2021年10月27日 京大理学部セミナー

数値Bootstrap法を用いた量子力学と行列模型の解析

森田 健 (静岡大学)

Ref.

2109.08033, 2109.02701, on going work

相川 優 (静岡大学), 吉村 恒太 (University of Notre Dame, USA)
との共同研究

Anderson-Kruczenski (2016): GWW model, Lattice gauge theroy
Lin (2020), Kazakov-Zheng (2021): 0dim matrix models
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020): 1dim QM, Matrix quantum mechanics

数値Bootstrap法:

- ✓ 近年提唱された新しい数値解析の手法.
- ✓ これまで0次元や1次元の行列模型や量子力学に適応.
- ✓ Schwinger-Dyson方程式/Heisenberg方程式 + 確率分布の正定値性 を解く

Monte-Carloとの比較 → MCと相補的な関係

	Monte Carlo	Bootstrap
厳密解	NG	広い意味でOK
N = ∞	NG	OK
finite-N	OK	Hard
カノニカル分布	OK	NG
ミクロカノニカル	NG	Partially OK
基底状態(T=0)	Hard	OK
θ-term	Very Hard	Partially OK

Anderson-Kruczenski (2016): GWW model, Lattice gauge theroy
Lin (2020), Kazakov-Zheng (2021): 0dim matrix models
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020): 1dim QM, Matrix quantum mechanics

数値Bootstrap法:

- ✓ 近年提唱された新しい数値解析の手法.
- ✓ これまで0次元や1次元の行列模型や量子力学に適応.
- ✓ Schwinger-Dyson方程式/Heisenberg方程式 + 確率分布の正定値性 を解く

Monte-Carloとの比較 → MCと相補的な関係

	Monte Carlo	Bootstrap
厳密解	NG	広い意味でOK
N = ∞	NG	OK
finite-N	OK	Hard
カノニカル分布	OK	NG
ミクロカノニカル	NG	Partially OK
基底状態(T=0)	Hard	OK
θ-term	Very Hard	Partially OK

Sec.1

Sec.2

Sec.3

1. Review of Bootstrap Approach

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

$$\langle O \rangle = \int dX \rho(X) O(X) \quad \begin{cases} \rho(X) : \text{probability density} \\ \quad \rho(X) \sim e^{-V(X)} \text{ or } \psi(X)^\dagger \psi(X) \\ O(X) : \text{Observables} \end{cases} \qquad H\psi(X) = E\psi(X)$$

目標: VやHの情報から$\langle O \rangle$を求めたい.

主に考える系: 量子力学, 行列量子力学, 行列模型(0dim)

- 0次元模型(行列模型)の場合は, 単なる期待値.
- 量子力学の場合はエネルギー固有状態における物理量の期待値.
  (熱平衡状態などに関してはあとで議論)
- 量子力学は経路積分でなくハミルトン形式を考える.

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

$$\langle O \rangle = \int dX \rho(X) O(X) \quad \begin{cases} \rho(X) : \text{probability density} \\ \quad \rho(X) \sim e^{-V(X)} \text{ or } \psi(X)^\dagger \psi(X) \\ O(X) : \text{Observables} \end{cases}$$

$$H\psi(X) = E\psi(X)$$

If $\langle O^\dagger O \rangle \geq 0$ is satisfied for $^\forall O$, we obtain the following relation:

$$\tilde{O} = \sum_{i=1}^{K} c_i O_i \quad \begin{cases} \{c_i\} : \text{constants} \\ K : \text{an integer} \sim \text{cut off} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \langle \tilde{O}^\dagger \tilde{O} \rangle = \vec{c}^{\,T} M \vec{c} \geq 0 \quad \text{for } ^\forall \{c_i\}$$

$$\begin{cases} \vec{c}^{\,T} = (c_1, c_2, \cdots, c_K) \\ M := \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \langle O_i^\dagger O_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \\ \quad K \times K \text{ matrix} \end{cases}$$

Mの固有値は全て非負

M は 半正定値行列
(positive-semidefinite matrix)

$$M \succeq 0$$

$\langle O_i^\dagger O_j \rangle$ is highly constrained!

