Target space entanglement in quantum mechanics of fermions and matrices

杉下 宗太郎（名古屋大）

arXiv:2105.13726 [JHEP 08 (2021) 046]

2021/12/22 セミナー@京大素論

量子もつれ

- 量子論特有の相関

EPR pair $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle)$ 2つのqubitがもつれた状態

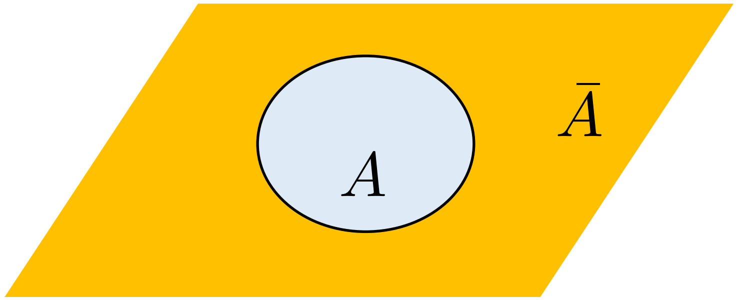
- 量子情報（量子計算・量子通信）に重要

- ホログラフィーにも重要

笠・高柳公式

場の理論における量子もつれ（～境界での相関）

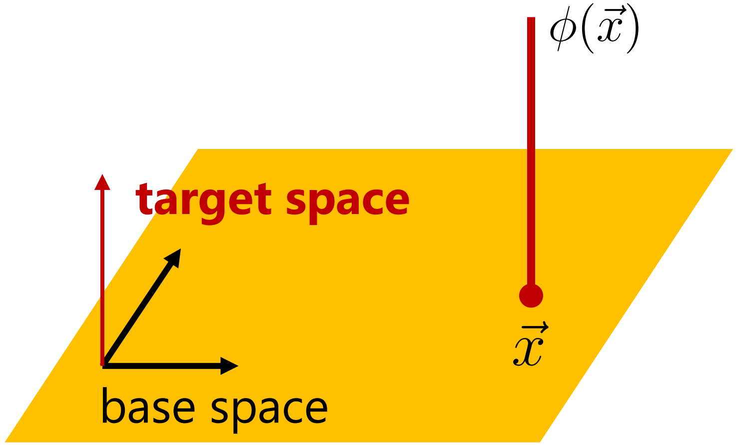
⟷ バルクの幾何



今日の話: target spaceの量子もつれ

Target space（標的空間）＝　場が動く空間

cf. base space(底空間) = 場が定義されている空間

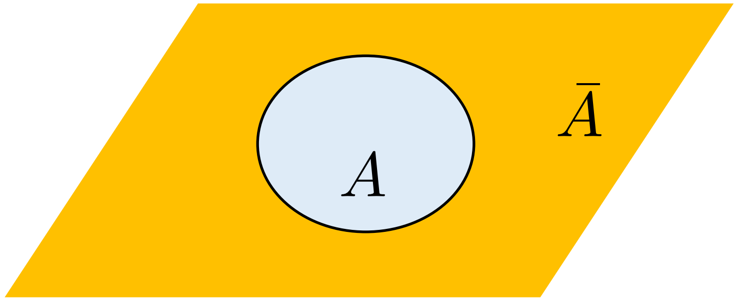


- 実スカラー場　$\phi(\vec{x}) \in \mathbb{R}$

- 場の理論でよく考えられている量子もつれは base spaceの量子もつれ

➡ **target space**はあまり考えられていない

[Mazenc, Ranard (2019)], [Hampapura, Harper, Lawrence (2020)], [Das, Kaushal, Mandal, Trivedi (2020)], [Das, Kaushal, Liu, Mandal, Trivedi (2020)], [Frenkel, Hartnoll (2021)]



- 弦理論: base spaceではなく**target space**が私達の住む空間　$X^\mu(\sigma)$
  (world-sheet)

■ 行列模型の量子もつれ

- 行列量子力学　$X^{\mu}(t, \cancel{\vec{x}})$　(1+0)次元の場の理論（＝量子力学）　　base spaceなし

例: BFSS模型　＝　M理論

target spaceの量子もつれが時空の幾何と関係していると思うのが自然。

[Das, Kaushal, Mandal, Trivedi (2020)], [Das, Kaushal, Liu, Mandal, Trivedi (2020)]

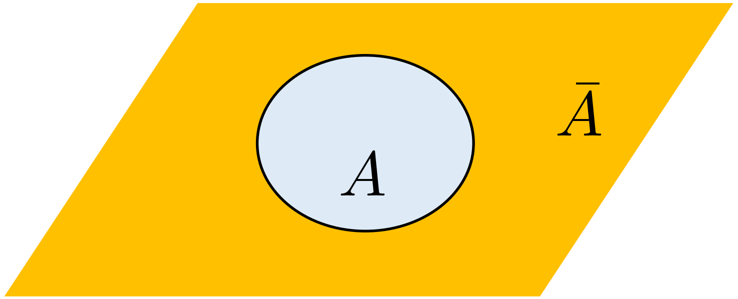
■ 手始めに、行列1個の一番簡単な行列量子力学を考えた　$L = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\dot{X}^2 - \mathrm{tr}\,V(X)$

- 同種粒子(フェルミオン)の量子力学

target space EEの定義？

- 普通のbase space EE　$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}}, \quad (\mathcal{H}_A = \otimes_{x\in A}\mathcal{H}_x, \quad \mathcal{H}_{\bar{A}} = \otimes_{x\in \bar{A}}\mathcal{H}_x)$

