

グラディエントフロー厳密くりこみ群

鈴木博 (九州大学)

2022年1月12日 @ 京大理学部 (オンライン)

- Hidenori Sonoda and H.S., PTEP **2021**, 023B05 (2021) [arXiv:2012.03568]
- Yuki Miyakawa and H.S., PTEP **2021**, 083B04 (2021) [arXiv:2106.11142]
- Yuki Miyakawa, Hidenori Sonoda and H.S., arXiv:2111.15529, to appear in PTEP
- Hidenori Sonoda and H.S., in preparation

ウィルソンの厳密くりこみ群 (ERG)

- スケール変換のもとでの応答を教える：

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \rangle_{S_\tau} \sim e^{\tau n(D-2)/2} Z_\tau^{n/2} \langle \phi(e^\tau x_1) \cdots \phi(e^\tau x_n) \rangle_{S_{\tau=0}}.$$

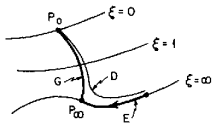


Fig. 12.6. Renormalization group trajectory

- (非摂動論的にも) 場の量子論を構成する**唯一**の方法 “A theory of theories”
- $D = 4$ での非自明な固定点？
- 多フレーバー非可換ゲージ理論 (Banks–Zaks fixed point) ; テクニカラーシナリオ？
- 漸近的安全 (くりこみ可能) 重力？
- これらの**素粒子論**で興味ある理論では、**ゲージ対称性が基本的**

ERG の具体形：スカラー場理論での Polchinski 方程式

- なめらかな運動量カットオフ、例えば

$$K(p/\Lambda) = e^{-p^2/\Lambda^2}$$

を導入

- 運動量が Λ 以上のモードを integrate out して、Wilson 作用 $S_\Lambda[\phi]$ を得る：
- S_Λ を Λ で微分し、 Λ を単位として全てを無次元化 (Λ を 1 に置くことに対応)
- Polchinski 方程式 ($\tau = -\ln \Lambda$) :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} e^{S_\tau[\phi]} = \int_p \left[\left(2p^2 + \frac{D+2}{2} - \gamma_\tau + p \cdot \partial_p \right) \phi(p) \cdot \frac{\delta}{\delta \phi(p)} + (2p^2 + 1 - \gamma_\tau) \frac{\delta^2}{\delta \phi(p) \delta \phi(-p)} \right] e^{S_\tau[\phi]}.$$

(ここでは $K(p)[1 - K(p)] \rightarrow p^2$ と一般化し、異常次元 γ_τ も導入した)

- 非摂動的なくりこみ群を定義

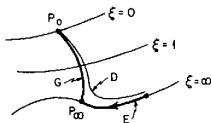


Fig. 12.6. Renormalization group trajectory

- Polchinski 方程式はスカラー場理論ではうまく働く
- しかし、局所ゲージ変換

$$A_\mu^a(k) \rightarrow A_\mu^a(k) - k_\mu \chi^a(k) - i \int_q f^{abc} \chi^b(q) A_\mu^c(k - q).$$

$$\phi(p) \rightarrow \phi(p) - i \int_k \chi^a(k) T^a \phi(p - k),$$

は異なった運動量のモードを混ぜるため、運動量カットオフは通常のゲージ対称性を壊してしまう

- 通常の ERG は通常のゲージ対称性を保てない
- ERG には変形されたゲージ対称性が存在する (Becchi, Ellwanger, Bonini–D’Attanasio–Marchesini, Reuter–Wetterich, Igarashi–Itoh–Sonoda) が、それは S_τ 自身に依存している
- 通常の ERG のゲージ不変な、特に非摂動的な近似は極めて難しい (不可能?)
- 非自明固定点での臨界指数がゲージに依存、など
- 明白にゲージ不変な ERG は作れないか?

場の拡散による Wilson 作用の表示

- 一つ目の表示 :

$$e^{S_\tau[\phi]} = \hat{s} \int [d\phi'] \prod_x \delta(\phi(x) - e^{\tau(D-2)/2} z_\tau \phi'(t; \mathbf{x} e^\tau)) \hat{s}^{-1} e^{S_{\tau=0}[\phi']}.$$

ここで、 \hat{s} は “scrambler” (Sonoda, arXiv:1503.08578)

$$\hat{s} \equiv \exp \left[\frac{1}{2} \int d^D x \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(x)} \right],$$

で、 $\phi'(t; \mathbf{x})$ は拡散方程式

$$\partial_t \phi'(t; \mathbf{x}) = \partial^2 \phi'(t; \mathbf{x}). \quad \phi'(t=0; \mathbf{x}) = \phi'(\mathbf{x}), \quad t \equiv e^{2\tau} - 1,$$

の解 (ϕ' が初期値)。 $\gamma_\tau = \partial_\tau \ln z_\tau$.

