Product of Random States and Spatial (Half-)Wormholes

玉岡 幸太郎 (日大)

2108.08308 with 後藤 郁夏人 氏(理研)・楠亀 裕哉 氏(Caltech)・宇賀神 知紀 氏(基研)
(JHEP 10 (2021) 205)

(AdS/CFT対応で)

今日の話：ワームホールは量子相関無しで作れるか？

① ワームホールは量子相関で作れる（レビュー）

② 粗視化すれば古典相関でも作れる

③ $(\text{ノイズ})^{\otimes 2} =$ ワームホール

④ 議論

今日の話：ワームホールは量子相関無しで作れるか？

① ワームホールは量子相関で作れる（レビュー）

② 粗視化すれば古典相関でも作れる

③ $(\text{ノイズ})^{\otimes 2}$ = ワームホール (アイランド公式関連)

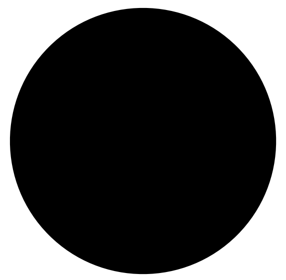
④ 議論

①-1 ワームホールは量子相関で作れる（レビュー）

ブラックホール in AdS_{d+1} with 逆温度β ⟷ 熱的状態 in CFT_d with 逆温度β

Witten

(Hawking-Page 温度以上で typical)



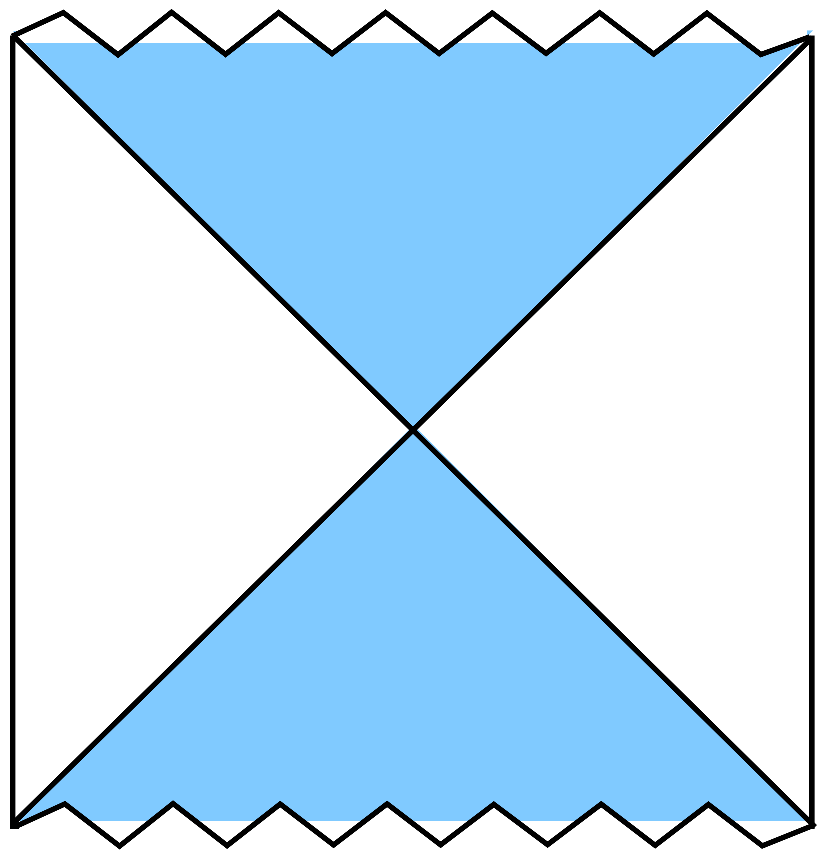
$$\rho_\beta = \mathrm{e}^{-\beta H}/Z(\beta)$$

どの微視的状態がブラックホールに相当？ ⟷ どのような純粋状態が熱的状態で近似できる？

$$\mathrm{Tr}[|\psi\rangle\langle\psi|\mathcal{O}] \simeq \mathrm{Tr}[\rho_\beta \mathcal{O}]$$

典型的状態
(Typical state)