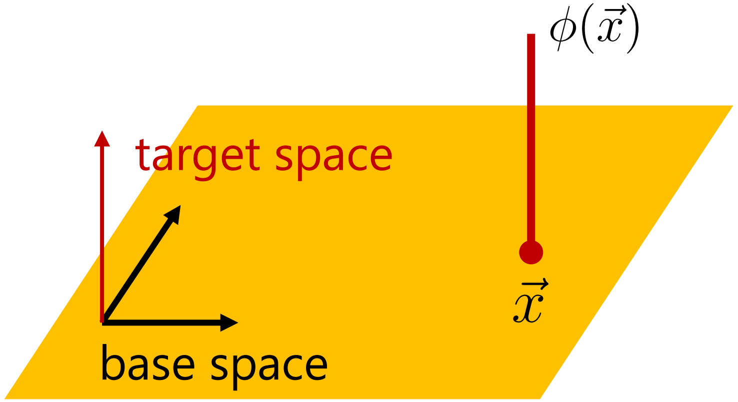
密度行列　ρ ➡ $\rho_A = \mathrm{tr}_{\bar{A}}\,\rho$ ➡ $S_A = -\,\mathrm{tr}_A\,\rho_A \log \rho_A$



> **問題点**

ヒルベルト空間はtarget spaceに関してテンソル積の構造でない $\mathcal{H} \neq \otimes_{\phi\in\mathbb{R}}\mathcal{H}_\phi$

部分トレースどう計算？



- reduced density matrixの意味を考え直すと、
もっと一般の場合に使える定義が可能

EEの一般化として、これ自体面白い

Outline

- **Target space EEの定義**

  EEの定義を拡張する

- **同種粒子の量子力学の場合**

  特にフェルミオン

- **具体例**

  一次元自由フェルミガス

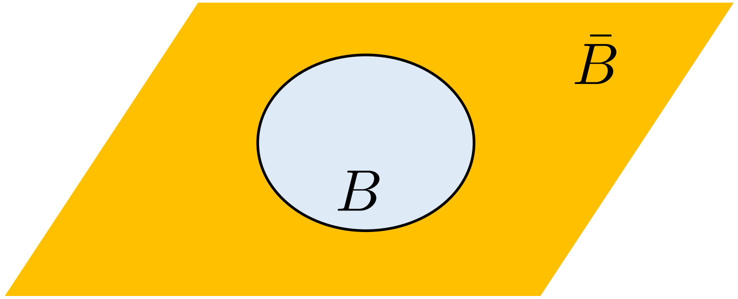
■ エントロピー＝不確かさ

- **エントロピーは不確かさの度合いを表す指標.**

限られた情報しか知り得ない人にとっての全体の情報のわからなさ.

- **エンタングルメントエントロピー**

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_{\bar{B}}$$



部分系のことしか調べられない人にとっての全系のわからなさ

部分代数 $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \otimes 1_{\bar{B}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ しか使えない人

- ほかの部分代数に対しても、付随するエントロピーを定義できる（代数的アプローチ）.

Ohya-Petzの教科書 (1993)
格子ゲージ理論への応用 [Casini-Huerta-Rosabal (2013)]

■ 部分代数とエントロピー

$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ：ヒルベルト空間に作用する演算子全体の集合

足し算、積などで閉じている.

$$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to c_1\mathcal{O}_1 + c_2\mathcal{O}_2,\ \mathcal{O}_1\mathcal{O}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

代数(環)になっている.

$$\mathcal{O}_1^\dagger \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$$

$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ：部分代数（部分集合でそれ自身で閉じてるもの）

限られた演算子しか使えない ➡ 全体がわからないことによる不確かさ

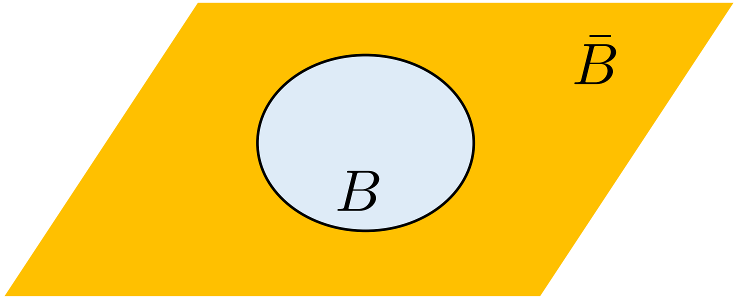
``粗視化"

➡ エントロピー

部分代数とreduced density matrix

- reduced density matrix $\rho_B = \mathrm{tr}_{\bar{B}}\, \rho$
  - Bにだけ作用する演算子の集合 $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H}_B) \otimes 1_{\bar{B}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$

部分代数



$$\rho_{\mathcal{A}} = \rho_B \otimes \frac{1_{\bar{B}}}{\dim \mathcal{H}_{\bar{B}}}$$

⟺

$$\rho_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{tr}(\rho_{\mathcal{A}} \mathcal{O}) = \mathrm{tr}(\rho \mathcal{O}) \quad {}^{\forall}\mathcal{O} \in \mathcal{A}$$

- もっと一般の部分代数 $\mathcal{A}$ でも同じ式で特徴づける.

$$\rho_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \quad \text{s.t.} \quad \mathrm{tr}(\rho_{\mathcal{A}} \mathcal{O}) = \mathrm{tr}(\rho \mathcal{O}) \quad {}^{\forall}\mathcal{O} \in \mathcal{A}$$

➡ 部分代数ごとに``reduced density matrix"が定義できる!

