

相互作用のある場の理論における エンタングルメントエントロピー

酒井勝太 (高エネ研)

磯暁氏, 森崇人氏 (高エネ研 & 総研大)
との共同研究

- *PRD* **103**, 10, 105010 (arXiv:2103.05303)
- *PRD* **103**, 12, 125019 (arXiv:2105.02598)
- To appear in *Symmetry* (arXiv:2105.14834)

1. イントロダクション
2. オービフォールド法 (レビュー)
3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論
4. プロパゲータからの寄与
5. 相互作用頂点からの寄与
6. 他の寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-
7. まとめと展望

1. イントロダクション
2. オービフォールド法 (レビュー)
3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論
4. プロパゲータからの寄与
5. 相互作用頂点からの寄与
6. 他の寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-
7. まとめと展望

1. イントロダクション

エンタングルメントエントロピー(EE)とは?

EE = (純粋)状態における、2つの部分空間の量子相関の指標

「自分に見えている部分系は、見えていない部分とどれだけもつれているか？」

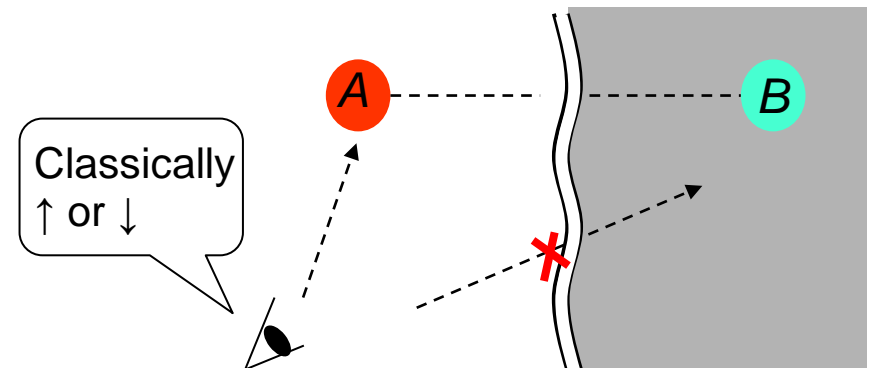
$$S_A = -\text{Tr}_A[\rho_A \log(\rho_A)]$$

$$(\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad \rho_A = \text{Tr}_B[\rho_{\text{tot}}])$$

Ex) Bell pair

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B + |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B)$$

$$\rightarrow \rho_A = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|), \quad S_A = \log 2$$



1. イントロダクション

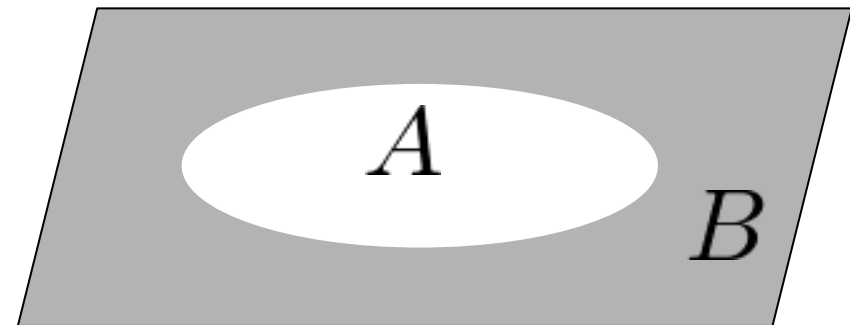
場の理論におけるEE

... 空間領域間の量子相関

- ホライゾン越しの量子効果
(ブラックホール、ドジッター時空、...)
[Solodukhin, '94], ...
- ホログラフィーでの幾何との対応
[Ryu-Takayanagi, '06], ...
- 量子相転移のオーダーパラメタ
- [Chen-Wang-Zhang, '06], ...
-
-

ブラックホール、凝縮系、量子情報、.....
様々な文脈で議論の対象に

タイムスライス



1. イントロダクション

従来の主流の解析

① **CFT(とその摂動)**: 共形対称性に関する種々のテクニックが使える

(e.g. (1+1)次元のEE \rightarrow ツイスト演算子を挿入した分配関数)

② **自由場理論**: 状態も作用もガウシアンなので簡単

(e.g. 任意の部分系での数値解析、曲がった時空中でのHeat kernelによる計算、...)

一方で、一般の(CFTから遠い)**相互作用のある場の理論**におけるEEは、さらなる理解が必要

1. イントロダクション

相互作用のある場の理論でのEE?

- ・ EE = 自由場理論では、ミクロな自由度の量子もつれとして書かれる
 - ・・・ 状態がもつれている以上、マクロな物理にも反映される量であるはず
- ・ 相互作用 → 輻射補正の存在
 - ・・・ EEをくりこまれた物理量と関係づけられるか？
- ・ 状態はガウシアンではない.
 - ・・・ EEの非ガウス性を、くりこみと整合的に分離できるか？

1. イントロダクション

最終的にやりたいこと

“量子相関が部分系の観測量に与える影響を調べたい”

定量的には

物理量がEEにどう依存するか(or まったくしないのか)調べたい

が、概念的にも技術的にも困難や微妙な点が多々ある……

今回はひとまず、EEをくりこまれた量で表すことをもって、
両者を関係づけてみる

1. イントロダクション

1ページまとめ

- EEには2つの特定の寄与が含まれる:
プロパゲータからの寄与と相互作用頂点からの寄与。
- プロパゲータからの寄与はくりこまれたプロパゲータを用いて書ける。
→ ガウス性の分離。

$$S_{\text{prop}} = \frac{V_{d-1}}{12} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log [G]$$

- 頂点からの寄与(非ガウス部)は複合演算子のくりこまれた相関関数で書ける。

$$\text{例) } S_{\text{vert}} = \frac{V_{d-1}}{12} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log \left[1 - \frac{3\lambda_4}{2} G_{\phi^2\phi^2} \right]$$

- Wilson流のくりこみ群と組み合わせて考えると、IR領域の物理から見えるEEは上の二つだけからなる。

1. Introduction

まず、説明の準備として、
オービフォールド法によるEEの計算と、
“Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論”
というアイデアを紹介する。

1. イントロダクション
2. オービフォールド法 (レビュー)
3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論
4. プロパゲータからの寄与
5. 相互作用頂点からの寄与
6. 他の寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-
7. まとめと展望

2. オービフォールド法 (レビュー)

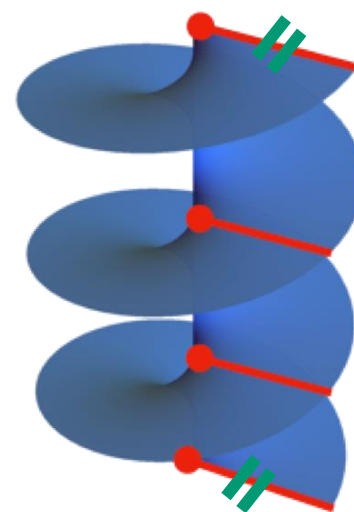
Euclidean形式でのEEの計算 ... レプリカトリック

$$S_A = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}[\rho_A^n] = - \frac{\partial}{\partial n} \text{Tr}[\rho_A^n] \Big|_{n \rightarrow 1} ,$$

$$\text{Tr}[\rho_A^n] = \frac{Z_n}{Z_1^n} \leftarrow : n\text{-fold 上での分配関数}$$

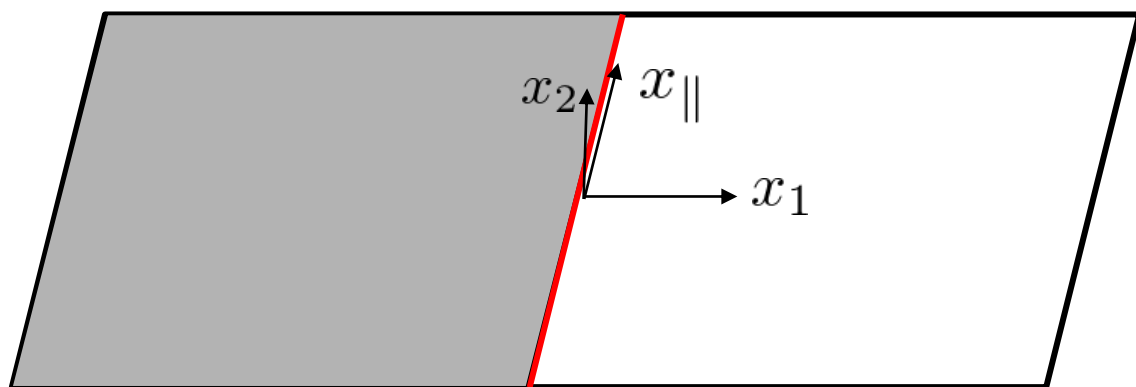
例) 部分系が半空間

→ n -fold は cone
(deficit angle $2\pi(1-n)$)



2. オービフォールド法 (レビュー)

我々の解析・・・半空間に関するEE
(結果から一般の場合についての観察を得たい)



オービフォールド法 [Nishioka-Takayanagi, '06]

1. レプリカトリック $S_A = \lim_{n \rightarrow 1} \frac{1}{1-n} \log \text{Tr}[\rho_A^n]$

2. $n = 1/M$

↙ 自由エネルギー

→ $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}_M \times \mathbb{R}^{d-1}$ 上の理論
 $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ $\mathbf{x}_{||}$

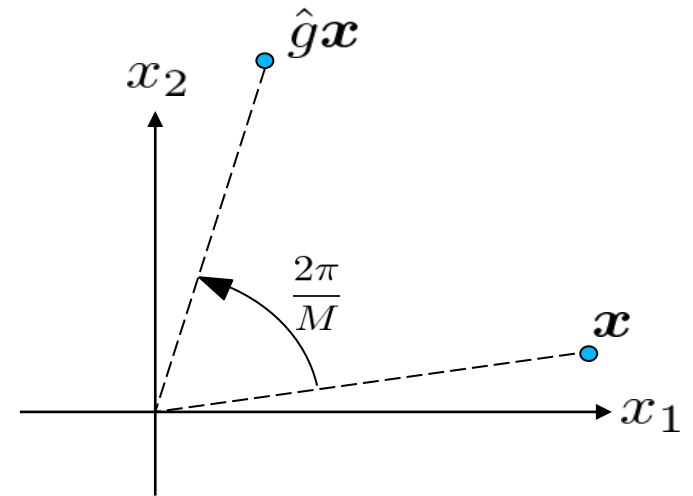
$$S_A = - \left. \frac{\partial (M F^{(M)})}{\partial M} \right|_{M \rightarrow 1}$$