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \langle O_i^\dagger O_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \qquad M \succeq 0$$

$K \times K$ matrix

Additional constraints:

- $\langle O^\dagger \rangle = \langle O \rangle^*$
- $\langle HO \rangle = \langle OH \rangle = E \langle O \rangle$ (QM)
- $\langle [H, O] \rangle = 0$ (QM)
- Schwinger-Dyson equation (0dim)
- Symmetries $\langle xx \rangle = \langle yy \rangle$
- $[x, p] = i\hbar$ (QM)

If *K* is sufficiently large, possible values of $\langle O_i^\dagger O_j \rangle$ are highly constrained.

example) 1dim QM

$$\tilde{O} = c_0 1 + c_1 \hat{x} + c_2 \hat{p}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \langle x \rangle & \langle p \rangle \\ \langle x \rangle & \langle x^2 \rangle & \langle xp \rangle \\ \langle p \rangle & \langle px \rangle & \langle p^2 \rangle \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$M \succeq 0$$

Uncertainty relation

$$\langle \Delta x^2 \rangle \langle \Delta p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad \text{for } {}^\forall | \quad \rangle$$

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \langle O_i^\dagger O_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \qquad M \succeq 0$$

$K \times K$ matrix

Additional constraints:

- $\langle O^\dagger \rangle = \langle O \rangle^*$
- $\langle HO \rangle = \langle OH \rangle = E \langle O \rangle$ (QM)
- $\langle [H, O] \rangle = 0$ (QM)
- Schwinger-Dyson equation (0dim)
- Symmetries $\langle xx \rangle = \langle yy \rangle$
- $[x, p] = i\hbar$ (QM)

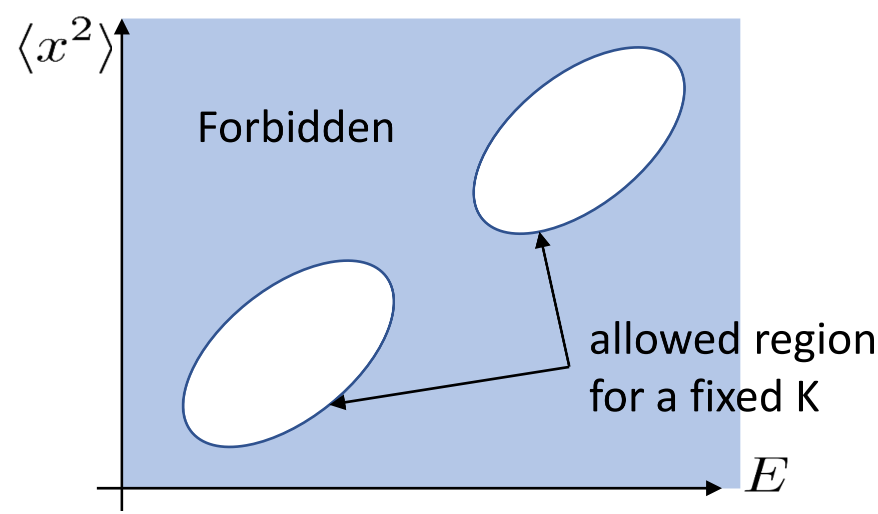
If *K* is sufficiently large, possible values of $\langle O_i^\dagger O_j \rangle$ are highly constrained.

example) 1dim QM

$| \quad \rangle$:energy eigenstate

ex) $\begin{cases} H = p^2 + x^2 + x^4 \\ O = x^2 \\ \langle HO \rangle = \langle p^2 x^2 \rangle + \langle x^4 \rangle + \langle x^6 \rangle \\ \qquad\quad = E \langle x^2 \rangle \end{cases}$

制約付き最小値問題に帰着



1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \langle O_i^\dagger O_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \quad M \succeq 0$$

$K \times K$ matrix

Additional constraints:

- $\langle O^\dagger \rangle = \langle O \rangle^*$
- $\langle HO \rangle = \langle OH \rangle = E \langle O \rangle$ (QM)
- $\langle [H, O] \rangle = 0$ (QM)
- Schwinger-Dyson equation (0dim)
- Symmetries $\langle xx \rangle = \langle yy \rangle$
- $[x, p] = i\hbar$ (QM)

If *K* is sufficiently large, possible values of $\langle O_i^\dagger O_j \rangle$ are highly constrained.