$\rho,\, \mathcal{A} \quad \to \quad \rho_{\mathcal{A}}$ ➡ $S_{\mathcal{A}}(\rho)$ **部分代数に付随したエントロピー**

■ ヒルベルト空間の分解

部分代数　$\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$

定理：ヒルベルト空間は次の形にブロック分解可能

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A_k} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_k} \quad \text{s.t.} \quad \mathcal{A} = \bigoplus_k \mathcal{L}(\mathcal{H}_{A_k}) \otimes 1_{\bar{A}_k}$$

一般にはテンソル積そのものにはならないが、テンソル積の直和には分解できる!

- $\rho_{\mathcal{A}}$ の構成法　$\rho_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$　s.t.　$\mathrm{tr}(\rho_{\mathcal{A}}\mathcal{O}) = \mathrm{tr}(\rho\mathcal{O})$　${}^\forall\mathcal{O} \in \mathcal{A}$

各ブロックへの射影 Π_k ➡ $p_k = \mathrm{tr}(\Pi_k \rho \Pi_k)$,　$\rho_k = \frac{1}{p_k}\Pi_k \rho \Pi_k$ ➡ $\rho_{k,A} = \mathrm{tr}_{\bar{A}_k}\, \rho_k$

➡ $$\rho_{\mathcal{A}} = \bigoplus_k p_k\, \rho_{k,A} \otimes \frac{1_{\bar{A}_k}}{\dim(\mathcal{H}_{\bar{A}_k})}$$

■ シン・エンタングルメントエントロピーの定義

$$\rho_{\mathcal{A}} = \bigoplus_k p_k\, \rho_{k,A} \otimes \frac{1_{\bar{A}_k}}{\dim(\mathcal{H}_{\bar{A}_k})}$$

on

$$\mathcal{H} = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A_k} \otimes \mathcal{H}_{\bar{A}_k}$$

$$p_k = \mathrm{tr}(\Pi_k \rho \Pi_k), \quad \rho_k = \frac{1}{p_k} \Pi_k \rho \Pi_k$$

➡ 縮約密度行列

$$\rho_A = \bigoplus_k p_k\, \rho_{k,A}$$

on $\mathcal{H}_A = \bigoplus_k \mathcal{H}_{A_k}$

➡

$$S_{\mathcal{A}}(\rho) = -\,\mathrm{tr}_A\, \rho_A \log \rho_A = S^{cl}_{\mathcal{A}}(\rho) + S^{q}_{\mathcal{A}}(\rho)$$

通常のEEの一般化！

$$S^{cl}_{\mathcal{A}}(\rho) = -\sum_k p_k \log p_k$$

⟵ 古典確率分布 $\{p_k\}$ のShannonエントロピー

$$S^{q}_{\mathcal{A}}(\rho) = \sum_k p_k S(\rho_{k,A})$$

⟵ 各セクターのEEを平均化したもの

cf. symmetry resolved EE

■ 具体例：Qubit

■ 1個のQubit $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$

純粋状態 $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$

■ 何でも測れる人 $\mathcal{A} = \mathrm{span}\{1, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$
$= \mathcal{L}(\mathcal{H})$

➡ $S_{\mathcal{A}}(\rho) = S(\rho)$ ⟵ 通常のvon Neumann entropy

特に純粋状態だと $S_{\mathcal{A}}(\psi) = 0$

(この人にとっては)純粋状態は曖昧さのない状態

実際、任意精度で何でも測定を行えるならば θ, ϕ 決定可能.

（正確には密度行列が決定できる）

■ 具体例：Qubit

■ 1個のQubit $\mathcal{H} = \mathrm{span}\{|0\rangle, |1\rangle\}$

純粋状態 $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$

■ z方向のスピンしか測れない人 $\mathcal{A} = \mathrm{span}\{1, \sigma_z\} = \left\{c_0\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\right\} \oplus \left\{c_1\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$

$$\mathcal{H} = \mathrm{span}\{|0\rangle\} \oplus \mathrm{span}\{|1\rangle\}$$

➡ $$S_{\mathcal{A}}(\psi) = -p_0\log p_0 - p_1\log p_1$$ $\left(p_0 = \cos^2\frac{\theta}{2}, \quad p_1 = \sin^2\frac{\theta}{2}\right)$

この人はどう頑張っても $|\psi\rangle$ と $\rho = \begin{pmatrix}p_0 & 0\\0 & p_1\end{pmatrix}$ の区別つかない.　エントロピー＝不確定度

代数的アプローチなら、1個のQubitに対しても``EE''が定義できる！

Observational Entropy

物性・熱力学の分野でも同様の概念が提唱されている.

Safranek, Deutsch, Aguirre (2017 -)

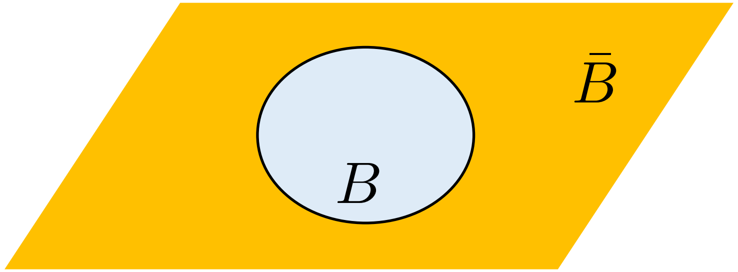
- General framework to encompass classical and quantum equilibrium and non-equilibrium coarse-grained entropy

ほぼ代数的アプローチと同じ定義.

演算子を制限することによる粗視化のエントロピー.