2. オービフォールド法 (レビュー)

$\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}_M$ 上の理論 \rightarrow \mathbb{R}^2 上の理論 \times 射影

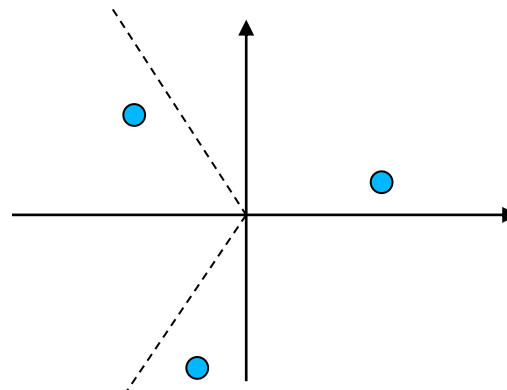
$$\hat{P} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \hat{g}^m,$$

$$\hat{g} |\mathbf{x}, x_{\parallel}\rangle = \left| \left(\frac{2\pi}{M}\text{-rot. of } \mathbf{x} \right), x_{\parallel} \right\rangle$$



鏡像法

例) $M = 3$ $\hat{P} |\mathbf{x}, x_{\parallel}\rangle \sim$



2. オービフォールド法 (レビュー)

オービフォールド法による自由場理論のEE

[Nishioka-Takayanagi, '06]

$$\begin{aligned} F^{(M)} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\hat{P} \log(-\square + m^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log(k^2 + m^2) \langle \mathbf{k}, k_{\parallel} | \hat{P} | \mathbf{k}, k_{\parallel} \rangle \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}, k_{\parallel} | \hat{P} | \mathbf{k}, k_{\parallel} \rangle &= (2\pi)^2 \frac{V_{d-1}}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \delta^2((1 - \hat{g}^m) \mathbf{k}) \\ &= (2\pi)^2 \frac{V_{d-1}}{M} \delta^2(\mathbf{0}) + (2\pi)^2 \frac{V_{d-1}}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \delta^2((1 - \hat{g}^m) \mathbf{k}) \\ &= \underbrace{V_{d+1}}_{\text{バルク}} \frac{1}{M} + (2\pi)^2 \underbrace{V_{d-1}}_{\text{境界}} \frac{M^2 - 1}{12M} \delta^2(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

2. オービフォールド法 (レビュー)

$$F^{(M)} = \frac{F^{(1)}}{M} + V_{d-1} \frac{M^2 - 1}{24M} \int d^2 \mathbf{k} \delta^2(\mathbf{k}) \int^{1/\epsilon} \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log \left[(k_{\parallel}^2 + m^2) \epsilon^2 \right]$$

- ・ 第一項 = 平坦時空での自由エネルギー / M
 $\propto V_{d+1}$ しかしEEに効かない。

バルク体積

(注. $S_A = - \left. \frac{\partial(MF^{(M)})}{\partial M} \right|_{M \rightarrow 1}$)

- ・ 第二項

$\propto V_{d-1}$ 境界に並行なモードのみ含む

境界の面積

➡ $S_A = - \frac{V_{d-1}}{12} \int^{1/\epsilon} \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log \left[(k_{\parallel}^2 + m^2) \epsilon^2 \right] \sim \text{面積則}$

1. イントロダクション
2. オービフォールド法 (レビュー)
3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論
4. プロパゲータからの寄与
5. 相互作用頂点からの寄与
6. 他の寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-
7. まとめと展望

3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論

オービフォールド上の場の理論

例): ϕ^4 理論

$$S = \int \frac{d^2\mathbf{x}}{M} d^{d-1}x_{\parallel} \left(\frac{1}{2} \phi \hat{P}(-\square + m^2) \hat{P} \phi + \frac{\lambda}{4} (\hat{P} \phi)^4 \right)$$



プロパゲータ: $G_0^{(M)}(x, y) = M \hat{P} G_0(x, y) \hat{P}$

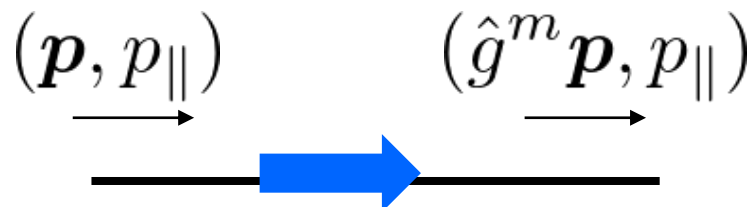
頂点: $-\frac{\lambda}{4M}$

平坦空間のもの

3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論

プロパゲータの解釈

$$\begin{aligned} G_0^{(M)}(x, y) &= \sum_{m=0}^{M-1} G_0(\hat{g}^m x - y) \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{d^{d-1} p_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) + i\mathbf{p}(\hat{g}^m \mathbf{x} - \mathbf{y})}}{p^2 + m^2} \\ &= \sum_{m=0}^{M-1} \int \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \frac{d^{d-1} p_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{ip_{\parallel}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) + i((\hat{g}^m \mathbf{p})\mathbf{x} - \mathbf{p}\mathbf{y})}}{p^2 + m^2} \end{aligned}$$



: ツイストされた運動量

m : ツイスト数

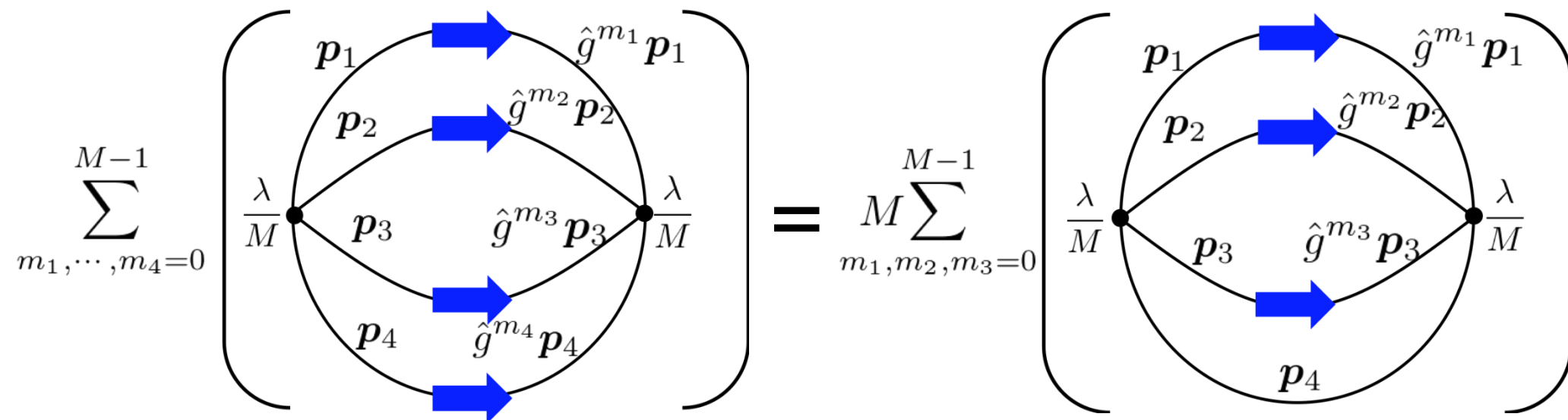
3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論

自由エネルギー = 連結バブル図

- ・ 素朴には、すべてのプロパゲータで運動量がツイスト
- ・ しかし頂点に次の不変性あり:

$$\delta^2(\hat{g}^{m_1} p_1 + \hat{g}^{m_2} p_2 + \dots) = \delta^2(\hat{g}^n \{\hat{g}^{m_1} p_1 + \hat{g}^{m_2} p_2 + \dots\})$$

→ ツイストの一部は解除できる



3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論

Covariantな理解

各Feynman図を格子に見立てると...

- ・ 頂点 → サイト.
- ・ 2サイト間に流れる運動量のツイスト数
→ リンク変数
- ・ 各頂点ごとの、運動量の一斉ツイストに関する不変性
→ ゲージ不変性

変数と不変性の構造に関して言えば、

“Feynman図上の(lattice-likeな) \mathbb{Z}_M ゲージ理論”

3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論

バブル図の計算

・・・ツイスト数の組を固定して計算した後、ツイスト数について足し上げ

普通のゲージ場の配位の足し上げなら...

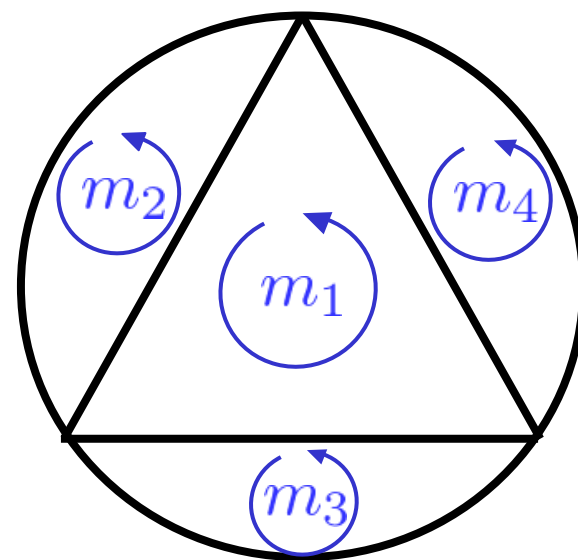
(ゲージ自由度の足し上げ) × (同値でない配位に関して足し上げ)
→ ゲージ群体積をだす プラケットのfield strength

今の場合だと...