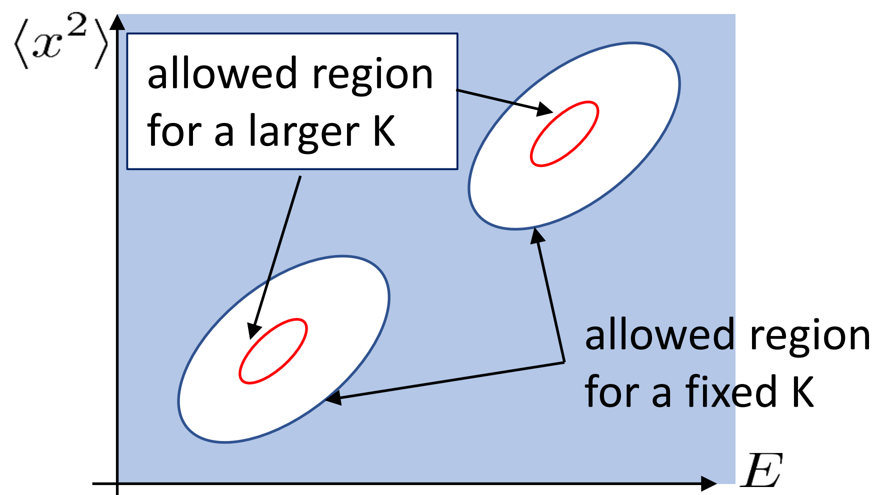
制約付き最小値問題に帰着

example) 1dim QM

$| \quad \rangle$:energy eigenstate

ex) $\begin{cases} H = p^2 + x^2 + x^4 \\ O = x^2 \end{cases}$

$$\langle HO \rangle = \langle p^2 x^2 \rangle + \langle x^4 \rangle + \langle x^6 \rangle = E \langle x^2 \rangle$$



1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \langle O_i^\dagger O_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \quad M \succeq 0$$

$K \times K$ matrix

Additional constraints:

- $\langle O^\dagger \rangle = \langle O \rangle^*$
- $\langle HO \rangle = \langle OH \rangle = E \langle O \rangle$ (QM)
- $\langle [H, O] \rangle = 0$ (QM)
- Schwinger-Dyson equation (0dim)
- Symmetries $\langle xx \rangle = \langle yy \rangle$
- $[x, p] = i\hbar$ (QM)

If *K* is sufficiently large, possible values of $\langle O_i^\dagger O_j \rangle$ are highly constrained.

制約付き最小値問題に帰着

example) 1dim QM

$| \quad \rangle$:energy eigenstate

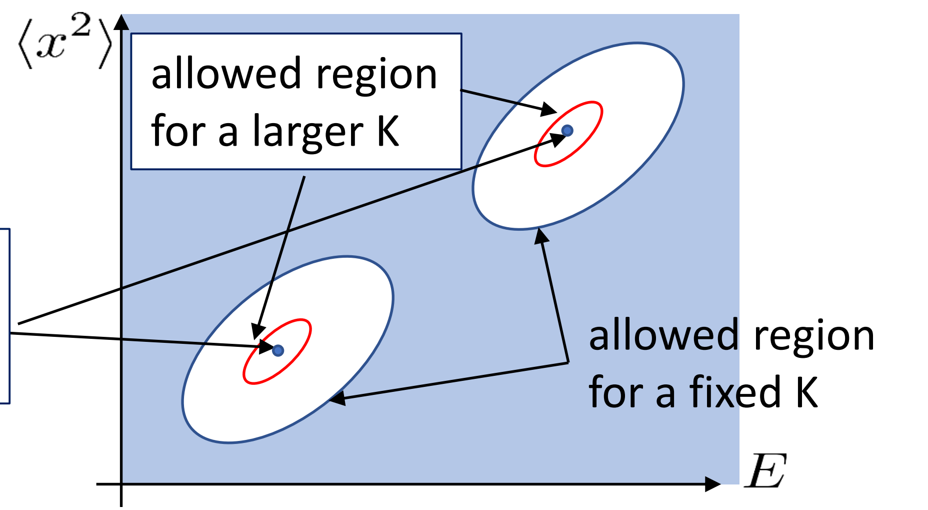
ex) $H = p^2 + x^2 + x^4$

O ... 2

$\langle H$ ...