■ ここまでのまとめ

- 使える**演算子が制限されている観測者**に対して、全体がわからないことによる不確定さの度合いとして**エントロピー**が定義できる。



B内のことしかわからない人にとってのエントロピー
＝ 通常のbase space EE

➢ 演算子の制限方法（部分代数のとり方）は色々．Hilbert 空間がテンソル積になっている必要はない.

- **一般的なエンタングルメントエントロピー**

$$S_{\mathcal{A}}(\rho) = S_{\mathcal{A}}^{cl}(\rho) + S_{\mathcal{A}}^{q}(\rho)$$

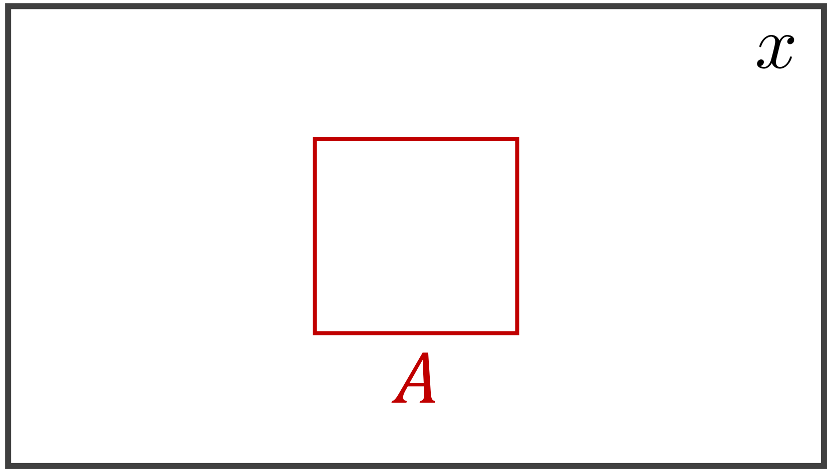
$$S_{\mathcal{A}}^{cl}(\rho) = -\sum_k p_k \log p_k, \quad S_{\mathcal{A}}^{q}(\rho) = \sum_k p_k S(\rho_{k,A})$$

- **一般的なRenyiエントロピー** $S_{\mathcal{A}}^{(n)}(\rho) = \dfrac{\log \mathrm{tr}_A\, \rho_A^n}{1-n} = \dfrac{\log\left(\sum_k p_k^n\, \mathrm{tr}_{A_k}\, \rho_{k,A}^n\right)}{1-n}$

次の話

- (多)粒子の量子力学に対して
  target space EEを考える.

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^2}{2m} + V(x_i) \right)$$



Outline

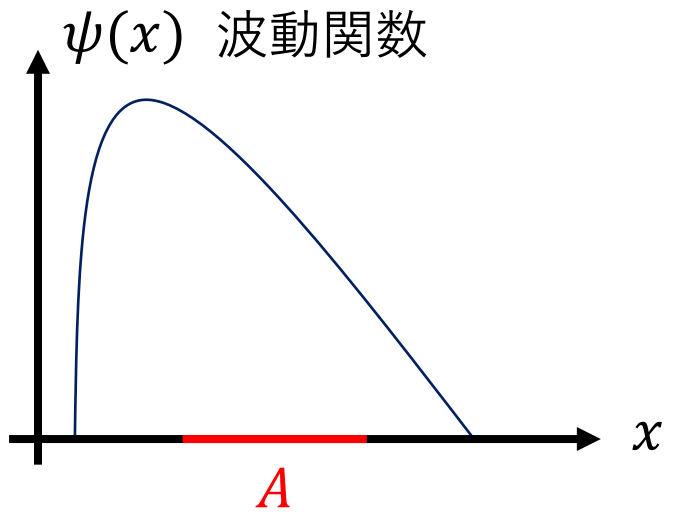
- **Target space EEの定義**
  EEの定義を拡張する
- **同種粒子の量子力学の場合**
  特にフェルミオン
- **具体例**
  一次元自由フェルミガス

一粒子の量子力学

■ 空間Mを動く粒子の量子力学

$$|\psi\rangle = \int_M dx\, \psi(x)\, |x\rangle$$

xについてテンソル積になっていない



● 部分領域 $A \subset M$ にだけ作用できる人にとってのEEを考える

こういう演算 $\int_A dx dx' O(x,x')\, |x\rangle\langle x'|$ だけできる人

■ 一粒子の量子力学のEE

- ``縮約密度行列" $\rho_A = \bigoplus_k p_k\, \rho_{k,A}$ ⟶ $S_{\mathcal{A}}(\rho) = -\operatorname{tr}_A \rho_A \log \rho_A = S^{cl}_{\mathcal{A}}(\rho) + S^{q}_{\mathcal{A}}(\rho)$

一粒子だと、$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$ 粒子がAにいる or いない($\bar{A}$にいる).