内側（ワームホール）？

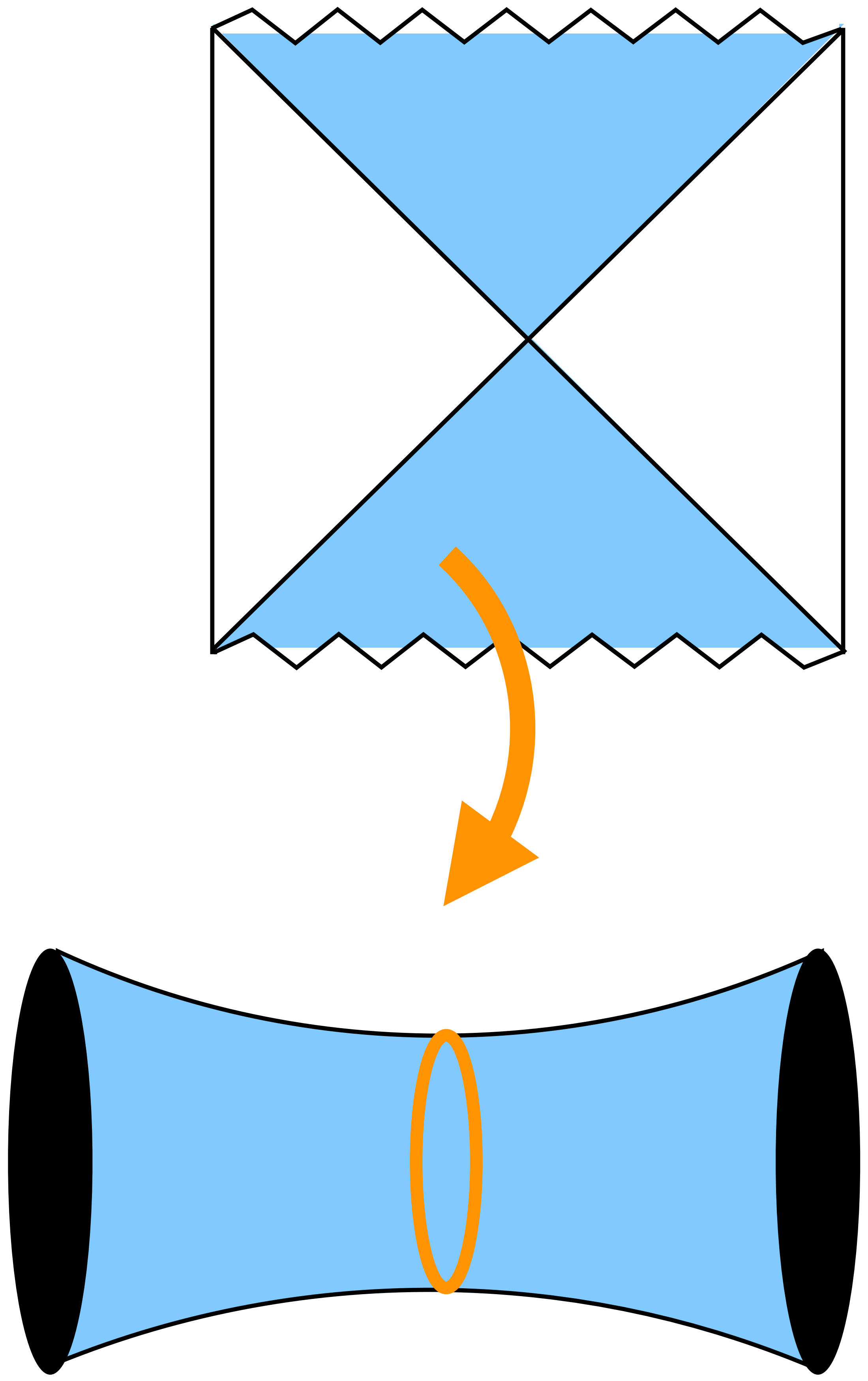


Maldacena
(See also Israel, Balasubramanian-Kraus-Lawrence-Trivedi,…)

$$|\mathrm{TFD}_\beta\rangle = \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}E_n}|n_L n_R^*\rangle$$

！片側を部分トレースで ρ_β に戻る (純粋化)

①-1 ワームホールは量子相関で作れる（レビュー）



$$\rho_R \equiv \mathrm{Tr}_L|\mathrm{TFD}_\beta\rangle\langle\mathrm{TFD}_\beta| = \frac{1}{Z(\beta)}\sum_n \mathrm{e}^{-\beta E_n}|n_R\rangle\langle n_R| = \rho_\beta$$

$$S_R \equiv S(\rho_R) = -\mathrm{Tr}_R\rho_R\log\rho_R = -\mathrm{Tr}_R\rho_\beta\log\rho_\beta = \underline{S_{\mathrm{BH}}}$$

「場の理論のエンタングルメント・エントロピーが

双対な時空の極小曲面の面積と一致」

(Ryu-Takayanagi 公式 の具体例)

