 134519, [arXiv:1206.1407 [cond-mat.supr-con]].
(pages 5, 6, 7, 8).
- [5] F. Wilczek, "Two Applications of Axion Electrodynamics," Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1799.
(pages 5, 6, 7, 8).
- [6] P. Sikivie, "On the Interaction of Magnetic Monopoles With Axionic Domain Walls," Phys. Lett. **137B** (1984) 353–356.
(pages 9, 10, 11).
- [7] T. H. Hansson, V. Oganesyan, and S. L. Sondhi, "Superconductors are topologically ordered," Annals Phys. **313** (2004) no. 2, 497–538, [arXiv:cond-mat/0404327 [cond-mat.supr-con]].
(pages 16, 17, 18).
- [8] D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, "Generalized Global Symmetries," JHEP **02** (2015) 172, [arXiv:1412.5148 [hep-th]].
(pages 16, 17, 18, 21, 39).
- [9] T. Banks and N. Seiberg, "Symmetries and Strings in Field Theory and Gravity," Phys. Rev. **D83** (2011) 084019, [arXiv:1011.5120 [hep-th]].
(page 21).

Bibliography - II

- [10] A. Kapustin and N. Seiberg, "Coupling a QFT to a TQFT and Duality," JHEP **04** (2014) 001, [arXiv:1401.0740 [hep-th]].
(pages 21, 39).
- [11] E. Cremmer and J. Scherk, "Spontaneous dynamical breaking of gauge symmetry in dual models," Nucl. Phys. **B72** (1974) 117–124.
(pages 24, 25, 26, 27).
- [12] A. Sugamoto, "Dual Transformation in Abelian Gauge Theories," Phys. Rev. **D19** (1979) 1820.
(pages 28, 29, 30, 31, 32, 33, 67, 68).
- [13] Y. Hidaka, M. Nitta, and R. Yokokura, "Emergent discrete 3-form symmetry and domain walls," Phys. Lett. B **803** (2020) 135290, [arXiv:1912.02782 [hep-th]].
(page 39).
- [14] A. Aurilia, Y. Takahashi, and P. K. Townsend, "The U(1) Problem and the Higgs Mechanism in Two-dimensions and Four-dimensions," Phys. Lett. **95B** (1980) 265–268.
(pages 42, 43, 44, 45, 46).
- [15] A. Aurilia and Y. Takahashi, "Relativistic Wave Equations for Antisymmetric Tensor Gauge Fields," Phys. Rev. **D23** (1981) 1752.
(pages 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53).
- [16] R. Sato, F. Takahashi, and M. Yamada, "Unified Origin of Axion and Monopole Dark Matter, and Solution to the Domain-wall Problem," Phys. Rev. D **98** (2018) no. 4, 043535, [arXiv:1805.10533 [hep-ph]].
(page 73).
- [17] Z. Arvasi, T. S. Kuzpinari, and E. O. Uslu, "Three-crossed modules," Homology, Homotopy and Applications **11** (2009) no. 2, 161–187, [arXiv:0812.4685].
(pages 89, 90).
- [18] Y. Hidaka, M. Nitta, and R. Yokokura, "Global 3-group symmetry and 't Hooft anomalies in axion electrodynamics," JHEP **01** (2021) 173, [arXiv:2009.14368 [hep-th]].
(pages 91, 92, 93, 94, 95).

Bibliography - III

- [19] Y. Tanizaki and M. Ünsal, "Modified instanton sum in QCD and higher-groups," JHEP **03** (2020) 123, [arXiv:1912.01033 [hep-th]].
(pages 97, 98).
- [20] B. Heidenreich, J. McNamara, M. Montero, M. Reece, T. Rudelius, and I. Valenzuela, "Non-Invertible Global Symmetries and Completeness of the Spectrum," arXiv:2104.07036 [hep-th].
(page 99).
- [21] G. T. Horowitz, "Exactly Soluble Diffeomorphism Invariant Theories," Commun. Math. Phys. **125** (1989) 417.
(page 106).
- [22] M. Blau and G. Thompson, "A New Class of Topological Field Theories and the Ray-singer Torsion," Phys. Lett. **B228** (1989) 64–68.
(page 106).
- [23] G. T. Horowitz and M. Srednicki, "A Quantum Field Theoretic Description of Linking Numbers and Their Generalization," Commun. Math. Phys. **130** (1990) 83–94.
(pages 108, 109, 110, 111, 112, 113).
- [24] I. Oda and S. Yahikozawa, "Linking Numbers and Variational Method," Phys. Lett. **B238** (1990) 272–278.
(pages 108, 109, 110, 111, 112, 113).
- [25] X. Chen, A. Tiwari, and S. Ryu, "Bulk-boundary correspondence in (3+1)-dimensional topological phases," Phys. Rev. **B94** (2016) no. 4, 045113, [arXiv:1509.04266 [cond-mat.str-el]]. [Addendum: Phys. Rev. **B94** (2016) no. 7, 079903].
(pages 108, 109, 110, 111, 112, 113).