- 純粋状態 $|\psi\rangle = \int_A dx\, \psi(x)\, |x\rangle + \int_{\bar{A}} dx\, \psi(x)\, |x\rangle$ ⟶ $S_{\mathcal{A}}(\psi) = S^{cl}_{\mathcal{A}}(\psi) + S^{q}_{\mathcal{A}}(\psi)$ (第2項に赤い取り消し線)

$$= -p_1 \log p_1 - p_0 \log p_0$$

$$p_1 = \int_A dx |\psi(x)|^2, \quad p_0 = \int_{\bar{A}} dx |\psi(x)|^2 = 1 - p_1$$

EE = 古典確率分布(Bernoulli分布) $\{p_1, 1-p_1\}$ のShannonエントロピー

■ 同種粒子の多体系の量子力学

■ ボソン or フェルミオンのN粒子系　$\psi(x_{\sigma(1)},\cdots,x_{\sigma(N)}) = (\pm)^{\mathrm{sgn}\,\sigma}\psi(x_1,\cdots,x_N)$

- Aにk個, $\bar{A}$に$N-k$個いる状態への射影　$\Pi_k(A)$

➡ $$\mathcal{H}^{(N)} = \bigoplus_{k=0}^{N} \mathcal{H}_k$$ $\left[\ \mathcal{H}_k = \Pi_k(A)\mathcal{H}^{(N)}\ \right]$

- 各セクターの確率　$p_k = \mathrm{tr}[\Pi_k(A)\rho\Pi_k(A)]$

$$p_k = \binom{N}{k}\int_A d^k y \int_{\bar{A}} d^{N-k} z\, |\psi(\vec{y},\vec{z})|^2$$

■ 同種粒子の多体系の量子力学のEE

$$\mathcal{H}^{(N)} = \bigoplus_{k=0}^{N} \mathcal{H}_k$$

- 各セクターの密度行列　$\rho_k = \frac{1}{p_k}\Pi_k(A)\rho\Pi_k(A)$
- 各セクターの縮約密度行列　$\rho_{k,A} = \mathrm{tr}_{\bar{A}}\,\rho_k$　$\left[\rho_{k,A} = \frac{\binom{N}{k}}{p_k}\int_A d^k y d^k y' \int_{\bar{A}} d^{N-k}z\,\rho(\vec{y},\vec{z},\vec{y}',\vec{z})\,\left|\vec{y}\right\rangle\!\left\langle\vec{y}'\right|\right]$
- Target space EE　$S_A(\rho) = S_A^{cl}(\rho) + S_A^{q}(\rho)$

$$S_A^{cl}(\rho) = -\sum_{k=0}^{N} p_k \log p_k, \quad S_A^{q}(\rho) = -\sum_{k=0}^{N} p_k\,\mathrm{tr}_A\,\rho_{k,A}\log\rho_{k,A}$$

Shannon entropy　　**各セクターのEEの平均**

■ フェルミオンの場合（行列量子力学の場合）

- Slater determinant $\psi(x_1,\ldots,x_N)=\frac{1}{\sqrt{N!}}\det\left(\chi_i(x_j)\right)$

$$\left[\int_M dx\,\chi_i(x)\chi_j^*(x)=\delta_{ij}\right]$$

- overlap matrix

$$X_{ij}(A)=\int_A dx\,\chi_i(x)\chi_j^*(x)$$

一般に対角的でない

➢ **固有値をλ_iとする $(0\le\lambda_i\le 1)$**

➡ $S_A^{cl}(\rho)=-\sum_{k=0}^{N}p_k\log p_k,\quad S_A^{q}(\rho)=-\sum_{k=0}^{N}p_k\,\mathrm{tr}_A\,\rho_{k,A}\log\rho_{k,A}$ は λ_iで書ける.

■ フェルミオンのEEの古典部分 $S_A^{cl}(\rho) = -\sum_{k=0}^{N} p_k \log p_k$

- Poisson二項分布のShannonエントロピーと同じ.
  - N種類のコイン（それぞれ表の確率λ_i, 裏の確率$1-\lambda_i$）
  - 表がk個の確率 p_k
- 表が出る確率の平均 $\frac{1}{N}\sum_i \lambda_i \equiv \lambda$ を固定したとき、エントロピーが最大になるのは

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_N = \lambda$（普通の二項分布）.

$$S^{cl}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \le S^{cl}[\mathrm{B}(N,\lambda)] = \frac{1}{2}\log[2\pi N\lambda(1-\lambda)] + \frac{1}{2} + \mathcal{O}(1/N)$$

↖ 中心極限定理

➡ $$S_A^{cl}(\rho) \lesssim \mathcal{O}(\log N)$$

■ フェルミオンのEE

- 古典+量子は簡単化

$$S_A(\rho) = S_A^{cl}(\rho) + S_A^q(\rho) = \sum_i H(\lambda_i) = -\operatorname{tr}[X\log X + (1_N - X)\log(1_N - X)]$$

$$H(\lambda) = -\lambda\log\lambda - (1-\lambda)\log(1-\lambda)$$ [Bernoulli分布のShannonエントロピー]

- 独立なN個のBernoulli分布のShannonエントロピーと同じ

$H(\lambda) \leq \log 2$ よりEEの最大値は $N\log 2$

- Renyiエントロピーも同様　$S_A^{(n)}(\rho) \leq N\log 2$

■ フェルミオンのEEの上限

$$S_A(\rho) \leq N \log 2$$

- 粒子数Nが有限ならば、**エントロピーは有限**.