“ER = EPR”　ワームホールには量子相関が必要？

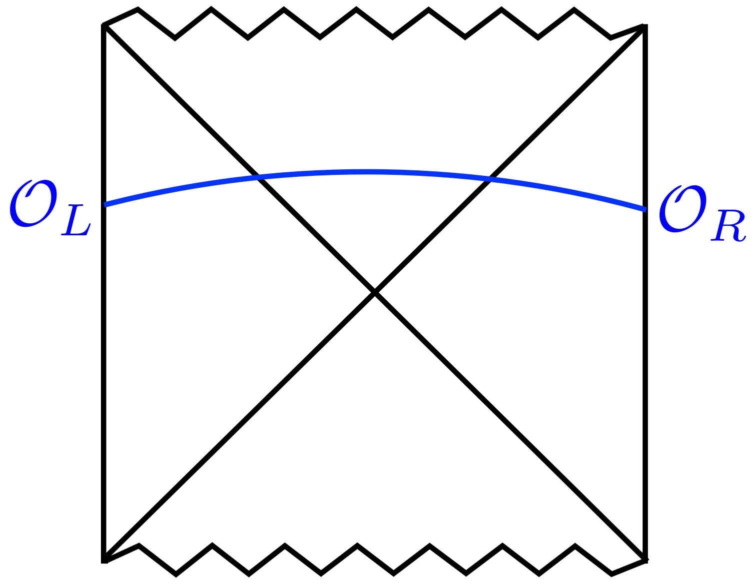
①-2 ワームホールは量子相関無しで“作れる”か？

直積状態をHolographic CFT (重力理論と双対な場の理論) で考えたとき、

ワームホール時空の寄与は存在しうるか？

完全に真逆の状況： $|\psi\rangle\,|\psi\rangle$ （直積状態）

少なくとも、素朴にはダメ： $\langle\psi\psi|\mathcal{O}_L\mathcal{O}_R|\psi\psi\rangle = \langle\psi|\mathcal{O}_L|\psi\rangle\,\langle\psi|\mathcal{O}_R|\psi\rangle$



ワームホール → 相関関数の factorization と矛盾

(後半で詳しく議論)

今日の話：ワームホールは量子相関無しで作れるか？

① ワームホールは量子相関で作れる（レビュー）

② 粗視化すれば古典相関でも作れる

③ $(\text{ノイズ})^{\otimes 2} =$ ワームホール

④ 議論

今日の話：ワームホールは量子相関無しで作れるか？

② 粗視化すれば古典相関でも作れる

ある種の状態平均

・古典重力との双対性を議論するのは低エネルギーのセクター
・平均を考えるモチベーションは、アイランド公式とも関係（後述）

②-1 考えるセットアップ：別の極限(直積状態)を考える

$$|\Psi_{\beta LR}\rangle = |\psi_{\beta L}\rangle\,|\psi_{\beta R}\rangle \quad \text{such that} \quad \mathrm{Tr}(|\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta|\,\mathcal{O}) \simeq \langle\mathcal{O}\rangle_\beta$$

$\mathcal{O}$ ：低エネルギーの observable

(各状態 $|\psi\rangle$ は holographic CFT (chaotic な理論) の典型的状態)

具体的に計算を進める上で考えられる枠組み

論文で扱った例

・Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH)

・Thermal Pure Quantum State (TPQ 状態)　← 今日説明する具体例

・時間平均

…

②-2 (Canonical) Thermal Pure Quantum State (TPQ状態)

$$|\psi_\beta\rangle = \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}E_n} c_n |n\rangle$$

$$\frac{\overline{\langle\psi_\beta|\mathcal{O}|\psi_\beta\rangle}}{\overline{\langle\psi_\beta|\psi_\beta\rangle}} = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n \mathrm{e}^{-\beta E_n} \langle n|\mathcal{O}|n\rangle = \langle\mathcal{O}\rangle_\beta$$

Sugiura-Shimizu

c_n follows Gaussian distribution $\boxed{\overline{c_n c_m^*} = \delta_{nm}}$ $\overline{c_n c_m^* c_a c_b^*} = \overline{c_n c_m^*} \cdot \overline{c_a c_b^*} + \overline{c_n c_b^*} \cdot \overline{c_a c_m^*}$