$= E \langle x$ ... $\rangle$

The values are almost fixed at a sufficiently large K.

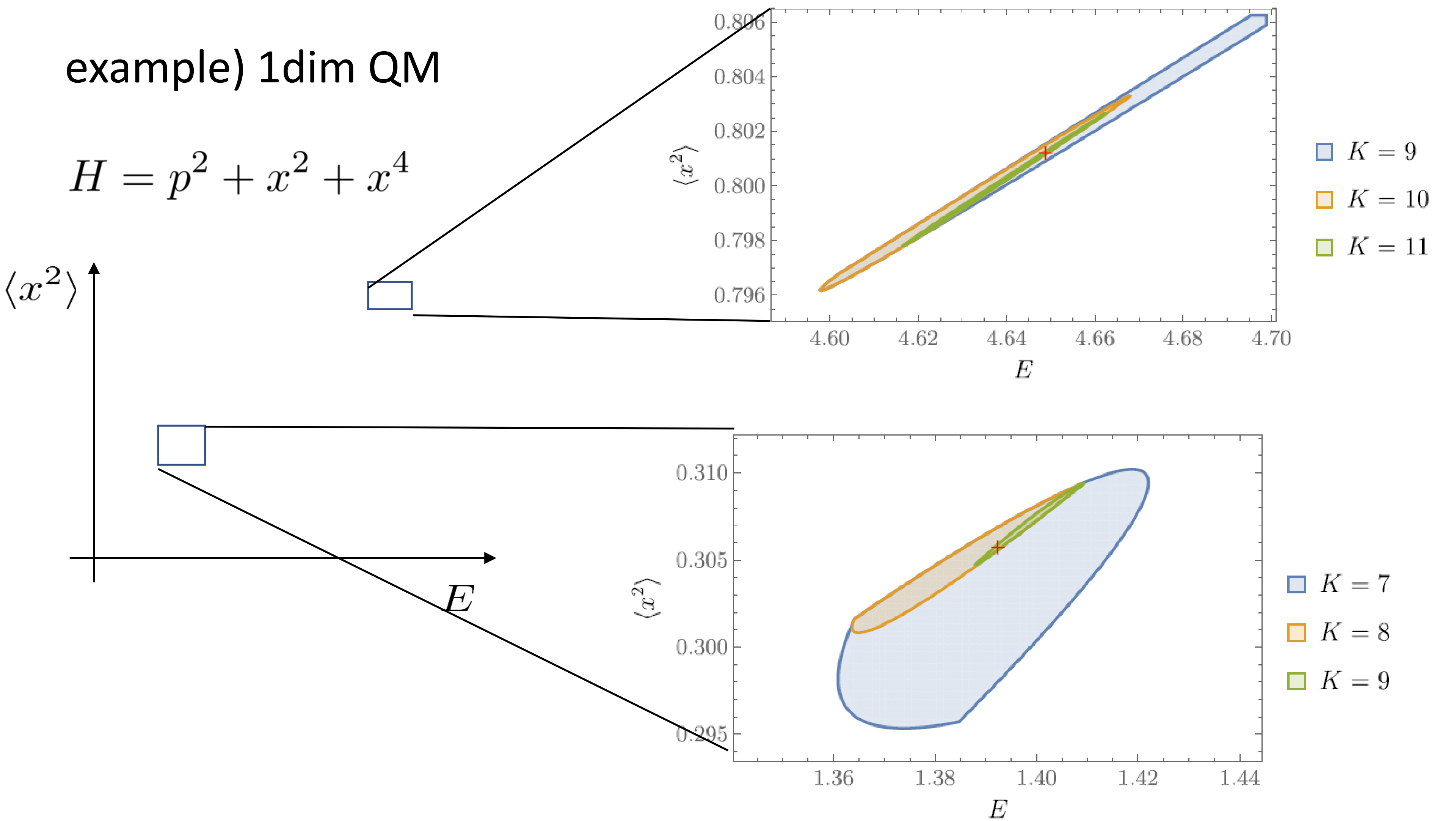


1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

example) 1dim QM

$$H = p^2 + x^2 + x^4$$



Figures in Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

example) 1dim Harmonic Oscillator

Aikawa-Morita-Yoshimura (2021)

$$H = \frac{1}{2}\left(P^2 + X^2\right) = a^\dagger a + \frac{1}{2}, \qquad \tilde{O} = \sum_{n=0}^{K} c_n a^n = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots + c_K a^K,$$