非同値なツイスト数の組

= プラケットを回る運動量に関する
ツイスト数の組

~ **ループ運動量に掛かるツイスト**
で指定される



3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論

チェック: 面積則

L -ループ、 P 本のプロパゲータ、 V 個の頂点のバブルについて、

- ・ 素朴には P 個のツイストに関する足し上げ
- ・ そのうち、 $(P - L)$ 個は “ゲージ自由度”
→ 足し上げると、overall factor M^{P-L} を出す。
- ・ 頂点は、全部でoverall factor $1/M^V$ 。



バブル図は一般に、次の形で書かれる:

$$\frac{V_{d-1}}{M} \sum_{m_1, \dots, m_L=0}^{M-1} \int \prod_{l=1}^L [d^2 \mathbf{p}_l] I(p) \delta^2 \left(\sum_{l=1}^L (1 - \hat{g}^{m_l}) \mathbf{p}_l \right)$$

3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論

チェック: 面積則

$$\frac{V_{d-1}}{M} \sum_{m_1, \dots, m_L=0}^{M-1} \int \prod_{l=1}^L [d^2 p_l] I(p) \delta^2 \left(\sum_{l=1}^L (1 - \hat{g}^{m_l}) p_l \right)$$

- ・ ツイストがない配位 ... ($m_1 = \dots = m_L = 0$)

$\propto (V_{d-1} \times \delta^2(\mathbf{0})) \propto V_{d+1}$, しかしEEに効かない。

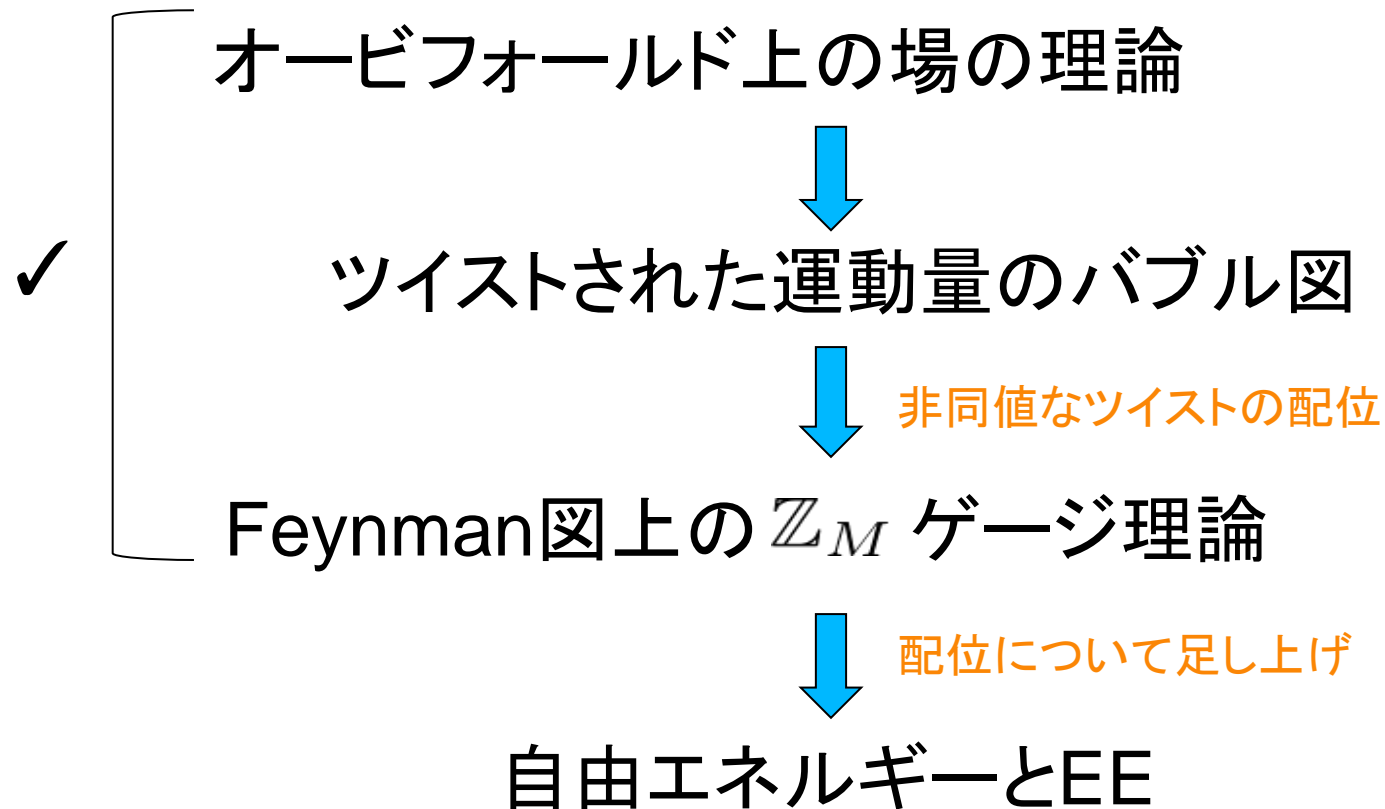
$$\left(S_A = - \frac{\partial(MF^{(M)})}{\partial M} \Big|_{M \rightarrow 1} \right)$$

- ・ 他すべての配位

$\propto V_{d-1}$  Area law at all-order

3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論

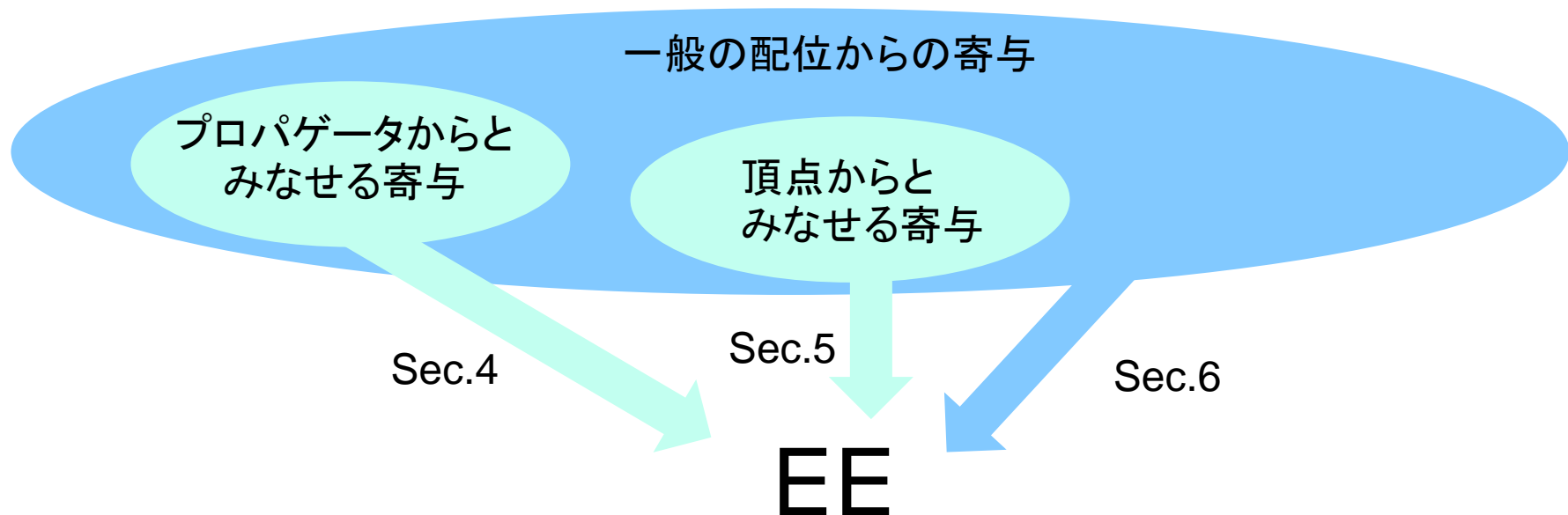
ここまでのまとめ



3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論

やるべきこと:
全ツイスト配位に関して足し上げ

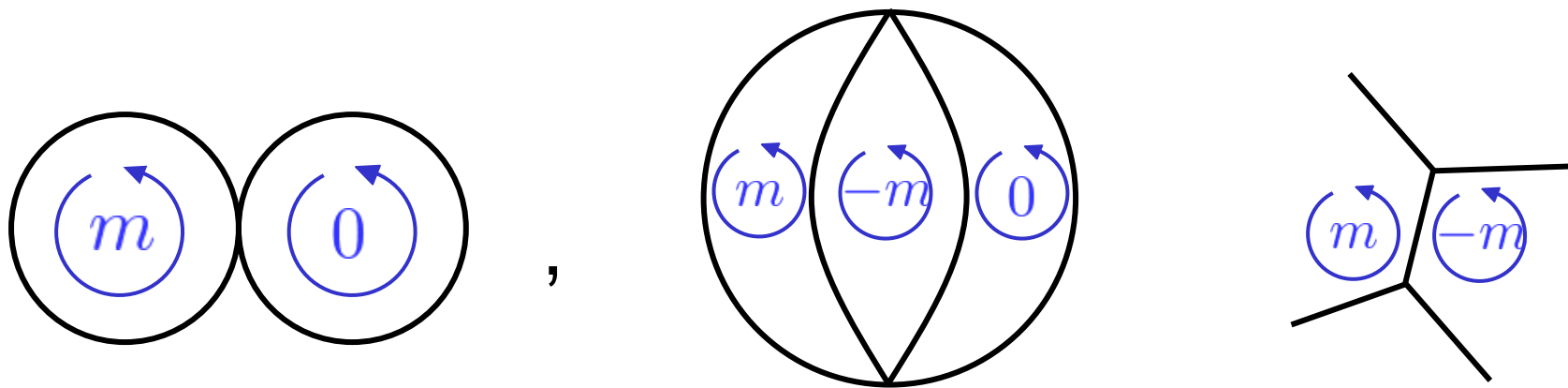
Technicalに非常に難しい。
一方で、2種の特別な寄与を与える配位を
見出すことができる



1. イントロダクション
2. オービフォールド法 (レビュー)
3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論
4. プロパゲータからの寄与
5. 相互作用頂点からの寄与
6. 他の寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-
7. まとめと展望