  注：ヒルベルト空間の次元は無限

  （場の理論だと一般に紫外発散. 行列模型のEEは有限.）

- 古典部分 $S_A^{cl}(\rho) \lesssim \mathcal{O}(\log N)$ より大きい. (注: 一粒子のときは古典部分しかなかった)

- 最大エントロピー $N \log 2$ （**示量的, 体積則**）

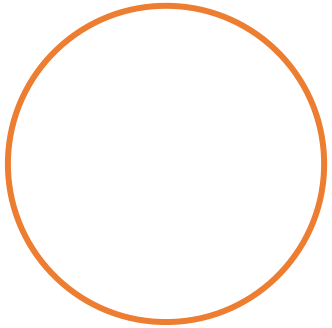
✓ これは一般的な上限. 基底状態等のEEはもっと小さい（**準示量的, 面積則**）

一次元自由フェルミガス $S_A(\rho) \sim \frac{1}{3} \log N$ （あとで）

Outline

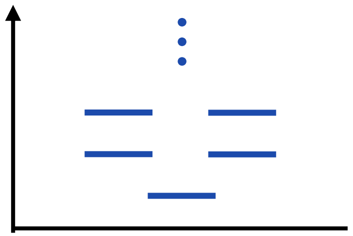
- **Target space EEの定義**
  EEの定義を拡張する
- **同種粒子の量子力学の場合**
  特にフェルミオン
- **具体例**
  一次元自由フェルミガス

円周上のフェルミガス



- 一粒子固有関数 $\chi_i(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{\frac{2\pi i}{L} n_i x} \qquad (-L/2 \le x \le L/2)$

$$n_1 = 0,\ n_2 = -1,\ n_3 = 1,\ n_4 = -2,\ n_5 = 2,\ \cdots$$



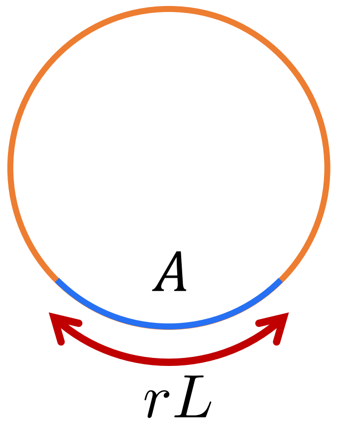
- 基底状態 $\psi(x_1, \ldots, x_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \left(\chi_i(x_j)\right) \qquad$ (N = 奇数 とする)

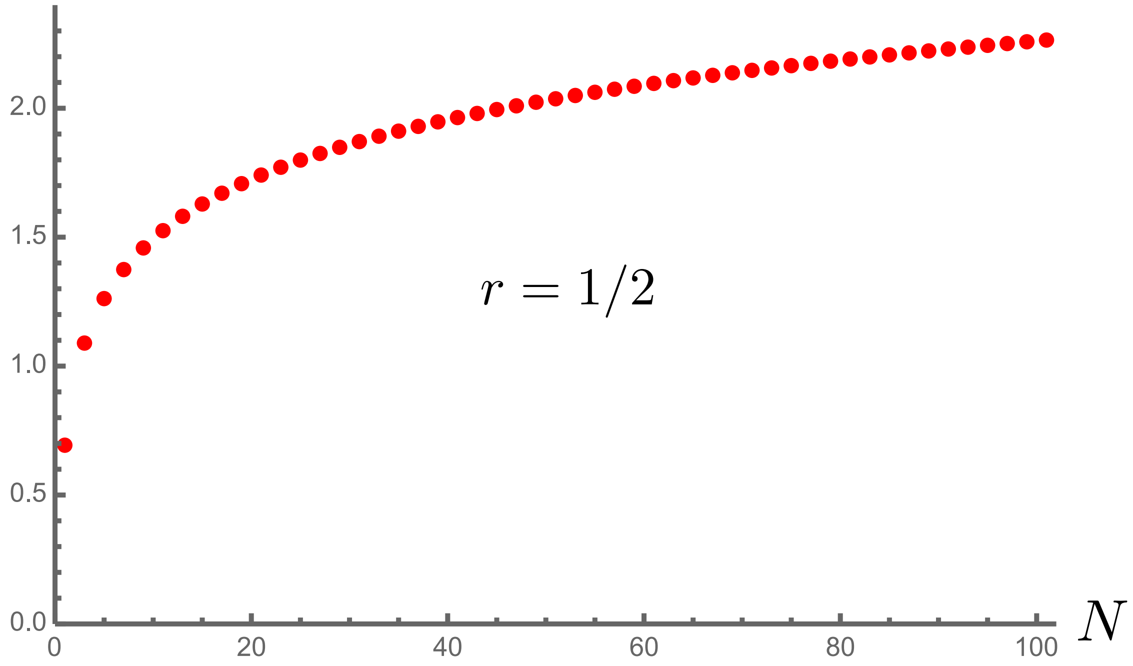
EE for a single interval

- 長さ rL の区間のEE（円周との比が r ）

overlap matrix $X_{ij}(A) = \int_A dx\, \chi_i(x)\chi_j^*(x)$

$$\Rightarrow \quad S(A) = -\,\mathrm{tr}[X \log X + (1_N - X)\log(1_N - X)]$$



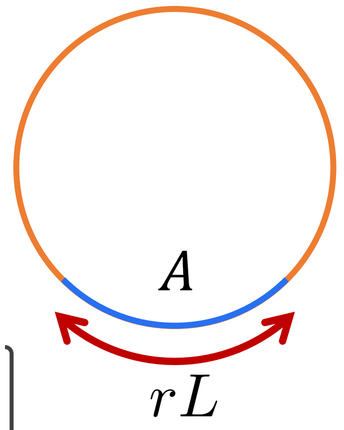


Not linear in N

Large N

- Nが大きいときの漸近形は解析的に計算可能 (XX模型と同じ計算に帰着)