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \langle O_i^\dagger O_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \langle a \rangle & \langle a^2 \rangle & \cdots & \langle a^K \rangle \\ \langle a^\dagger \rangle & \langle a^\dagger a \rangle & \langle a^\dagger a^2 \rangle & \cdots & \langle a^\dagger a^K \rangle \\ \langle (a^\dagger)^2 \rangle & \langle (a^\dagger)^2 a \rangle & \langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle & \cdots & \langle (a^\dagger)^2 a^K \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle (a^\dagger)^K \rangle & \langle (a^\dagger)^K a \rangle & \langle (a^\dagger)^K a^2 \rangle & \cdots & \langle (a^\dagger)^K a^K \rangle \end{pmatrix}$$

$$O = (a^\dagger)^m a^n$$

$$\begin{cases} \langle [H, O] \rangle = 0 & \longrightarrow \quad (m-n)\langle (a^\dagger)^m a^n \rangle = 0 \\ \langle HO \rangle = E \langle O \rangle & \longrightarrow \quad \langle (a^\dagger)^{m+1} a^{n+1} \rangle = \left(E - m - \frac{1}{2}\right) \langle (a^\dagger)^m a^n \rangle. \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \langle (a^\dagger)^m a^n \rangle = 0, \quad (m \neq n) \\ \langle (a^\dagger)^n a^n \rangle = \prod_{k=0}^{n-1} \left(E - k - \frac{1}{2}\right). \end{cases}$$

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

example) 1dim Harmonic Oscillator

Aikawa-Morita-Yoshimura (2021)

$$H = \frac{1}{2}\left(P^2 + X^2\right) = a^\dagger a + \frac{1}{2}, \qquad \tilde{O} = \sum_{n=0}^{K} c_n a^n = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \cdots + c_K a^K,$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle a^\dagger a \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \langle (a^\dagger)^2 a^2 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \langle (a^\dagger)^K a^K \rangle \end{pmatrix} \qquad \langle (a^\dagger)^n a^n \rangle = \prod_{k=0}^{n-1}\left(E - k - \frac{1}{2}\right).$$

*M*が半正定値行列 = 固有値が全て非負

$$K = 1: \ \langle a^\dagger a \rangle = \left(E - \frac{1}{2}\right) \geq 0 \quad \longrightarrow \quad E \geq \frac{1}{2}$$

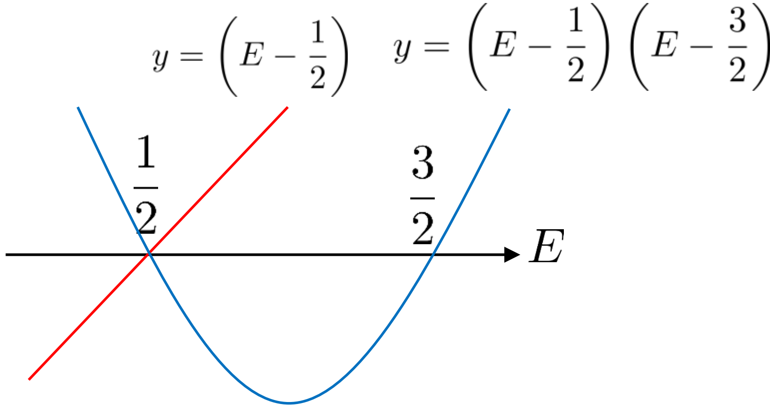
$$K = 2: \quad E \geq \frac{1}{2}, \quad \left(E - \frac{1}{2}\right)\left(E - \frac{3}{2}\right) \geq 0$$

$$\longrightarrow \quad E \geq \frac{3}{2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}$$