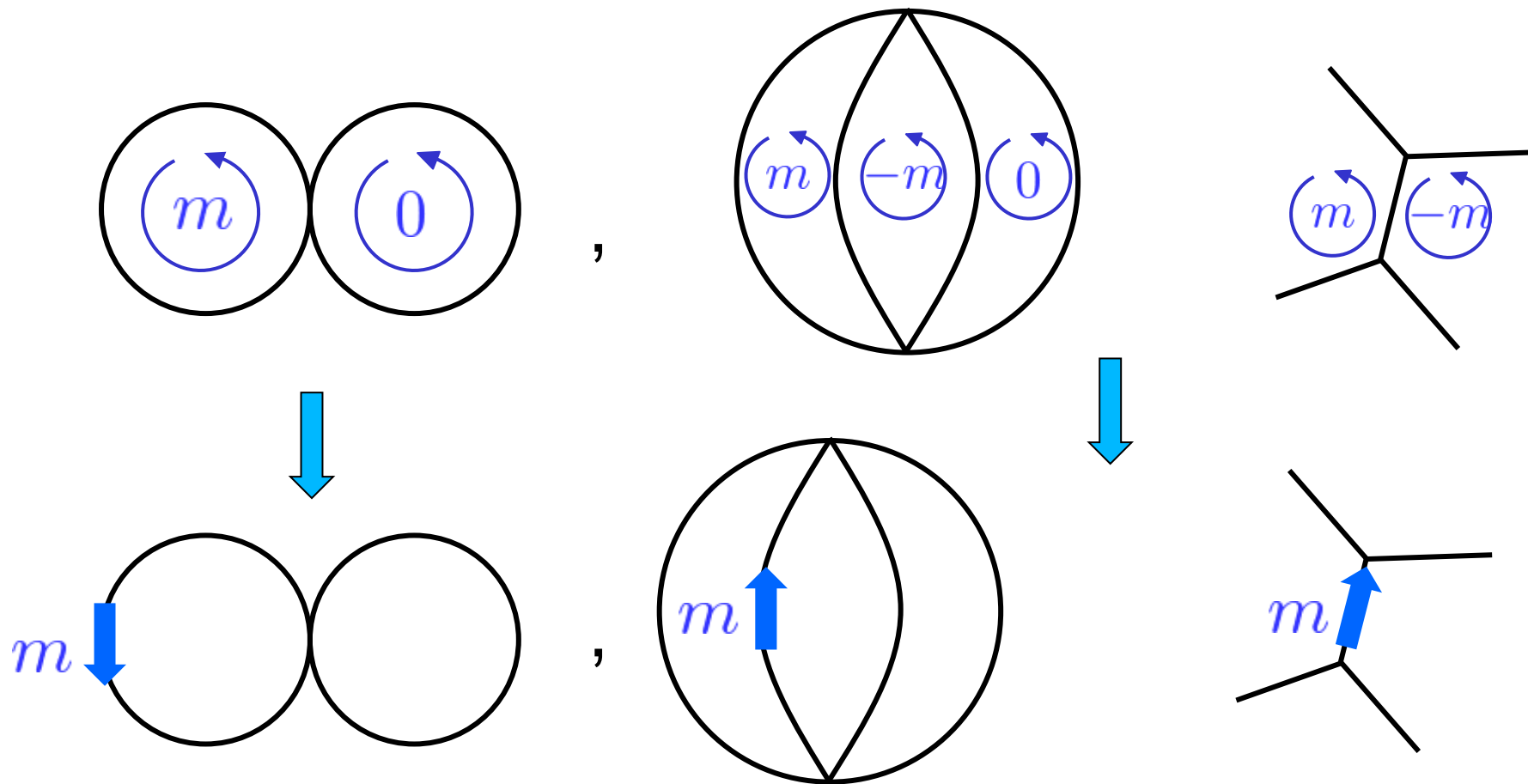
4. プロパゲータからの寄与

特定の配位:



4.プロパゲータからの寄与

特定の配位:



それぞれ、一つのプロパゲータにかかるツイストと再解釈できる.

→ プロパゲータからの寄与

4. プロパゲータからの寄与

単一プロパゲータツイストからのEEへの寄与

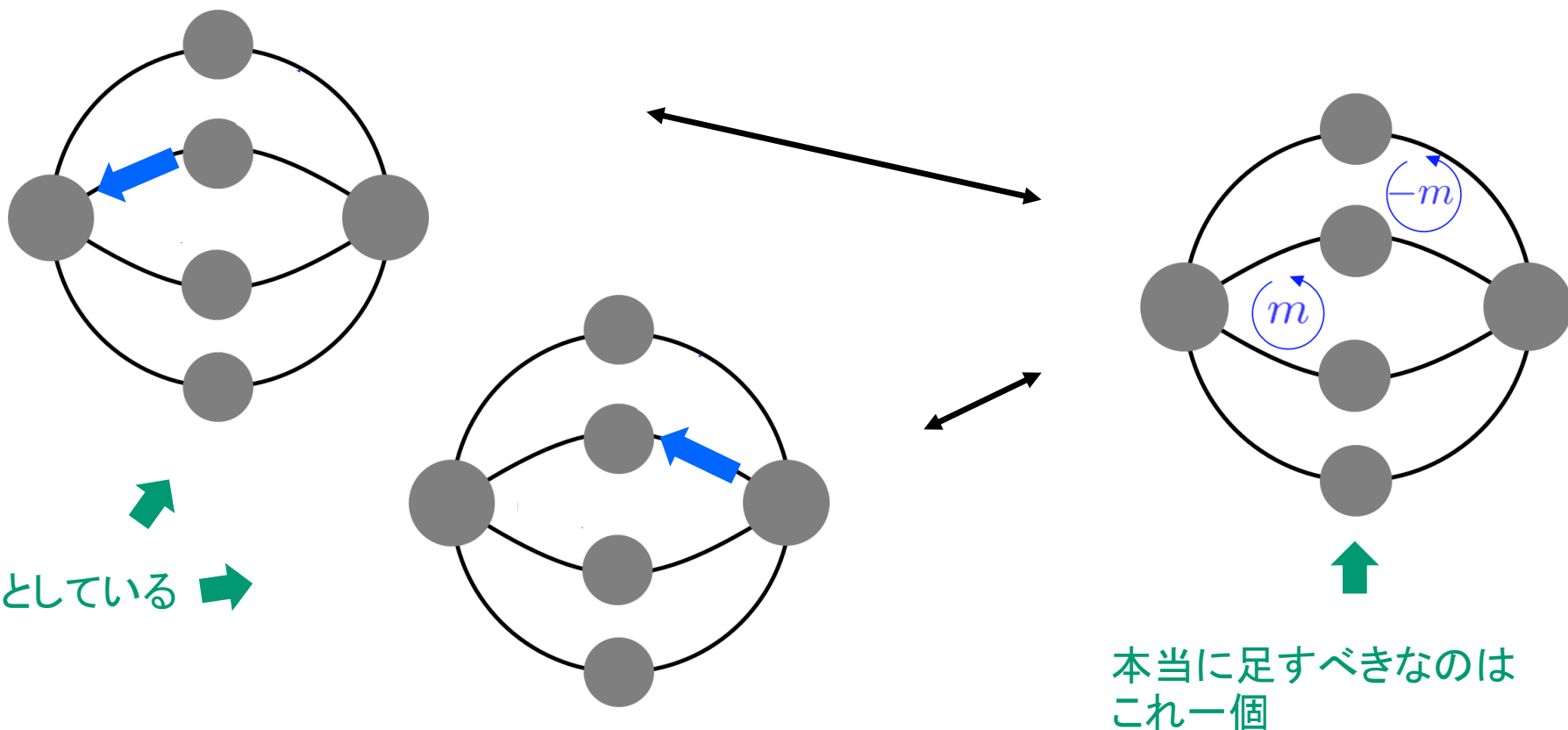
$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial}{\partial M} \left[\int dx dy \sum_{m=1}^{M-1} (G_0(\hat{g}^m x - y)) F(x - y) \right]_{M \rightarrow 1} \\ &= -\frac{1}{6} \int dx dy \left(\delta^2(\mathbf{X}) G_0^{\text{bdry}}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \right) F(x - y) \\ &\equiv -\frac{1}{6} \int dx dy G_0^{\text{tw}}(x, y) F(x - y) \quad \left(G_0^{\text{bdry}}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \equiv \int \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{e^{ik_{\parallel} \cdot (x_{\parallel} - y_{\parallel})}}{k_{\parallel}^2 + m^2} \right) \end{aligned}$$

: 素朴には、バブル図中の各プロパゲータを G_0^{tw} に置き換えて得られる。
→ バブルをプロパゲータで微分して、 G_0^{tw} でつなぎなおす。

4.プロパゲータからの寄与

しかし、
[ループ運動量のツイスト \leftrightarrow 単一プロパゲータのツイスト]
の対応には、redundancyがある

例)