- 二つ目の表示 :

$$e^{S_\tau[\phi]} = \int [d\phi'] \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^D x \left[\phi(x) - e^{\tau(D-2)/2} z_\tau \phi'(t; \mathbf{x} e^\tau) \right]^2 \right\} \hat{s}^{-1} e^{S_{\tau=0}[\phi']}.$$

- ERG と拡散方程式 : Abe–Fukuma, Carosso–Hasenfratz–Neil, Matsumoto–Tanaka–Tsuchiya

これをゲージ共変な拡散方程式で置き換えたらどうなるか

- グラディエントフロー方程式 (Narayanan–Neuberger, Lüscher) :

$$\partial_t A_\mu^a(t; x) = D_\nu F_{\nu\mu}^a(t; x) = \partial^2 A_\mu^a(t; x) + \text{非線形項}, \quad A_\mu^a(t=0; x) = A_\mu^a(x),$$

- フェルミオンの拡散方程式 (Lüscher) :

$$\begin{aligned} \partial_t \psi(t; x) &= D_\mu D_\mu \psi(t; x), & \psi(t=0; x) &= \psi(x), \\ \partial_t \bar{\psi}(t; x) &= \bar{\psi}(t; x) \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu, & \bar{\psi}(t=0; x) &= \bar{\psi}(x), \end{aligned}$$

- つまり

$$\begin{aligned} & e^{S_\tau[A, \psi, \bar{\psi}]} \\ & \equiv \hat{s} \int [dA' d\psi' d\bar{\psi}'] \prod_x \delta \left(A_\mu^a(x) - e^\tau g_\tau^{-1} A_\mu^a(t; x e^\tau) \right) \\ & \quad \times \delta \left(\psi(x) - e^{\tau(D-1)/2} Z_{F\tau} \psi'(t; x e^\tau) \right) \\ & \quad \times \delta \left(\bar{\psi}(x) - e^{\tau(D-1)/2} Z_{F\tau} \bar{\psi}'(t; x e^\tau) \right) \hat{s}^{-1} e^{S_{\tau=0}[A', \psi', \bar{\psi}']} \end{aligned}$$

とする。ここで scrambler は

$$\hat{s} \equiv \exp \left[\int d^D x \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta A_\mu^a(x) \delta A_\mu^a(x)} \right] \exp \left[-i \int d^D x \frac{\vec{\delta}}{\delta \psi(x)} \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} \right].$$

- 実際には、ゲージモードも拡散するように

$$\begin{aligned}\partial_t A_\mu^a(t; x) &= D_\nu F_{\nu\mu}^a(t; x) + \alpha_0 D_\mu \partial_\nu A_\nu^a(t; x), \\ \partial_t \psi(t; x) &= [D_\mu D_\mu - \alpha_0 \partial_\mu A_\mu(t; x)] \psi(t; x) \\ \partial_t \bar{\psi}(t; x) &= \bar{\psi}(t; x) \left[\overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu + \alpha_0 \partial_\mu A_\mu(t; x) \right].\end{aligned}$$

- τ 発展のもとで、**明白なゲージ対称性が保存される** : $S_{\tau=0}$ が

$$\begin{aligned}A_\mu^a(x) &\rightarrow A_\mu^a(x) + i\partial_\mu \chi^a(x) + ig_\tau f^{abc} A_\mu^b(x) \chi^c(x), \\ \psi(x) &\rightarrow \psi(x) - ig_\tau \chi^a(x) T^a \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) + ig_\tau \chi^a(x) \bar{\psi}(x) T^a,\end{aligned}$$

の $\tau = 0$ のもとで不変ならば、 S_τ も不変である。

- τ 発展のもとで、**変形されたカイラル対称性が保存される** : $S_{\tau=0}$ が

$$\begin{aligned}\int d^D x \left\{ S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi(x)} \gamma_5 \psi(x) + \bar{\psi}(x) \gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(x)} S_\tau - 2S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi(x)} \gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(x)} S_\tau \right. \\ \left. + 2 \operatorname{tr} \left[\gamma_5 \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta\bar{\psi}(x')} S_\tau \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\psi(x)} \right] \right\} = 0,\end{aligned}$$