②-3 ワームホールは古典相関でも作れる

$$|\Psi_\beta\rangle \equiv |\psi_{\beta L}\rangle\,|\psi^*_{\beta R}\rangle = \sum_{n,m} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}(E_n+E_m)} c_n c^*_m\, |n_L\rangle\, |m^*_R\rangle$$

$$\frac{\overline{\langle\Psi_\beta|\mathcal{O}_L\mathcal{O}_R|\Psi_\beta\rangle}}{\overline{\langle\Psi_\beta|\Psi_\beta\rangle}} = p_1 \langle\mathcal{O}_L\rangle_\beta \langle\mathcal{O}_R\rangle_\beta + p_2 \langle \mathrm{TFD}_{2\beta}|\mathcal{O}_L\mathcal{O}_R|\mathrm{TFD}_{2\beta}\rangle$$

$$|\mathrm{TFD}_\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}E_n} |n_L n^*_R\rangle$$

c_n follows Gaussian distribution $\overline{c_n c^*_m} = \delta_{nm}$

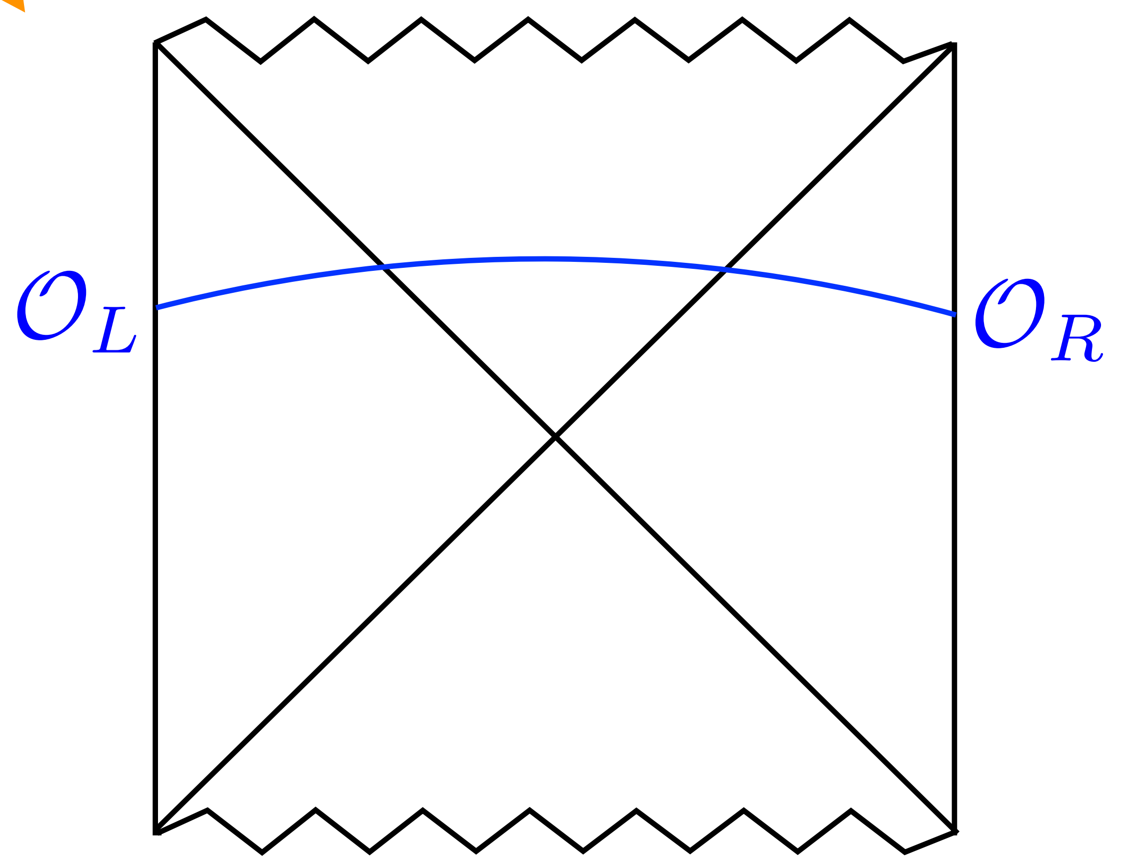
$$\overline{c_n c^*_m c_a c^*_b} = \overline{c_n c^*_m}\cdot\overline{c_a c^*_b} + \overline{c_n c^*_b}\cdot\overline{c_a c^*_m}$$

②-3 ワームホールは古典相関でも作れる

$$|\Psi_\beta\rangle \equiv |\psi_{\beta L}\rangle\,|\psi^*_{\beta R}\rangle = \sum_{n,m} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}(E_n+E_m)} c_n c^*_m\,|n_L\rangle\,|m^*_R\rangle$$

$$\overline{\frac{\langle\Psi_\beta|\mathcal{O}_L\mathcal{O}_R|\Psi_\beta\rangle}{\langle\Psi_\beta|\Psi_\beta\rangle}} = p_1\,\langle\mathcal{O}_L\rangle_\beta\,\langle\mathcal{O}_R\rangle_\beta + p_2\,\underline{\langle\mathrm{TFD}_{2\beta}|\mathcal{O}_L\mathcal{O}_R|\mathrm{TFD}_{2\beta}\rangle}$$