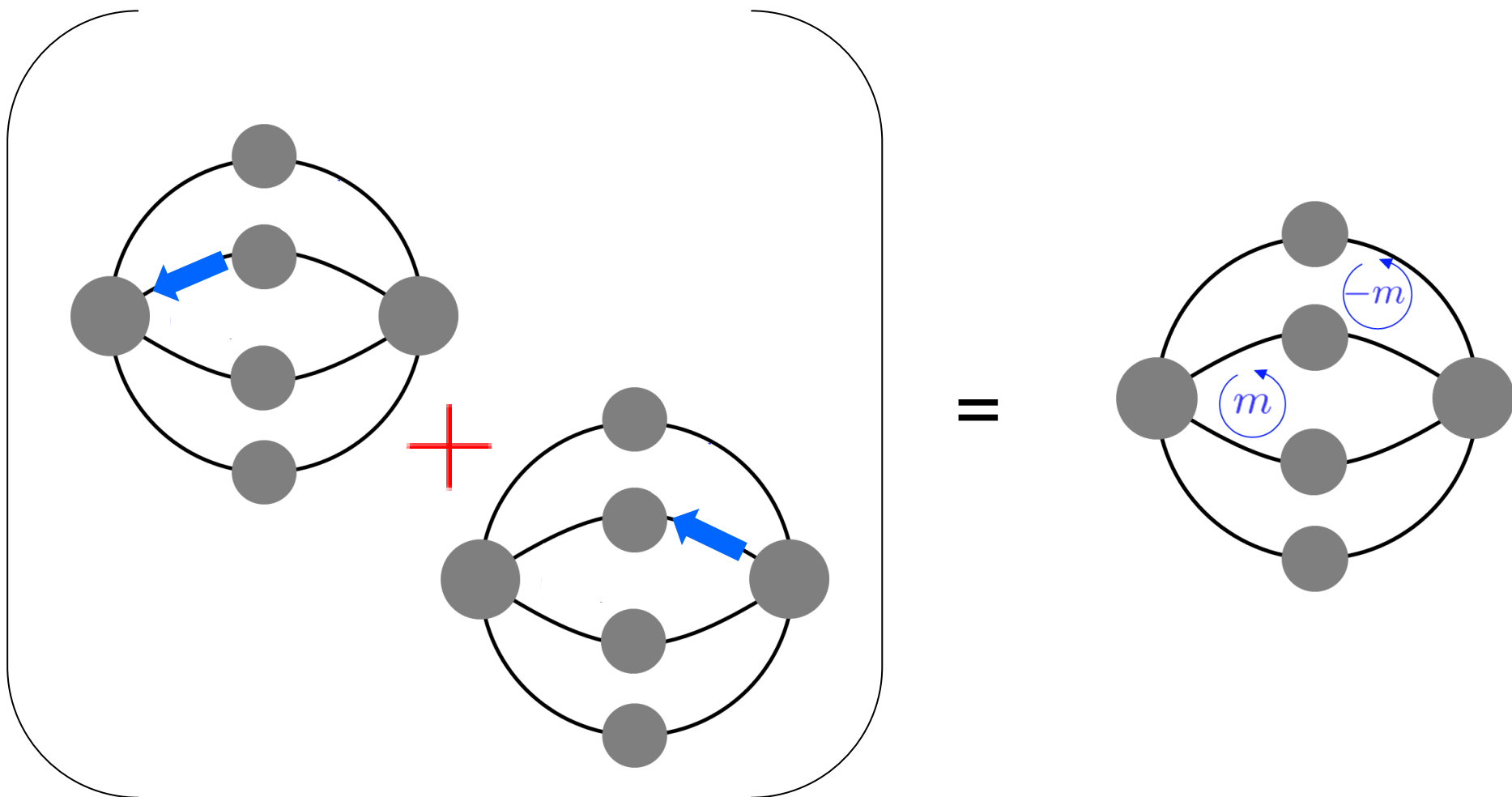
単純に、全プロパゲータでツイストを考えると、overcounting.

4. プロパゲータからの寄与

redundancyへの対処 ... overcountingしたものを割る

例)

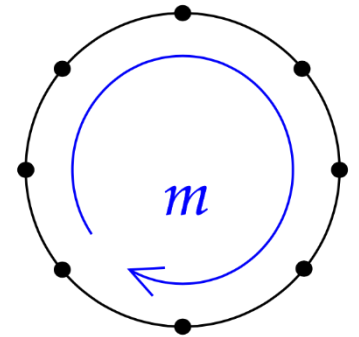
$\frac{1}{2}$



4. プロパゲータからの寄与

単一プロパゲータツイストのEEへの寄与
: free part (1-loop)

$$F|_{\text{free}} = \frac{1}{2} \text{Tr} \log G_0^{-1} = \frac{1}{2} \int_{\epsilon^2} ds \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \text{Tr} [G_0^n]$$



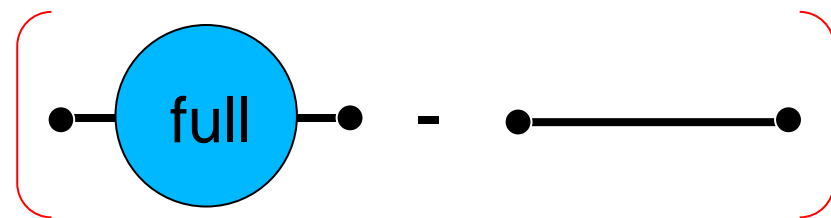
$$S_{\text{prop}}|_{\text{free}} = \frac{1}{12} \int_{\epsilon^2} ds \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \frac{1}{n} \text{Tr} [n G_0^{n-1} G_0^{\text{tw}}]$$

$$= \frac{V_{d-1}}{12} \int^{1/\epsilon} \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log [G_0(\mathbf{k} = \mathbf{0}; k_{\parallel}) \epsilon^2] \quad \text{:正しい}$$

4. プロパゲータからの寄与

単一プロパゲータツイストのEEへの寄与
: interaction part

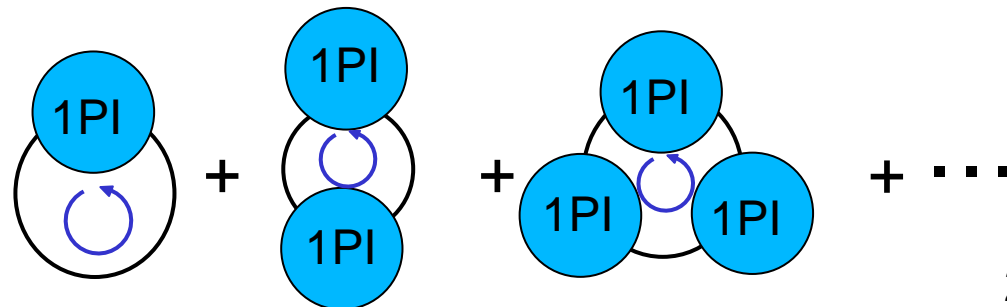
Noting $\frac{\delta F|_{\text{int}}}{\delta(G_0)_{xy}} = -\frac{1}{2} (G_0^{-1} \underline{(G - G_0)} G_0^{-1})_{xy},$



まず、redundancyを無視すれば

$$S_{\text{prop}}|_{\text{int}} \sim \frac{1}{6} \text{Tr} \left[\frac{1}{2} G_0^{-1} (G - G_0) G_0^{-1} \cdot G_0^{\text{tw}} \right]$$

$$= \frac{V_{d-1}}{12} \int^{1/\epsilon} \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \left[\Sigma G_0 + (\Sigma G_0)^2 + (\Sigma G_0)^3 + \dots \right]$$



4. プロパゲータからの寄与

単一プロパゲータツイストのEEへの寄与
: interaction part

正しい寄与は、redundant partsを割って得る:

$$\begin{aligned} S_{\text{prop}}|_{\text{int}} &= \frac{V_{d-1}}{12} \int^{1/\epsilon} \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \left[\Sigma G_0 + \frac{1}{2} (\Sigma G_0)^2 + \frac{1}{3} (\Sigma G_0)^3 + \dots \right] \\ &= -\frac{V_{d-1}}{12} \int^{1/\epsilon} \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log [1 - \Sigma G_0] \end{aligned}$$

4. プロパゲータからの寄与

Free partと組み合わせて、

$$\begin{aligned} S_{\text{prop}} &= -\frac{V_{d-1}}{12} \int^{1/\epsilon} \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log [(G_0^{-1} - \Sigma)\epsilon^2] \\ &= \frac{V_{d-1}}{12} \int^{1/\epsilon} \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log [G/\epsilon^2] \end{aligned}$$

くりこまれたプロパゲータ G で書かれる！

➡ EEのガウス性の分離

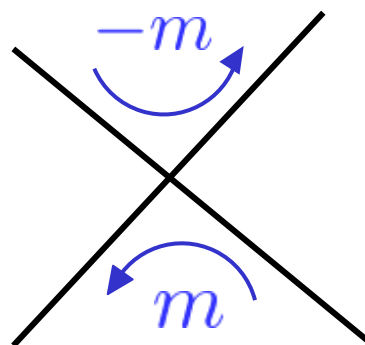
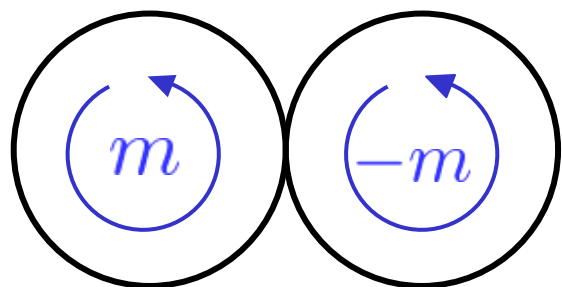
足すべきツイストの配位は他にもたくさんある。

それらについては？

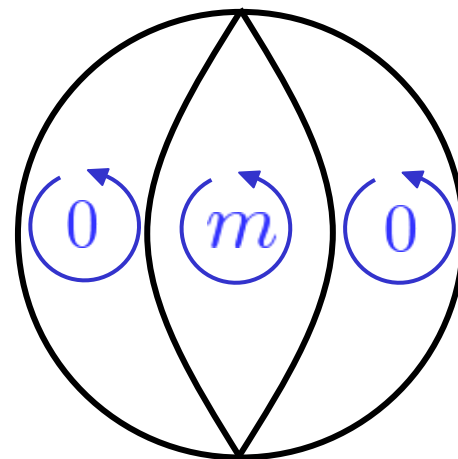
1. イントロダクション
2. オービフォールド法 (レビュー)
3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論
4. プロパゲータからの寄与
5. 相互作用頂点からの寄与
6. 他の寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-
7. まとめと展望

5. 相互作用頂点からの寄与

もう一つの、特定の配位:

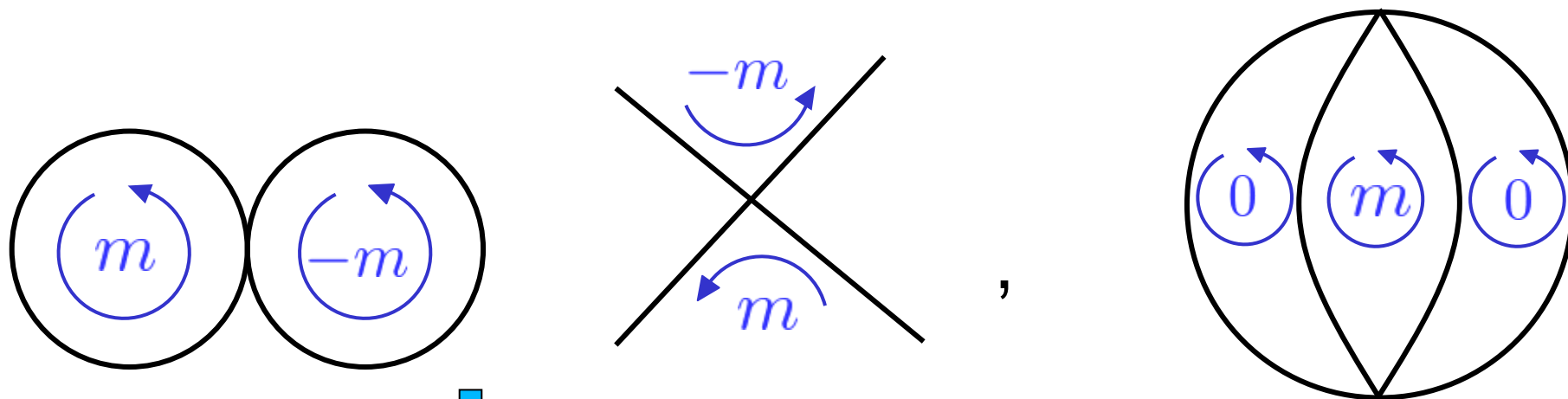


,



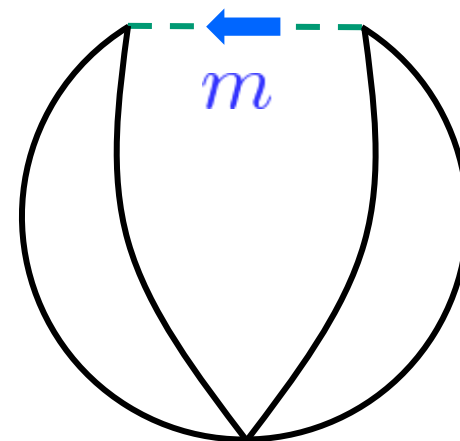
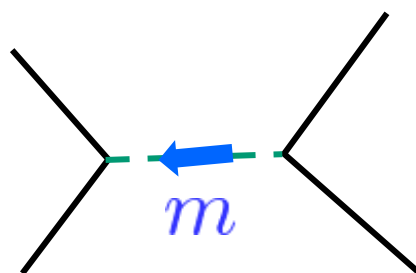
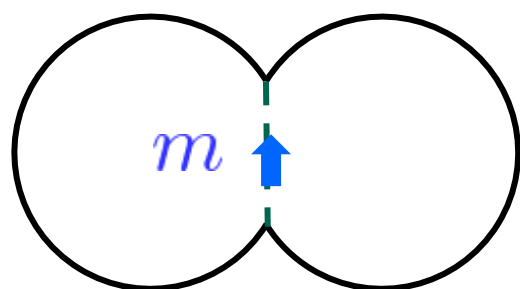
5. 相互作用頂点からの寄与

もう一つの、特定の配位:



デルタ関数で
頂点を“開く”

$$\int dx \phi(x)^4 \rightarrow \int dx dy \phi(x)^2 \phi(y)^2 \delta(\hat{g}^m x - y)$$



頂点からのEEへの寄与

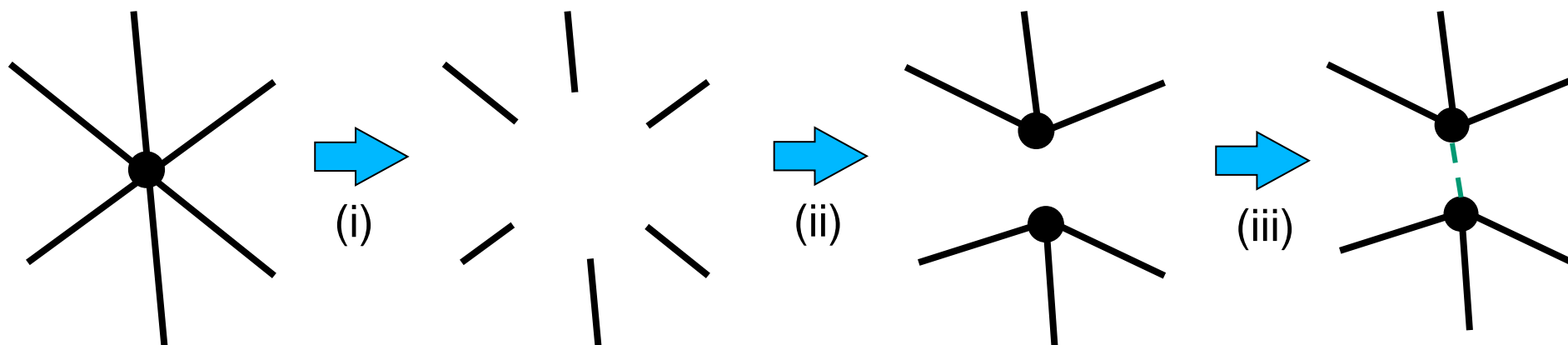
5. 相互作用頂点からの寄与

この寄与を各バブル図から系統的に捨てるには...

(i) 各頂点を分解する。

(ii) 端点を二つに再度まとめる。

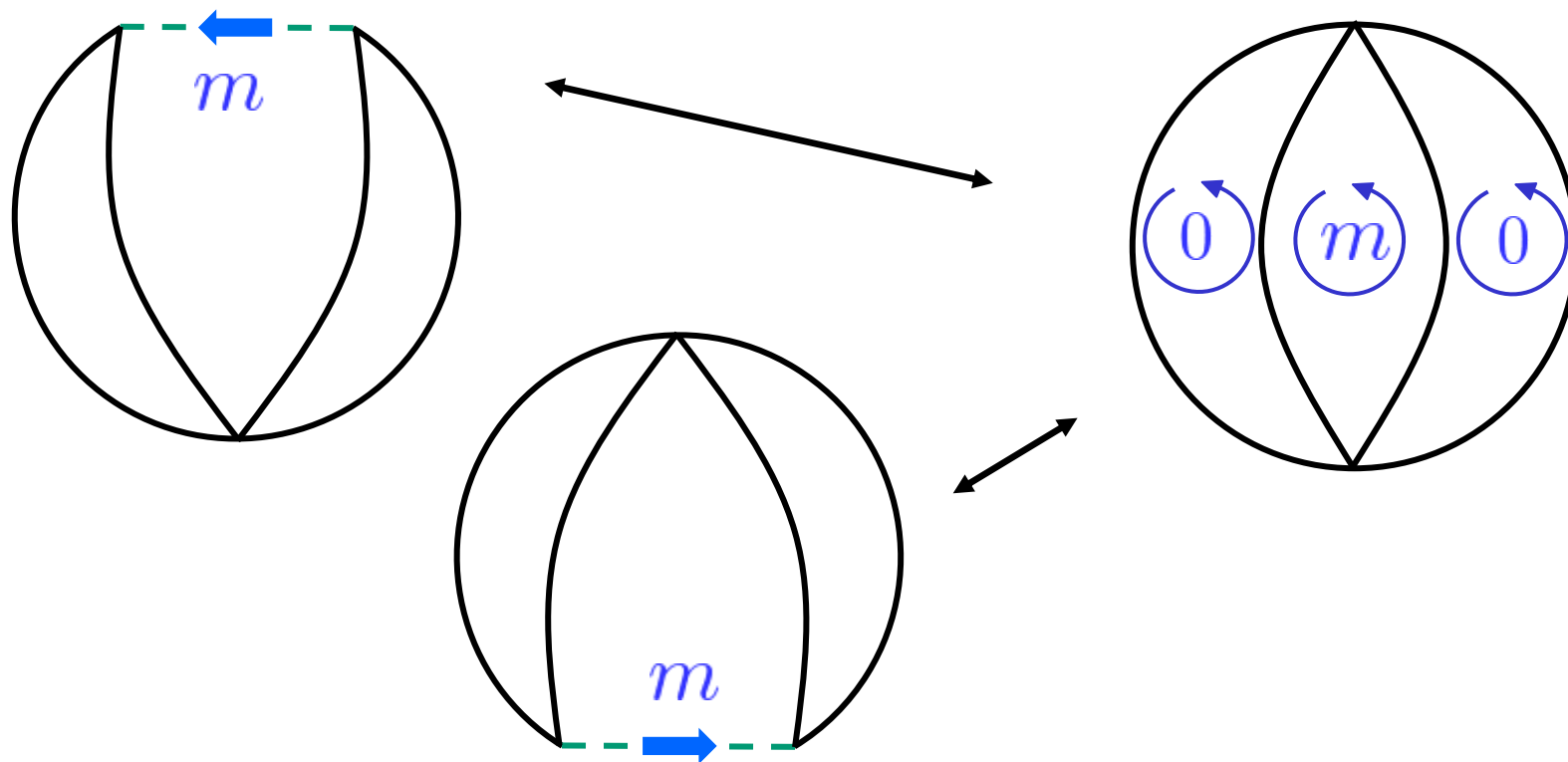
(iii) それらを $\delta^{\text{tw}}(x, y) \equiv -\partial_M \left(\sum_m^{M-1} \delta^{d+1}(\hat{g}^m x - y) \right)_{M \rightarrow 1}$ でつなぐ。



5. 相互作用頂点からの寄与

再び:

- 素朴には、すべての頂点からEEへの寄与がある。
→ 頂点で微分すれば得られる。
- しかしやはり、redundancyがある



5. 相互作用頂点からの寄与

正しい寄与の求め方はおおよそプロパゲータの寄与と同じ

例: ϕ^4 理論

$$I = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x \phi(-\square + m^2)\phi + \frac{\lambda_4}{4} \int \prod_{i=1}^4 [d^{d+1}x_i] V_0(x_1, \dots, x_4) \phi(x_1) \cdots \phi(x_4),$$

$$V_0(x_1, \dots, x_4) \equiv \int d^{d+1}y \prod_{i=1}^4 \delta^{d+1}(y - x_i)$$

ここで $\frac{\delta F}{\delta V_0(x_1, \dots, x_4)} = \frac{\lambda_4}{4} \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_4) \rangle$: ステップ (i)

Exactな4点関数

5. 相互作用頂点からの寄与

$$\frac{\lambda_4}{4} \langle \phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4) \rangle \longrightarrow \frac{\lambda_4}{4} \times 6 \langle [\phi^2](x) [\phi^2](y) \rangle \quad : \text{ステップ (ii)}$$