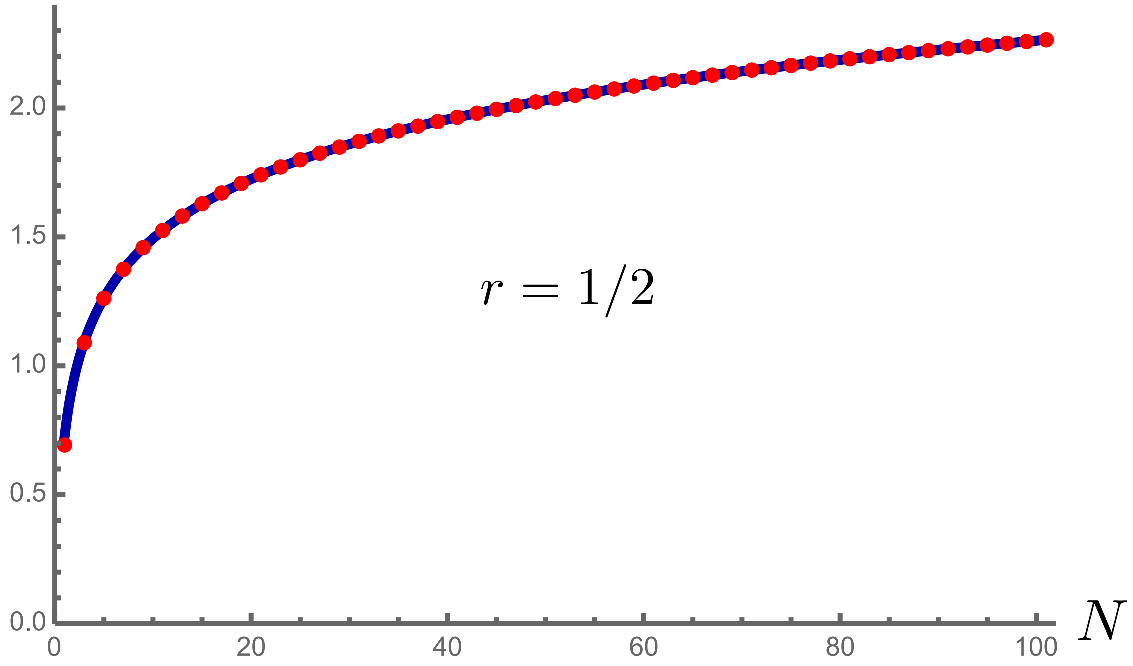
[Jin, Korepin (2004), Calabrese, Essler (2010)]



$$S \sim \frac{1}{3}\log[2N\sin(\pi r)] + \Upsilon_1$$

$$\left[\Upsilon_1 = i\int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{\pi w}{\cosh^2(\pi w)} \log\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+iw\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-iw\right)} \sim 0.495\right]$$

面積則(準示量的)！

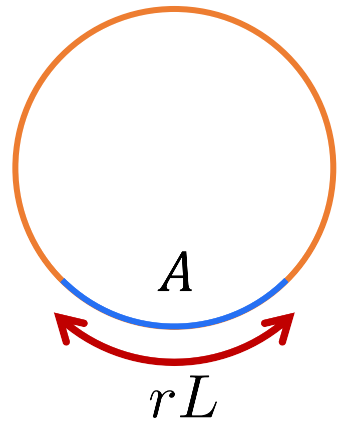


小さいNでも割と良い近似

■ 場の理論との比較

- N粒子系

$$S \sim \frac{1}{3}\log[N\sin(\pi r)] + \left(\frac{1}{3}\log 2 + \Upsilon_1\right)$$



- $c = 1$ CFT

$$S = \frac{1}{3}\log\left[\frac{L}{\delta}\sin(\pi r)\right] + \tilde{c}$$

[δ: UV cutoff,　$\tilde{c}$: 正則化に依存する定数]

注: XX模型の連続極限は$c = 1$ free fermion

⇒

$$N \sim \frac{L}{\delta}$$

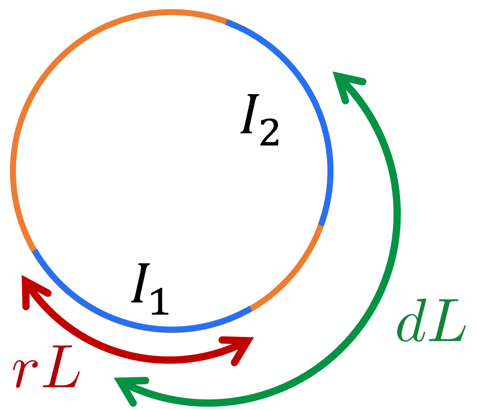
粒子数~カットオフ

[場の理論的にnon universalな定数$\tilde{c}$も
量子力学的には意味ある?]

■ 相互情報量

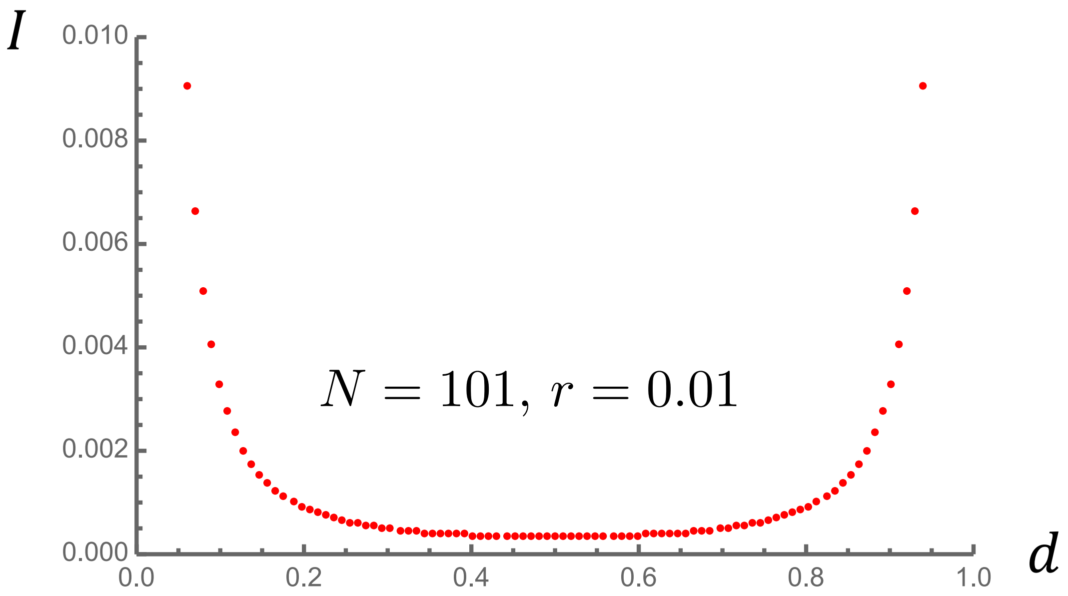
- 2つの区間の**相互情報量**(mutual information)