⋮

$$K = \infty: \quad E = n + \frac{1}{2},$$

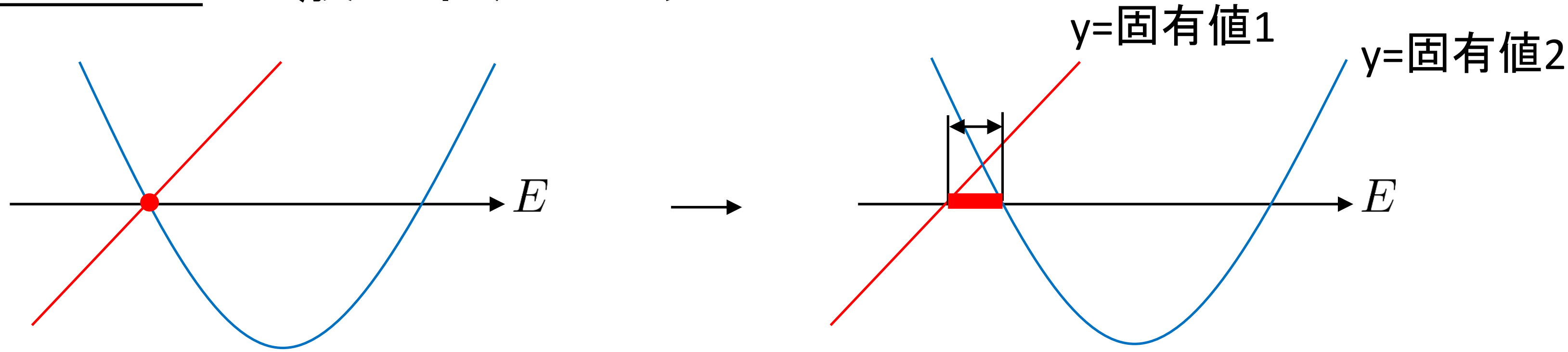
→ 厳密解を与える.



1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

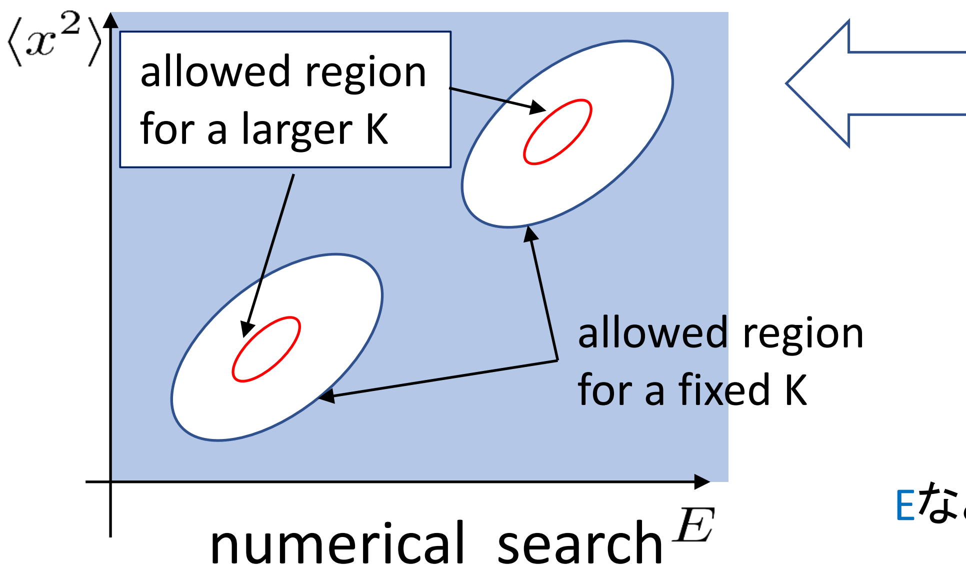
コメント1: 一般のポテンシャル



Kを増やし, 固有値が増えると
可能な領域が狭くなって行く.