$[\phi^2](x)$: 複合演算子

まず redundancy を無視すると, EE への寄与は

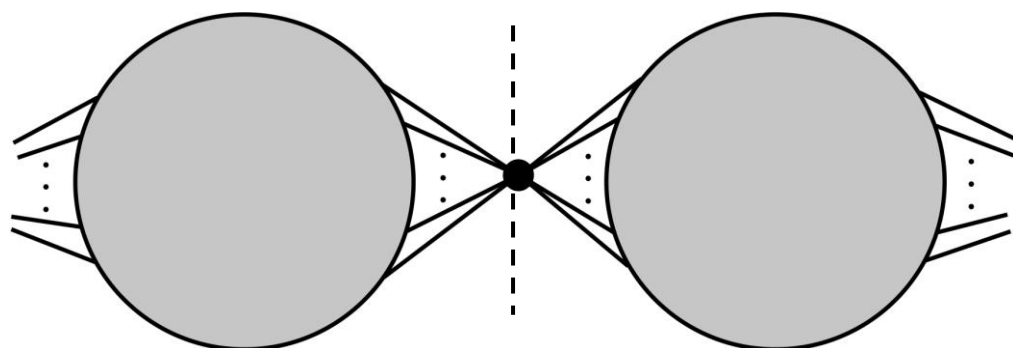
$$\begin{aligned} S_{\text{vert}}^{(\text{naive})} &= -\frac{1}{12} \int d^{d+1}x d^{d+1}y \frac{3\lambda_4}{2} \langle [\phi^2](x) [\phi^2](y) \rangle \delta^{\text{tw}}(x, y) : \text{ステップ (iii)} \\ &= -\frac{V_{d-1}}{12} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{3\lambda_4}{2} G_{\phi^2\phi^2}(\mathbf{k} = \mathbf{0}; k_{\parallel}) \end{aligned}$$

$[\phi^2]$ の Exact な相関関数

5. 相互作用頂点からの寄与

一般化された1PI (g-1PI)

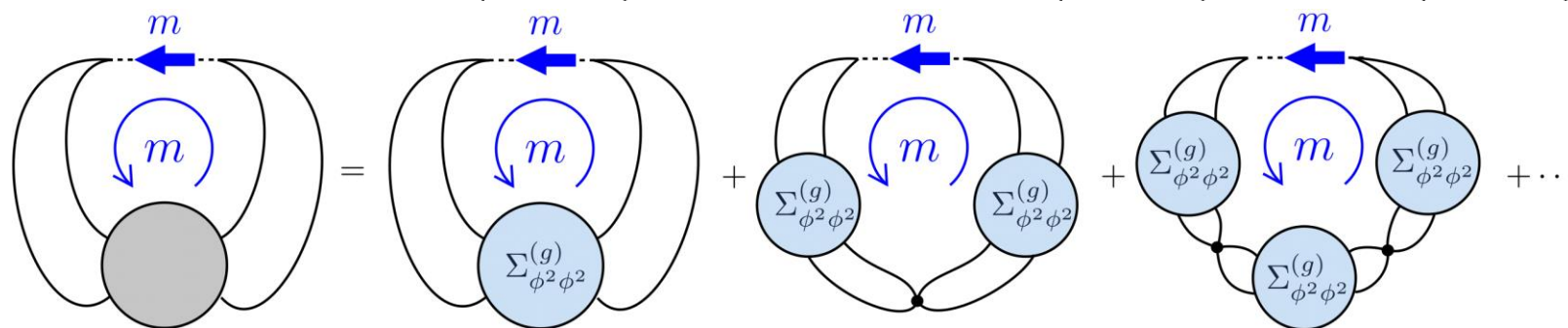
“どこの内線または頂点を1回切っても分離しない”



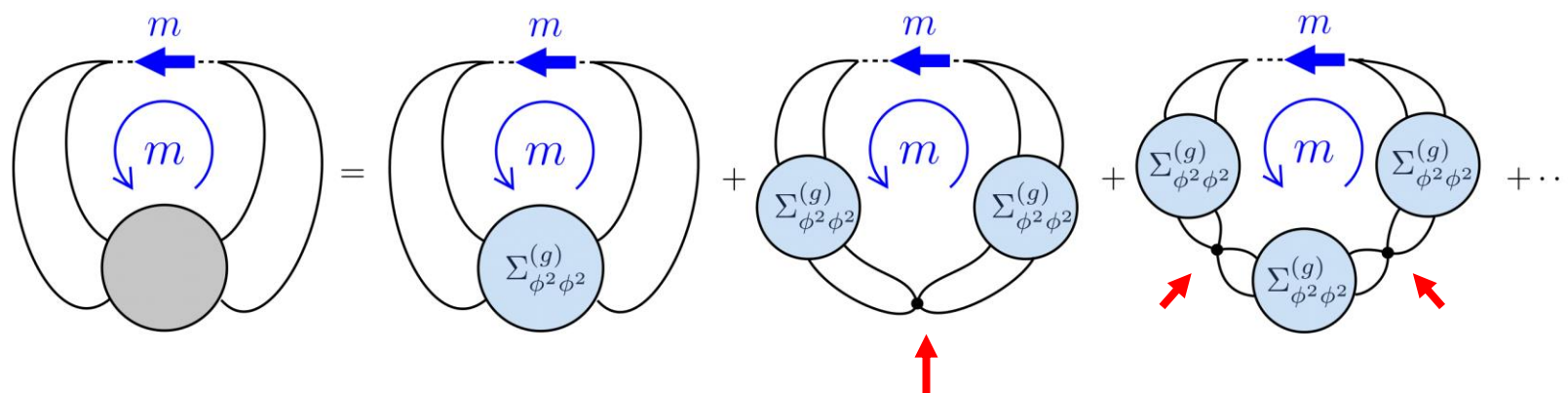
← 非 g-1PI 図



$$G_{\phi^2\phi^2} = \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} + \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} + \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} + \dots$$



5. 相互作用頂点からの寄与



- ・ $G_{\phi^2\phi^2}$ のg-1PI部に関する展開 = overcountingに関する展開
- ・ それぞれを割って、正しい寄与を得る。

$$S_{\text{vert}}^{(\text{naive})} = -\frac{V_{d-1}}{12} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{3\lambda_4}{2} \left[\Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} + \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \right. \\ \left. + \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} + \dots \right]$$



$$S_{\text{vert}} = -\frac{V_{d-1}}{12} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{3\lambda_4}{2} \left[\Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} + \frac{1}{2} \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) \Sigma_{\phi^2\phi^2}^{(g)} + \dots \right]$$

5. 相互作用頂点からの寄与

$$\begin{aligned} S_{\text{vert}} &= -\frac{V_{d-1}}{12} \int \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log \left[1 - \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) \Sigma_{\phi^2 \phi^2}^{(g)} \right] \\ &= \frac{V_{d-1}}{12} \int \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \log \left[1 + \left(-\frac{3\lambda_4}{2} \right) G_{\phi^2 \phi^2} \right] \end{aligned}$$

ϕ^4 理論では、

頂点からのEEへの寄与は、
複合演算子のくりこまれた相関関数で表される。

5. 相互作用頂点からの寄与

一般の理論への拡張も容易： 演算子の混合を考慮する。

・ g-1PI部や頂点係数を行列で書くことになる：

$$\begin{aligned} S_{\text{prop+vert}} &= -\frac{V_{d-1}}{12} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \text{tr} \log \left[\hat{G}_0^{-1} - \hat{\lambda} \hat{\Sigma}^{(g)} \right] \\ &= \frac{V_{d-1}}{12} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \text{tr} \log \left[\tilde{I} + \hat{\lambda} \hat{G} \right] \end{aligned}$$

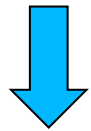
$$\hat{G}_0 = \begin{pmatrix} G_0 & 0 \\ 0 & \delta_{ab} \end{pmatrix} \quad \hat{\Sigma}^{(g)} = \begin{pmatrix} \Sigma^{(g)} & \Sigma_{\phi \mathcal{O}_b}^{(g)} \\ \Sigma_{\mathcal{O}_a \phi}^{(g)} & \Sigma_{\mathcal{O}_a \mathcal{O}_b}^{(g)} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(引数はすべて} \\ \text{(} \mathbf{k} = \mathbf{0}; k_{\parallel} \text{).)} \end{array}$$

$$\tilde{I} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta_{ab} \end{pmatrix} \quad \hat{G} = \begin{pmatrix} G & G_{\phi \mathcal{O}_b} \\ G_{\mathcal{O}_a \phi} & G_{\mathcal{O}_a \mathcal{O}_b} \end{pmatrix}$$

$\hat{\lambda}$: 結合定数 × 複合演算子をつくる組み合わせ因子

5. 相互作用頂点からの寄与

$$S_{\text{prop+vert}} = \frac{V_{d-1}}{12} \int \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \text{tr} \log \left[\tilde{I} + \hat{\lambda} \hat{G} \right]$$



プロパゲータと頂点からの寄与は、様々な演算子間のくりこまれた相関関数で表される。

“様々な演算子” = 基本場 & 頂点を開いたときに出現する複合演算子

ところで、足すべきツイスト配位には、単一のプロパゲータ
or 頂点のツイストとみなせないものがたくさんある。

それらに関しては何？

ポイント:

それらは必ず複数ループを含む図に現れる

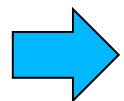
1. イントロダクション
2. オービフォールド法 (レビュー)
3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論
4. プロパゲータからの寄与
5. 相互作用頂点からの寄与
6. 他の寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-
7. まとめと展望

6.他の寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-

Wilson流のくりこみ群と有効理論

- ・ あるカットオフスケールで定義された理論がある
- ・ 短波長モードをより低いエネルギースケールまで積分する
- ・ リスケールしてカットオフをそろえる → 有効作用

☆ IR極限においては、量子揺らぎは積分され切っている。



Feynman図はくりこまれたプロパゲータでかかれ、ループを含まない。

6.他の寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-

例) ϕ^4 理論

$$G_{\phi^2\phi^2}(x-y) = \text{[Diagram: blob]} = \underbrace{\text{[Diagram: tree]}}_{\text{tree (classical term)}} + \underbrace{\text{[Diagram: loop diagrams]}}_{\text{loop diagrams (quantum correction)}} + \dots$$

IR limit

$$G_{\phi^2\phi^2}(x-y) = \text{[Diagram: tree]}$$

$$S = S_{\text{prop+vert}}$$

$$= \frac{V_{d-1}}{12} \int^{\Lambda} \frac{d^{d-1}k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} \left(\log G(\mathbf{0}; k_{\parallel}) - \log \left[1 + 3\lambda_4 \int \frac{d^{d+1}p}{(2\pi)^{d+1}} G(p)G(-\mathbf{p}; k_{\parallel} - p_{\parallel}) \right] \right)$$

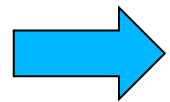
“カットオフがまだ顕わに入っている?”