Maldacena, Kraus-Ooguri-Shenker,…



コメント

・TFDの寄与は非摂動効果とみなせる

・charged operatorなどを考えるとleadingになる

c.f. Balasubramanian-Berkooz-Ross-Simo, Belin-de Boer-Nayak-Sonner

・このような状態はLOCCで作れる（すなわち、古典相関）

②-3 ワームホールは古典相関でも作れる

$$|\Psi_\beta\rangle \equiv |\psi_{\beta L}\rangle |\psi^*_{\beta R}\rangle = \sum_{n,m} \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}(E_n+E_m)} c_n c^*_m |n_L\rangle |m^*_R\rangle$$

$$\frac{\overline{\langle\Psi_\beta|\mathcal{O}_L\mathcal{O}_R|\Psi_\beta\rangle}}{\overline{\langle\Psi_\beta|\Psi_\beta\rangle}} = p_1 \langle\mathcal{O}_L\rangle_\beta \langle\mathcal{O}_R\rangle_\beta + p_2 \underline{\langle\mathrm{TFD}_{2\beta}|\mathcal{O}_L\mathcal{O}_R|\mathrm{TFD}_{2\beta}\rangle}$$

$$\boxed{p_1 \sim 1,\ p_2 \sim \mathrm{e}^{-\alpha S_{BH}}}$$

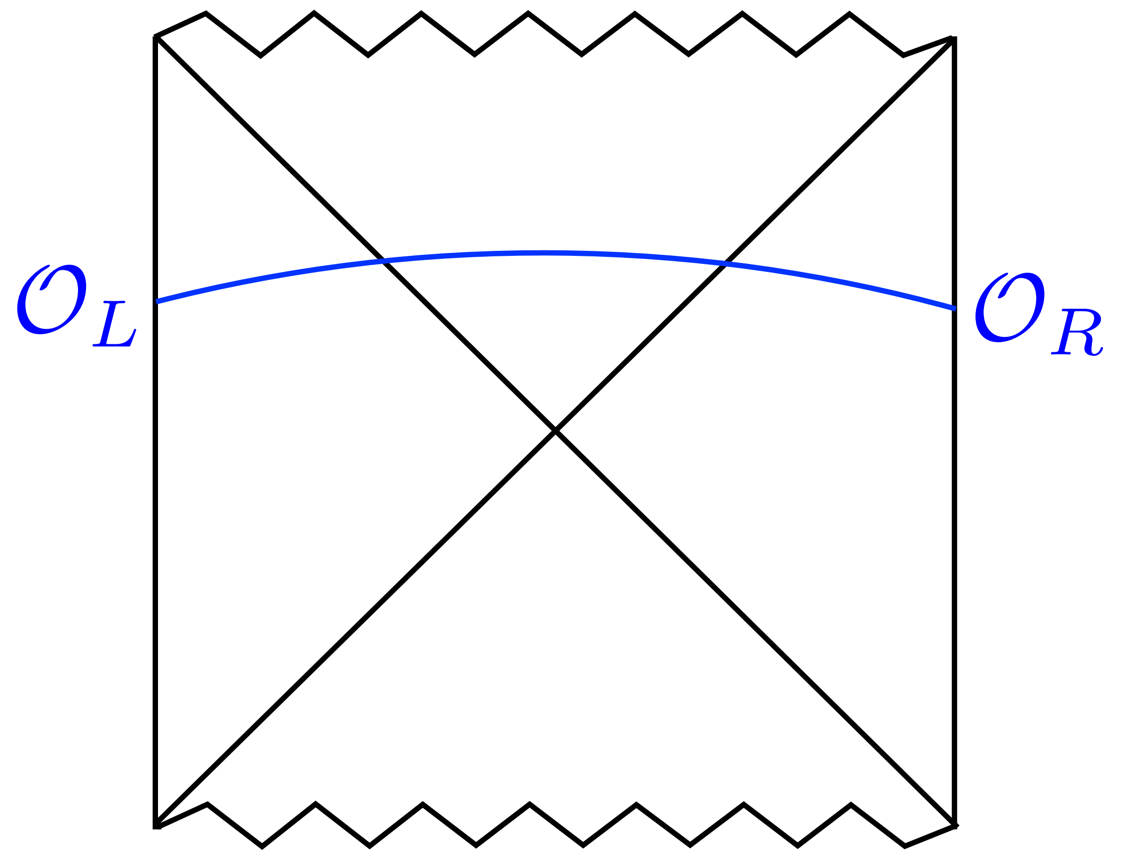
コメント

・TFDの寄与は非摂動効果とみなせる

・charged operatorなどを考えるとleadingになる

c.f. Balasubramanian-Berkooz-Ross-Simo, Belin-de Boer-Nayak-Sonner

・このような状態はLOCCで作れる（すなわち、古典相関）



②-4 ワームホールには複製 (古典相関) が必要

$$|\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta| \otimes |0\rangle\langle 0| \xrightarrow{\text{LOCC}} \underbrace{|\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta| \otimes |\psi^*_\beta\rangle\langle\psi^*_\beta|}_{\text{“correlation”}}$$