コメント2: 変数空間

$H = p^2 + x^2 + x^4$ $\langle x^2 \rangle,\ E$ の2変数を考えた.



$$\begin{cases} \langle HO \rangle = \langle OH \rangle = E \langle O \rangle \\ \langle [H, O] \rangle = 0 \end{cases}$$

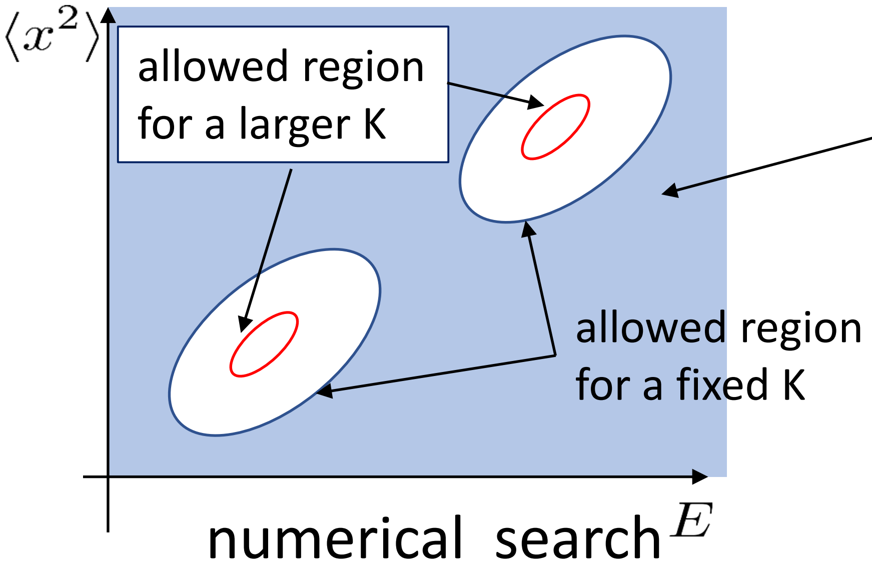
すべての演算子 $\langle x^n p^m \rangle$ が
$\langle x^2 \rangle,\ E$ できまる.
($\langle x^2 \rangle,\ E$ が独立変数)

Hの形により, 独立変数の数が決まる.
独立変数の数が多すぎる場合は
Eなど興味のある物理量の範囲のみ注目する.
(あとで重要)

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

コメント3: 厳密性



一旦排除された領域は,
量子力学とinconsistent
→ 決して許されない.

境界は数値の精度を上げれば
かなり精緻に決まる.
→ 乱数に依存しないと言う意味で
「厳密」な結果

コメント4: 厳密解

調和振動子は数値bootstrapで解いても
0.499999999… ≦ E ≦ 0.500000000…
→「厳密」にE=1/2とみなせる. 他の固有値も同様.

他にも水素原子や行列量子力学

$$H = N\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}X^2\right),$$ は厳密解を再現する.

→数値Bootstrapで未知の厳密解を発見できる可能性があるかもしれない.

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

コメント5: 2次元以上の量子力学

Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

$$H = p_x^2 + p_y^2 + V(x, y)$$

$$\begin{cases} \langle HO \rangle = \langle OH \rangle = E \langle O \rangle \\ \langle [H, O] \rangle = 0 \end{cases}$$

一般に $\langle x^k p_x^l y^m p_y^n \rangle$ は他の量で書けるが, 独立変数の数が一定でない.

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \langle O_i^\dagger O_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

$K \times K$ matrix

A個の $\langle x^k p_x^l y^m p_y^n \rangle$ が独立

$$M' = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \\ \cdots & \langle O_i^\dagger O_j \rangle & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

$K+1 \times K+1$ matrix

A'個の $\langle x^k p_x^l y^m p_y^n \rangle$ が独立

典型的に A < A' → Kを大きくとっても解の制限が強くなるか不明(数値的には強くなりそう.)
→ 実用上, 基底状態以外を数値bootstrap法で求めるのは難しそう.

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

Large-N matrix models:

例:
$$H = N\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}P^2 + V(X)\right),$$
$$H = N\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}P_X^2 + \frac{1}{2}P_Y^2 + [X,Y]^2\right)$$

$$\begin{cases} P, X:\ N\times N\ U(N)\ \text{matrices} \\ [P_{ij}, X_{kl}] = -\dfrac{i}{N}\delta_{il}\delta_{jk} \end{cases}$$

量子力学とほぼ同じ条件

- $M \succeq 0$
- $\langle O^\dagger \rangle = \langle O \rangle^*$
- $\langle HO \rangle = \langle OH \rangle = E\langle O \rangle$ (QM)
- $\langle [H, O] \rangle = 0$ (QM)
- Schwinger-Dyson equation (0dim)
- Symmetries $\langle \mathrm{tr}XX \rangle = \langle \mathrm{tr}YY \rangle$
- $[P_{ij}, X_{kl}] = -\frac{i}{N}\delta_{il}\delta_{jk}$ (QM)