これは、連続時空で独立な自由度を測るために必要(自由場の時も要る)
 → 自然な取り方として、(最も長い相関長)⁻¹が考えられる

6.他の寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-

まとめると、

IR物理から見えるEEは、プロパゲータと頂点からの補正のみと考えられる。



演算子間のくりこまれた相関関数でとらえられる(はず)。

“有効作用には無限個の相互作用頂点がある。

→ 無限種の複合演算子から寄与がある？”

おそらくそう。しかし、より高次元の演算子はより短い相関長を持つ

→ より小さい寄与を与える

1. イントロダクション
2. オービフォールド法 (レビュー)
3. Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論
4. プロパゲータからの寄与
5. 相互作用頂点からの寄与
6. 他からの寄与は？ -Wilson流くりこみの観点-
7. まとめと展望

7.まとめと展望

まとめ

- ・ 相互作用のある場の理論において、部分系が半空間の場合のEEを解析した。
- ・ オービフォールド法 → Feynman図上の \mathbb{Z}_M ゲージ理論
→ 計算は、各バブル図でループ運動量に関するツイスト数の足し上げに帰着。
- ・ プロパゲータからのEEへの寄与は、くりこまれたプロパゲータで書かれ、EEのガウス部を分離する。
- ・ 頂点からの寄与は、複合演算子のくりこまれた相関関数で書かれる。
- ・ Wilson流くりこみと組み合わせると、IR有効理論の立場から見えるEEは、上の二つの寄与がすべてだと考えられる。

→ EE はくりこまれた相関関数で書かれる!

7.まとめと展望

展望

- **具体的な評価に基づく、議論の正当化**
数値解析や可解系を用いれば... (例: massive Thirring模型)
- **一般化**
 - スピンや微分相互作用がある系へ → 実は既に適用できる
 - 一般の部分領域に
→ 実時間形式との関係を明らかにする必要性.
(波動関数とHamiltonianの言葉では?)
 - 非相対論へ
- **Wilson流くりこみ群とくりこまれたEEとの関係の精密化**
(例:c-定理、a-定理や、tensor networkとは?)
- **様々な応用**
(凝縮系、トポロジカル EE、ブラックホール、宇宙論、...)

Thank you!

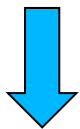
Backup

A. 単一のツイストされたプロパゲータ

座標空間で見たプロパゲータのツイスト

$$G_0(\hat{g}^n x - y) = e^{\frac{1}{2} \cot \theta_n \mathbf{r} \times \underline{\partial}_X} \frac{1}{4s_n^2} \int \frac{d^{d-1} k_{\parallel}}{(2\pi)^{d-1}} e^{i k_{\parallel} \cdot r_{\parallel}} \frac{1}{(-\underline{\partial}_X^2 / 4s_n^2) + k_{\parallel}^2 + m^2} \delta^2(\mathbf{X})$$

$$\left(\theta_n = \frac{\pi n}{M}, \quad s_n = \sin \theta_n, \quad r = x - y, \quad \mathbf{X} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{2} \right)$$



$\mathbf{X} = 0$ (境界)周りの、 \mathbf{X} に関する微分展開

A. 単一のツイストされたプロパゲータ

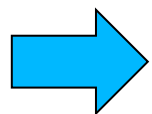
座標空間で見たプロパゲータのツイスト

特に単一のプロパゲータがツイストされていると、

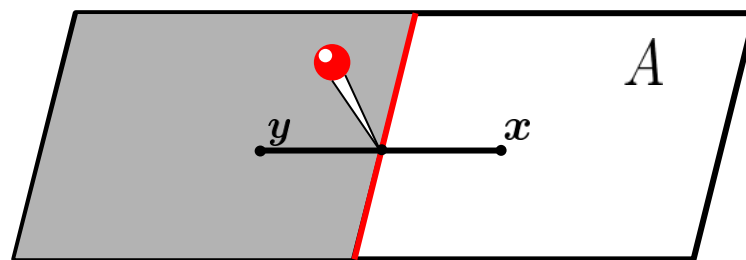
$$\int d^{d+1}x d^{d+1}y G_0(\hat{g}^m x - y) F(x - y)$$

← (Xに依存しない)

$$= \int d^{d+1}x d^{d+1}y \left(\frac{1}{4s_m^2} G_0^{\text{bdry}}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \delta^2(\mathbf{X}) \right) F(x - y)$$

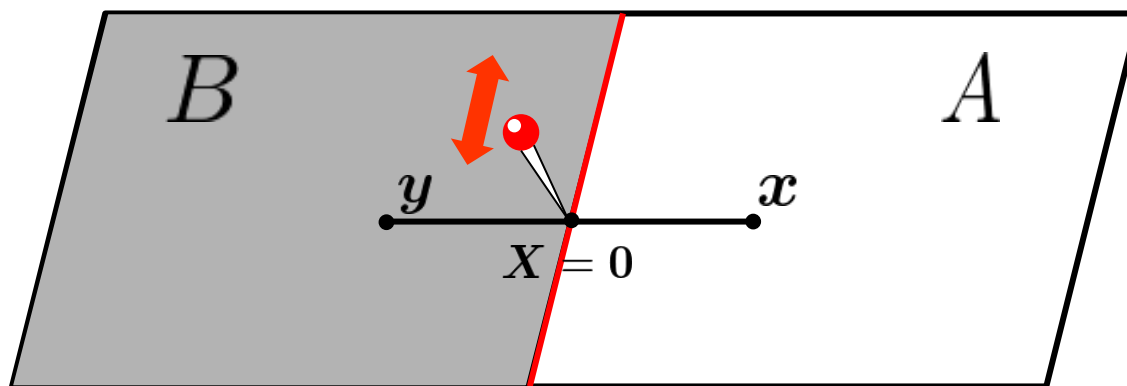


境界に“pin留め”
されたモード



A. 単一のツイストされたプロパゲータ

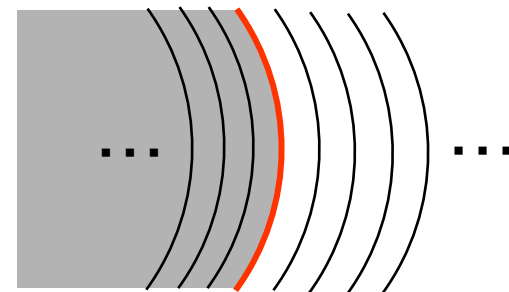
$$G_0(\hat{g}^n x - y) \rightarrow \frac{1}{4s_n^2} G_0^{(\text{bdry})}(r_{\parallel}) \underline{\delta^2(\mathbf{X})}$$



- ・ 領域間の相関を直接反映している。
- ・ 境界に平行なモードのみが伝播する。


垂直方向は "reduce" されている。

→ 境界に応じたバルクのfoliationを考える?



A. 単一のツイストされたプロパゲータ

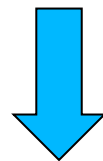
プロパゲータからのEEへの寄与

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial}{\partial M} \left[\int dx dy \sum_{m=1}^{M-1} (G_0(\hat{g}^m x - y)) F(x - y) \right]_{M \rightarrow 1} \\ &\rightarrow -\frac{\partial}{\partial M} \left[\int dx dy \sum_{m=1}^{M-1} \left(\frac{1}{4s_m^2} \delta^2(\mathbf{X}) G_0^{\text{bdry}}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \right) F(x - y) \right]_{M \rightarrow 1} \\ &= -\frac{1}{6} \int dx dy \left(\delta^2(\mathbf{X}) G_0^{\text{bdry}}(x_{\parallel} - y_{\parallel}) \right) F(x - y) \\ &\equiv -\frac{1}{6} \int dx dy G_0^{\text{tw}}(x, y) F(x - y) \end{aligned}$$


B. EE from 2PI formalism

(Although it's straightforward to calculate those bubbles...)

The above discussion holds even if we replace the bare propagators with full-quantum, renormalized ones.



Let's employ **2PI formalism** to evaluate EE in terms of 2-pt. functions!

2 Particle Irreducible formalism

[Cornwall-Jackiw-Tomboulis, '74]

Effective action:

$$\Gamma = \frac{1}{2} \text{Tr} \log G^{-1} + \frac{1}{2} \text{Tr}(G_0^{-1} G - 1) - \Gamma_2[G, \varphi]$$

$G(x, y)$: renormalized 2-pt.function

$\varphi(x)$: renormalized 1-pt.function

$\Gamma_2[G, \varphi]$: 2PI bubbles consisting of $G(x, y), \varphi(x)$

Consider 1- & 2-pt. function as fundamental variables consistently.

2 Particle Irreducible formalism

[Cornwall-Jackiw-Tomboulis, '74]

$$\Gamma = \frac{1}{2} \text{Tr} \log G^{-1} + \frac{1}{2} \text{Tr}(G_0^{-1} G - 1) - \Gamma_2[G, \varphi]$$

Gap equation (EOM)

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta G} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G^{-1} = G_0^{-1} - 2 \frac{\delta \Gamma_2}{\delta G} \quad : \text{Schwinger-Dyson eq.}$$

: Taking into account the resummation with respect to 2-pt. function.

B. EE from 2PI formalism

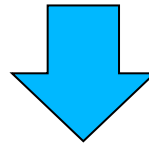
We can evaluate EE from Γ , with the help of the gap equation

(in the present case, $\varphi = 0$.)

Renormalized 2-pt. function contribution to EE

$$S_A = -\frac{V_{d-1}}{12} \int^{1/\varepsilon} \frac{d^{d-1}k}{(2\pi)^{d-1}} \log[\tilde{G}^{-1}(\mathbf{0}, k_{\parallel})\varepsilon^2] + (\text{contributions from others})$$

While there're many other contributions, those are not from G .



We have separated the gaussian contribution completely!