LOCC = Local Operation and Classical Communication

独立な 2 つの typical state の平均 (粗視化) からワームホールは出現しない

$$|\psi_\beta(c_n)\rangle\langle\psi_\beta(c_n)| \otimes |\psi_{\beta'}(c'_n)\rangle\langle\psi_{\beta'}(c'_n)| \longrightarrow \rho_\beta \otimes \rho_{\beta'}$$

今日の話：ワームホールは量子相関無しで作れるか？

① ワームホールは量子相関で作れる（レビュー）

② 粗視化すれば古典相関でも作れる

③ $(\text{ノイズ})^{\otimes 2} =$ ワームホール

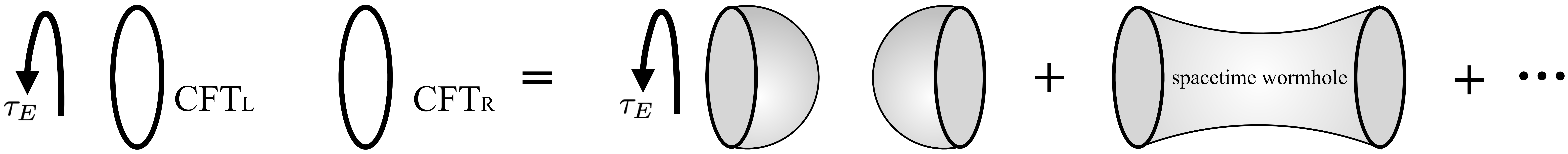
④ 議論

③-1 近年の進展：spacetime wormhole と Page 曲線

ブラックホールの蒸発過程における entanglement entropy (Unitary Page curve)
を非摂動効果を取り入れることで半古典的に正しく再現できた！

・非摂動効果 = spacetime wormhole (≠ ER bridge)

・この手の解を許すと“問題”も生じる：Factorization puzzle　Maldacena-Maoz

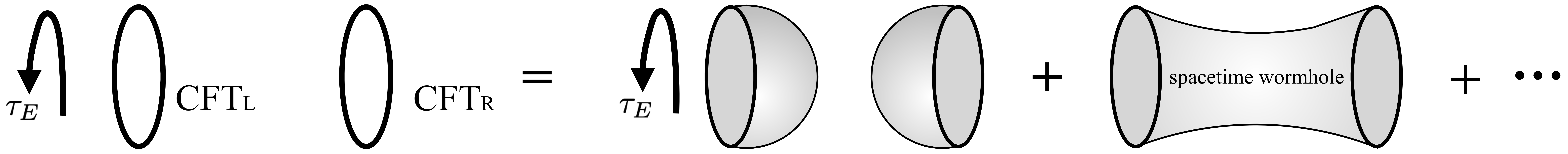


$$Z_{\mathrm{CFT}_{LR}} = Z_{\mathrm{CFT}_L} Z_{\mathrm{CFT}_R}$$

$$Z_{\mathrm{AdS}_{LR}} \neq Z_{\mathrm{AdS}_L} Z_{\mathrm{AdS}_R}$$

→ 近年の新しい考え方：(Simple) gravity = <CFT> (ensemble average of CFTs)

③-1 Simple Gravity = <CFT> ?



$Z_{\mathrm{CFT}_{LR}} = Z_{\mathrm{CFT}_L} Z_{\mathrm{CFT}_R}$

$Z_{\mathrm{AdS}_{LR}} \neq Z_{\mathrm{AdS}_L} Z_{\mathrm{AdS}_R}$

- $\langle Z_{\mathrm{CFT}}^2 \rangle \neq \langle Z_{\mathrm{CFT}} \rangle^2$　Spacetime wormhole を許す = 理論平均？
- ∃低次元の具体例：JT 重力 = RMT Saad-Shenker-Stanford ’19 , SYK 模型
- 理論平均なので状態平均とは (少なくとも一見) 違う

→ 状態平均は単一の任意次元CFTで考えられる (従来のAdS/CFTと相性が良い)