の $\tau = 0$ を満たすなら、 S_τ も満たす。これは Ginsparg–Wilson 関係式の一般化

- 明白なゲージ対称性と変形されたカイラル対称性を保つ
- 良いことばかりのようだが...
- 運動量カットオフを使わないので、汎関数積分の有限性が自明ではない：

$$\int [dA_\mu d\psi d\bar{\psi}] e^{S_\tau[A_\mu, \psi, \bar{\psi}]} A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \psi(y_1) \cdots \psi(y_m) \bar{\psi}(z_1) \cdots \bar{\psi}(z_l) < \infty?$$

- スカラー場理論では有限性が言える
- ゲージ理論でも、グラディエントフローされた場の相関関数の有限性 (Lüscher–Weisz) を用いて (少なくとも Gauss 固定点の周りでは) 有限性が議論できるのではと思っているが、まだ詰めていない。今後の課題

- 定義式の τ 微分から、 $\partial_\tau \ln g_\tau = (4 - D)/2 - \gamma_\tau$ と $\partial_\tau \ln z_{F_\tau} = \gamma_{F_\tau}$ として

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \tau} e^{S_\tau} \\
 &= \int d^D x \frac{\delta}{g_\tau \delta A_\mu^a} \\
 & \quad \times \left[-2D_\nu F_{\nu\mu}^a - 2\alpha_0 D_\mu \partial_\nu A_\nu^a - \left(\frac{D-2}{2} + \gamma_\tau + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) A_\mu^a \right] \Big|_{A \rightarrow g_\tau (A + \delta / \delta A)} e^{S_\tau} \\
 & \quad + \int d^D x \text{Tr} \left(2D_\mu D_\mu - 2\alpha_0 \partial_\mu A_\mu + \frac{D-1}{2} + \gamma_{F_\tau} + x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \right) \Big|_{A \rightarrow g_\tau (A + \delta / \delta A)} \\
 & \quad \quad \times \left(\psi + i \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi} \right) e^{S_\tau} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi} \\
 & \quad + \int d^D x \text{Tr} \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \psi} e^{S_\tau} \left(\bar{\psi} + i \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi} \right) \\
 & \quad \quad \times \left(2\overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu + 2\alpha_0 \partial_\mu A_\mu + \frac{D-1}{2} + \gamma_{F_\tau} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x} \cdot x \right) \Big|_{A \rightarrow g_\tau (A + \overleftarrow{\delta} / \delta A)}.
 \end{aligned}$$

- 場の 4 階までの汎関数微分を含んでいる（通常の ERG は 2 階まで）

- Gauss 固定点の周りで g_τ に関する摂動展開ができる
- $D = 4$ 非可換純ゲージ理論で $O(g_\tau^2)$ までの解析を行った結果、ゲージ場の波動関数異常次元として

$$\gamma_\tau = -\frac{\beta_\tau}{2g_\tau^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{7}{2} C_A g_\tau^2$$

を得た ($C_A > 0$ は adjoint 表現の Dynkin index) (Sonoda–H.S., unpublished)。これは、期待される値

$$\gamma_\tau = -\frac{\beta_\tau}{2g_\tau^2} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{11}{3} C_A g_\tau^2$$

とは異なっている。

- 初期値 $S_{\tau=0}$ にゲージ固定と Faddeev–Popov ゴーストが必要に思われる：

$$\langle A_\mu^a(x) A_\nu^b(y) \rangle_0 \sim \delta^{ab} \int_k e^{ik(x-y)} \frac{1}{k^2} \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) e^{-2tk^2} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} e^{-2\alpha_0 tk^2} \right].$$

ゲージ固定なし $\rightarrow \xi = \infty$

ゲージ固定を伴う GFERG : まずは量子電磁力学 (QED)

- ゲージ固定と Faddeev–Popov ゴーストを導入する
- 拡散方程式は BRST 変換

$$\delta A_\mu(t; x) = \eta \partial_\mu c(t; x),$$

$$\delta c(t; x) = 0,$$

$$\delta \bar{c}(t; x) = \eta \frac{1}{\xi_\tau} \partial_\mu A_\mu(t; x),$$

$$\delta \psi(t; x) = ie_\tau \eta c(t; x) \psi(t; x), \quad \delta \bar{\psi}(t; x) = -ie_\tau \eta c(t; x) \bar{\psi}(t; x),$$

と consistent になるように (変換が引き継がれるように)

$$\partial_t A_\mu(t; x) = \partial^2 A_\mu(t; x),$$

$$\partial_t c(t; x) = \partial^2 c(t; x),$$

$$\partial_t \bar{c}(t; x) = \partial^2 \bar{c}(t; x),$$

$$\partial_t \psi(t; x) = \left[\partial^2 - 2ie_\tau A_\mu(t; x) \partial_\mu - e_\tau^2 A_\mu(t; x) A_\mu(t; x) \right] \psi(t; x),$$

$$\partial_t \bar{\psi}(t; x) = \left[\partial^2 + 2ie_\tau A_\mu(t; x) \partial_\mu - e_\tau^2 A_\mu(t; x) A_\mu(t; x) \right] \bar{\psi}(t; x),$$