$$I(I_1;I_2) = S(I_1) + S(I_2) - \underline{S(I_1 \cup I_2)}$$ （**領域間の相関**）



large N (Fisher-Hartwig予想)

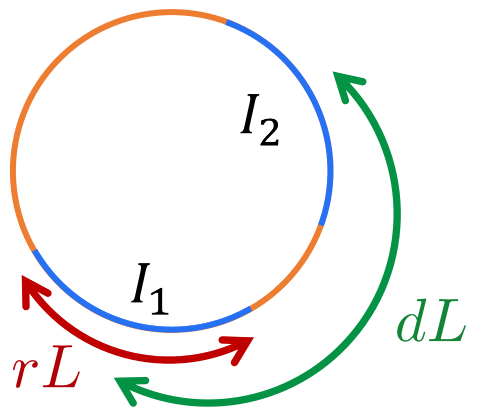
$$\frac{1}{3}\left[2\log[2N\sin(\pi r)] + \log\frac{\sin[\pi(d+r)]\sin[\pi(d-r)]}{\sin^2(\pi d)}\right] + 2\Upsilon_1$$

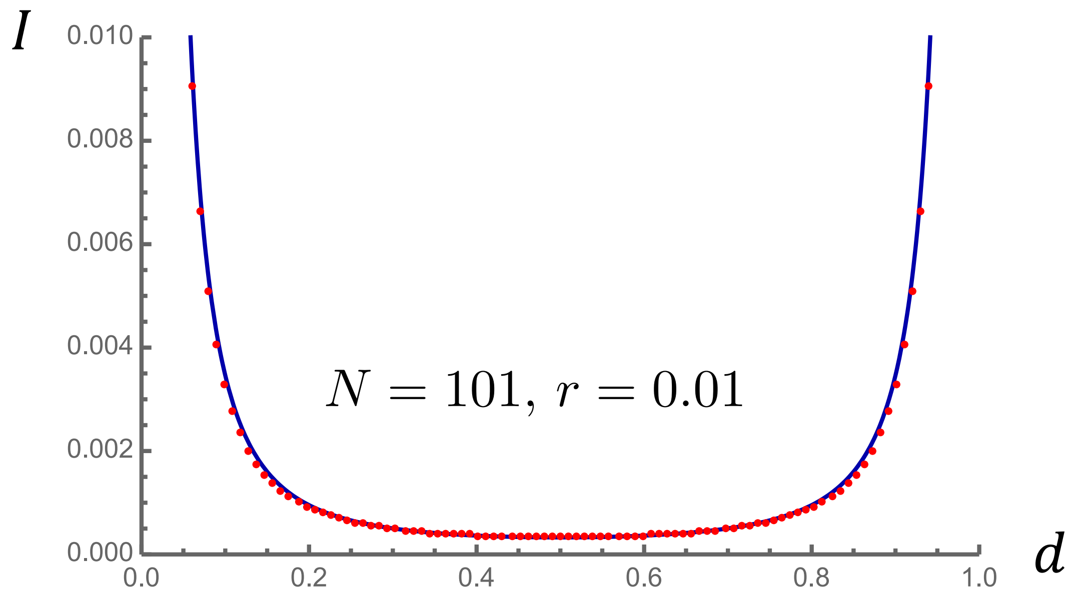


■ 相互情報量

- 2つの区間の**相互情報量**(mutual information)

$$I(I_1;I_2)=S(I_1)+S(I_2)-S(I_1\cup I_2)$$ **(領域間の相関)**





解析形（large N）

$$I(I_1;I_2)\sim\frac{1}{3}\log\frac{\sin^2(\pi d)}{\sin[\pi(d+r)]\sin[\pi(d-r)]}$$

$N\to\infty$ でも有限！
場の理論でも一般に紫外有限.

CFT (free compact boson at self-dual radius)の
結果と一致（なぜ？） [Calabrese, Cardy (2004)]

ま と め

Target spaceの量子もつれ

- 量子もつれの一般的定義
  - 演算子の部分代数ごとにエントロピーが定義できる ➡ 色々応用がありそう

- 同種粒子の量子力学のtarget space EE
  - EEの上限と有限性

- 一次元自由フェルミガス
  - 数値計算とラージNでの解析計算

まだ基本的なことも全然調べられていない(はず)

展望

- Multi-matrix QM

  今回は行列1個の場合(自由フェルミオン), 複数の場合をやりたい

  BFSS, fermionic, …
  量子力学ですらない場合？(IKKT), 経路積分による計算法

- 場の理論のtarget space EE (全然調べられていない)

- ホログラフィーとの関係