③-2 Factorization puzzle in our setup

$$\overline{\langle\psi_\beta|\langle\psi_\beta|\mathcal{O}_L\mathcal{O}_R|\psi_\beta\rangle|\psi_\beta\rangle} \neq \overline{\langle\psi_\beta|\mathcal{O}_L|\psi_\beta\rangle}\cdot\overline{\langle\psi_\beta|\mathcal{O}_R|\psi_\beta\rangle}$$

・相関関数がワームホールの寄与で factorize していないように見える

(粗視化したことで、 factorization を保証していた UV の自由度 “ノイズ” が消えた)

次の問い：ノイズの物理的な解釈？

③-2 Factorization puzzle in our setup

ノイズの物理的な解釈？ → Spatial analog of half-wormholes

Saad-Shenker-Stanford-Yao の (Euclidean) half-wormholes と全く同じ構造

・Euclidean factorization puzzle と完全に parallel （議論している時空・次元は別物）

以下の話は…

(1) (Spatial) half-wormhole という言葉の気持ち

(2) SSSY の結果とどのように parallel かの説明

③-3 (ノイズ) ⊗ (ノイズ) = ワームホール

$$\rho(c,\beta) = |\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta|$$

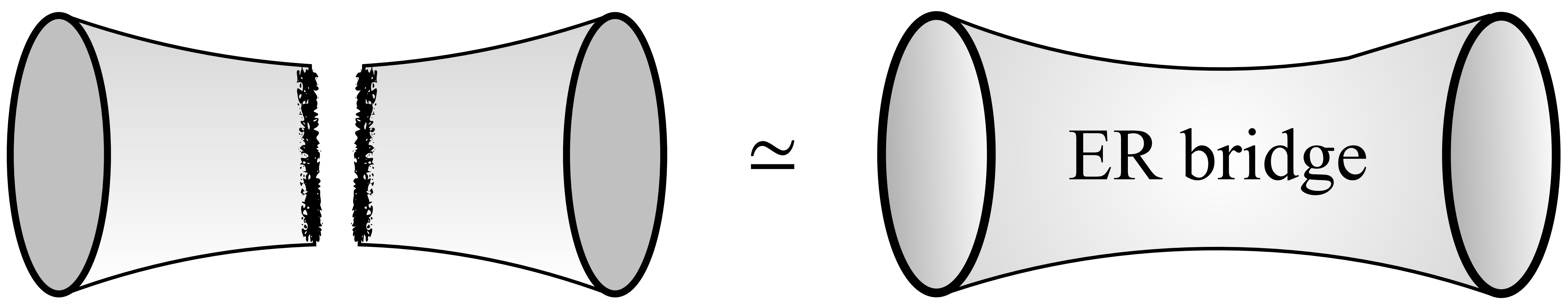
$$\rho(c,\beta) = \overline{\rho(c,\beta)} + :\rho(c,\beta): \qquad (:A: \equiv A - \overline{A},\ \overline{:A:} = 0)$$

$$\overline{\rho(c,\beta)} = \rho_\beta = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n \mathrm{e}^{-\beta E_n} |n\rangle\langle n|$$

$$:\rho(c,\beta): \equiv \sum_{n,m} \mathrm{e}^{-\beta(E_n+E_m)} :c_n c_m^*: |n\rangle\langle m|$$

コピー(古典相関)があれば、ワームホールの寄与(平均後も消えない)が現れる

$$:\rho(c,\beta): \otimes :\rho^*(c,\beta): := |\mathrm{TFD}_{2\beta}\rangle\langle \mathrm{TFD}_{2\beta}| + :(\ \cdots\cdots\cdots\ ):$$



ノイズは “Spatial half-wormhole”

③-4 コメント：SSSY model との関係

SSSY model = 0次元 (fixed coupling の) SYK model   Saad-Shenker-Stanford-Yao

$$z = \int d^N\psi \, \exp\left[i^{q/2} \sum_{1\leq a_1<a_2<\cdots<a_1\leq N} J_{a_1 a_2 \cdots a_q} \psi^{a_1}\psi^{a_2}\cdots\psi^{a_q} \right]$$

$\langle z \rangle = 0$ $\langle z^2 \rangle \equiv \langle z_L z_R \rangle \neq 0$ $\langle \cdots \rangle$: averaging over coupling J

$z^2 \supset$
- 平均値と一致し、factorize しない寄与 (wormhole saddle)
- 平均値と一致しない寄与 (another saddle)