とする (これらは $\alpha_0 = 1$ に対応している)

ゲージ固定を伴う GFERG : 量子電磁力学 (QED)

- あとの構成は先ほどと parallel
- ゴーストの scrambler は

$$\hat{s} \equiv \dots \exp \left[- \int d^D x \frac{\vec{\delta}}{\delta c(x)} \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{c}(x)} \right]$$

とする

- 明白なゲージ対称性の代わりに、**明白な BRST 対称性**

$$\begin{aligned} & \int d^D x \left\{ -\partial_\mu \left[c(x) + \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{c}(x)} \right] \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} e^{S_\tau} \right. \\ & \quad - \frac{1}{\xi_\tau} \partial_\mu \left[A_\mu(x) + \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} \right] \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{c}(x)} e^{S_\tau} \\ & \quad + i e_\tau \left[c(x) + \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{c}(x)} \right] \bar{\psi}(x) \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{\psi}(x)} e^{S_\tau} \\ & \quad \left. - i e_\tau \left[c(x) + \frac{\vec{\delta}}{\delta \bar{c}(x)} \right] e^{S_\tau} \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(x)} \psi(x) \right\} = 0, \end{aligned}$$

Ward-Takahashi (WT) 恒等式を保つ

- ただし、 $\partial_\tau \xi_\tau = 2\gamma_\tau \xi_\tau$

変形されたゲージ対称性

- QED ではゴーストセクターは完全に decouple しており、 $E(k)$ を任意関数として一般解は

$$S_{\text{ghost}\tau} = - \int_k \bar{c}(-k) \frac{k^2}{E(e^{-\tau}k)e^{-2k^2} + k^2} c(k).$$

- これを WT 恒等式に代入すると

$$\frac{\xi_\tau E(e^{-\tau}k)e^{-2k^2} + k^2}{\xi_\tau E(e^{-\tau}k)e^{-2k^2}} k_\mu \frac{\delta S_I}{\delta A_\mu(k)} = e_\tau \int_p \left[\bar{\psi}(-p-k) \frac{\overrightarrow{\delta}}{\delta \bar{\psi}(-p)} S - S \frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta \psi(p+k)} \psi(p) \right],$$

ここで $S_{I\tau} \equiv S_\tau - S_\tau^{(0)}$ は相互作用部分。これは、ゲージ固定項を除いた Wilson 作用

$$S_{I\nu\tau} = S_\tau + \frac{1}{2} \int_k A_\mu(k) A_\nu(-k) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{k^2}{\xi E(e^{-\tau}k)e^{-2k^2} + k^2} - S_{\text{ghost}\tau}$$

が次の変形されたゲージ変換のもとで不変であると言っている：

$$\delta A_\mu(k) = - \frac{\xi E(e^{-\tau}k)e^{-2k^2} + k^2}{\xi E(e^{-\tau}k)e^{-2k^2}} k_\mu \chi(k),$$

$$\delta \psi(p) = -e_\tau \int_k \chi(k) \psi(p-k), \quad \delta \bar{\psi}(-p) = e_\tau \int_k \chi(k) \bar{\psi}(-p-k).$$

$O(e_\tau^2)$ までの摂動的解析

- $\tau \rightarrow \infty$ で理論が落ち着く部分空間 S_∞ 上の Wilson 作用を摂動論で求めた

$$S_\tau = S_\tau^{(0)} + e_\tau S_\tau^{(1)} + e_\tau^2 S_\tau^{(2)} + \dots$$

- $O(e_\tau^0)$ 次は

$$S_\tau^{(0)} = -\frac{1}{2} \int_k A_\mu(k) A_\nu(-k) \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{k^2}{e^{-2k^2} + k^2} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{k^2}{\xi_\tau e^{-2k^2} + k^2} \right] \\ - \int_p \bar{\psi}(-p) \frac{\not{p} + im_\tau}{e^{-2p^2} + i(\not{p} + im_\tau)} \psi(p) + S_{\text{ghost}\tau}$$

- $O(e_\tau^1)$ 次は

$$S_\tau^{(1)} = \int_{p,k} \bar{\Psi}(-p-k) e^{(p+k)^2} \tilde{V}_\mu(p,k) e^{p^2} \Psi(p) e^{k^2} \mathcal{A}_\mu(k),$$