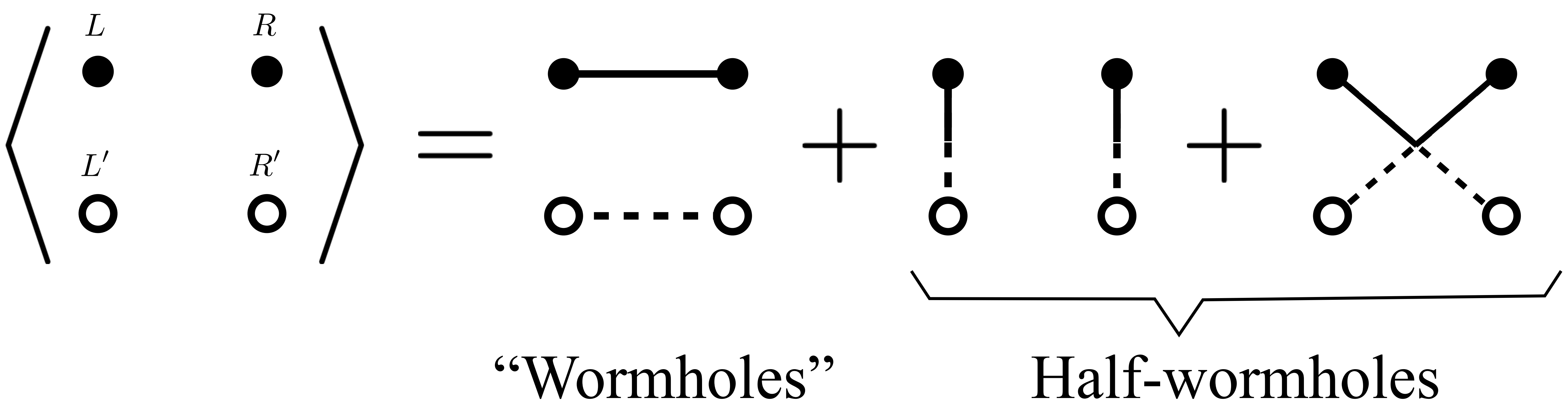
$$\boxed{z_L z_R \simeq (\text{wormhole saddle}) + (\text{another saddle}) \quad \text{and} \quad \langle (\text{another saddle}) \rangle = 0}$$

・両方の寄与があって初めて factorize する ・Another saddle は 平均後に消える

③-4 コメント：SSSY model との関係

"Wormhole Wick theorem"

e.g.)
$$\langle z^4\rangle \equiv \langle z_L z_R z_{L'} z_{R'}\rangle = \langle z_L z_R\rangle\langle z_{L'} z_{R'}\rangle + \langle z_L z_{L'}\rangle\langle z_R z_{R'}\rangle + \langle z_L z_{R'}\rangle\langle z_R z_{L'}\rangle$$



$$\langle z^2\rangle^2 \neq \langle z^4\rangle$$

"Spatial half-wormhole" も全く同じ構造：

$$z \;\leftrightarrow : \rho(c,\beta) : \qquad\qquad \langle z_X z_Y\rangle \;\leftrightarrow\; (|\mathrm{TFD}_{2\beta}\rangle\langle \mathrm{TFD}_{2\beta}|)_{XY}$$

今は、任意次元の holographic CFT で成り立つ話

まとめ

・低エネルギーの観測者は古典相関をワームホールと錯覚する場合がある

・ただし、非摂動効果なので microscopic

・Factorization puzzle は無い（“spatial half-wormhole” の寄与）

今後の展望

・理論平均 vs 状態平均？　・重力解の構成？　・平均操作の“導出”？

・(Euclidean) half-wormhole の高次元への一般化？　…

④ 議論: 状態平均の詳細について

先ほどの平均は状態のノルムを保存していない（分母分子を別々で計算）

・重力の path integral の議論は基本的にこの点を無視している

・場の理論側の計算では改良可 → sub-leading に負の寄与が追加される

$$\overline{\langle\Psi|\,\mathcal{O}_L\mathcal{O}_R\,|\Psi\rangle} = \langle\mathcal{O}_L\rangle\,\langle\mathcal{O}_R\rangle + \mathrm{e}^{-\alpha S}[\langle\mathrm{TFD}|\,\mathcal{O}_L\mathcal{O}_R\,|\mathrm{TFD}\rangle - (\spadesuit\spadesuit\spadesuit)]$$

重力理論でどのように理解するか？

c.f. Stanford-Yang-Yao

平均の詳細を詰める場合は大きな制限

まとめ

・低エネルギーの観測者は古典相関をワームホールと錯覚する場合がある

・ただし、非摂動効果なので microscopic

・Factorization puzzle は無い（“spatial half-wormhole” の寄与）

今後の展望

・理論平均 vs 状態平均？　・重力解の構成？　・平均操作の“導出”？

・(Euclidean) half-wormhole の高次元への一般化？　…