ここで

$$\mathcal{A}_\mu(k) = e^{-2k^2} \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \frac{1}{e^{-2k^2} + k^2} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \frac{\xi_\tau}{\xi_\tau e^{-2k^2} + k^2} \right] A_\nu(k),$$

$$\Psi(p) = \frac{e^{-2p^2}}{e^{-2p^2} + i(\not{p} + im_\tau)} \psi(p), \quad \bar{\Psi}(-p) = \bar{\psi}(-p) \frac{e^{-2p^2}}{e^{-2p^2} + i(\not{p} + im_\tau)},$$

$O(e^2_\tau)$ までの摂動的解析

- 頂点部分は

$$\begin{aligned}\tilde{V}_\mu(p, k) &= \gamma_\mu + 2(\not{p} + \not{k} + im)p_\mu F((p+k)^2 - p^2 - k^2) \\ &\quad + 2(\not{p} + im)(p+k)_\mu F(p^2 - (p+k)^2 - k^2),\end{aligned}$$

で

$$F(x) \equiv \frac{e^x - 1}{x}.$$

- $O(e^2_\tau)$ の項は、あまりに複雑なので省略します
- この解析から 1 ループまでの異常次元

$$\begin{aligned}\gamma &= -\frac{\beta}{2e^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{4}{3} e^2, \\ \beta_m &= \frac{6}{(4\pi)^2} e^2, \quad (\partial_\tau m = (1 + \beta_m)m) \\ \gamma_F &= \frac{3}{(4\pi)^2} e^2,\end{aligned}$$

を得た。前者二つは QED (電子一種) での正しい値、最後の電子の波動関数異常次元は、グラディエントフローさせたフェルミオン場のそれ (Lüscher) になっている

1PI 作用 Γ_τ の GFERG (Sonoda-H.S., in preparation)

- 通常 ERG の非摂動論的応用には、いわゆる 1PI 作用 Γ に対する ERG 方程式 (Nicolli-Chang, Wetterich, Morris, Bonini-D'Attanasio-Marchesini) を用いる
- GFERG でも対応するものが作れるか？
- 少なくとも可換ゲージ理論の場合には、とてもうまい Legendre 変換が定義できる

$$(\mathcal{S}_\tau, \mathcal{A}_\mu, \psi, \bar{\psi}) \leftrightarrow (\Gamma_\tau, \mathcal{A}_\mu, \Psi, \bar{\Psi}).$$

- 特に、ゲージ変換

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{A}_\mu(x) &= \partial_\mu \chi(x), \\ \delta \Psi(x) &= ie_\tau \chi(x) \Psi(x), \\ \delta \bar{\Psi}(x) &= -ie_\tau \chi(x) \bar{\Psi}(x).\end{aligned}$$

のもとでの不変性を (Γ のゲージ固定項を除いて) 保つ

- カイラル変換

$$\delta \Psi(x) = \alpha \gamma_5 \Psi(x), \quad \delta \bar{\Psi}(x) = \alpha \bar{\Psi}(x) \gamma_5,$$

のもとでの不変性を (アノマリーの効果を除いて) 保つ

- これらの変換は素朴な形！ 非摂動論的 ansatz はこれらを原理に作ればよい
- GFERG 方程式が複雑なことが欠点

- 厳密くりこみ群 (ERG) と場の拡散の関係に着目して、ゲージ対称性を保つ拡散方程式、グラディエントフローに基づくゲージ理論での ERG、GFERG を提案した
- これは**明白なゲージ対称性と変形されたカイラル対称性**を保つ
- $D = 4$ 非可換ゲージ理論での摂動論的解析から、(少なくとも摂動論では) ゲージ固定が必要に思われる
- 可換ゲージ理論 (QED) で明白な BRST 対称性を保つ GFERG を定式化した
- 1 ループレベルの異常次元が正しく再現される
- 対応する **1PI 作用に対する GFERG** を構成した。ここでは、**ゲージ対称性とカイラル対称性が通常のものと同じ形を取る**
- この性質は、可換ゲージ理論での非自明な固定点の解析に有用なはず

- 1PI GFERG を用いた可換ゲージ理論での非自明固定点の解析。過去の研究 (Aoki–Morikawa–Sumi–Terao–Tomoyose, Gies–Jaeckel, Igarashi–Itoh–Pawlowski, Gies–Ziebell など) との比較
- ゲージ固定、Faddeev–Popov ゴーストを含んだ非可換ゲージ理論への拡張。Nakanishi–Lautrup 場が消去できるか？
- 非可換ゲージ理論での 1 ループレベルでの摂動論的解析
- 汎関数積分の有限性の議論
- 非可換ゲージ理論での非摂動論的応用
- 重力理論？