出てくる演算子の種類が量子力学と桁違い

$$\left.\begin{cases} \frac{1}{N}\langle \mathrm{tr}XXPXPXX\cdots\rangle \\ \frac{1}{N^2}\langle \mathrm{tr}XX\mathrm{tr}XXXX\rangle \end{cases}\right. \longleftrightarrow \langle x^n p^m \rangle$$

数値コスト大

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

Large-N matrix models:

例:
$$H = N\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}P^2 + V(X)\right),$$
$$H = N\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2}P_X^2 + \frac{1}{2}P_Y^2 + [X,Y]^2\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} P, X\colon\ N \times N\ U(N)\ \text{matrices} \\ [P_{ij}, X_{kl}] = -\frac{i}{N}\delta_{il}\delta_{jk} \end{array}\right.$$

量子力学とほぼ同じ条件

- $M \succeq 0$
- $\langle O^\dagger \rangle = \langle O \rangle^*$
- $\cancel{\langle HO \rangle = \langle OH \rangle = E\langle O \rangle}$ (QM)
- $\langle [H, O] \rangle = 0$ (QM)
- Schwinger-Dyson equation (0dim)
- Symmetries $\langle \mathrm{tr}XX \rangle = \langle \mathrm{tr}YY \rangle$
- $[P_{ij}, X_{kl}] = -\frac{i}{N}\delta_{il}\delta_{jk}$ (QM)

出てくる演算子の種類が量子力学と桁違い

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{N}\langle \mathrm{tr}XXPXPXX\cdots \rangle \\ \frac{1}{N^2}\langle \mathrm{tr}XX\mathrm{tr}XXXX \rangle \end{array}\right. \longleftrightarrow \langle x^n p^m \rangle$$

数値コスト大

Large-N factorization
(注 MQMでは基底状態のみ満たす.)

$$\frac{1}{N^2}\langle \mathrm{tr}XX \rangle \langle \mathrm{tr}XXXX \rangle + O(1/N^2)$$

数値Bootstrapの制限が
Large-Nでずっと強くなる.

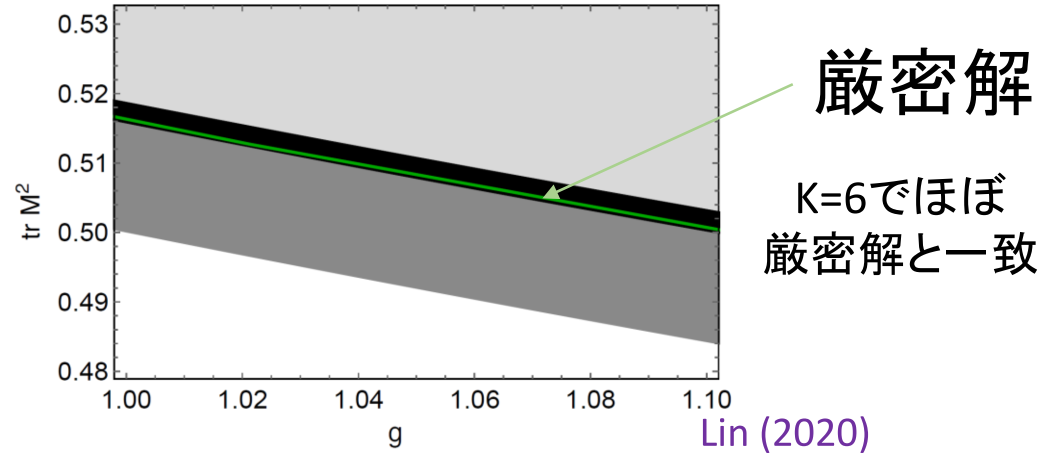
1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

example) 0dim Matrix Model

$$\langle \mathrm{tr} M^n \rangle = \int dM e^{-\mathrm{tr} V(M)} \mathrm{tr} M^n$$

$$V(M) = \frac{1}{2} M^2 + \frac{g}{4} M^4$$

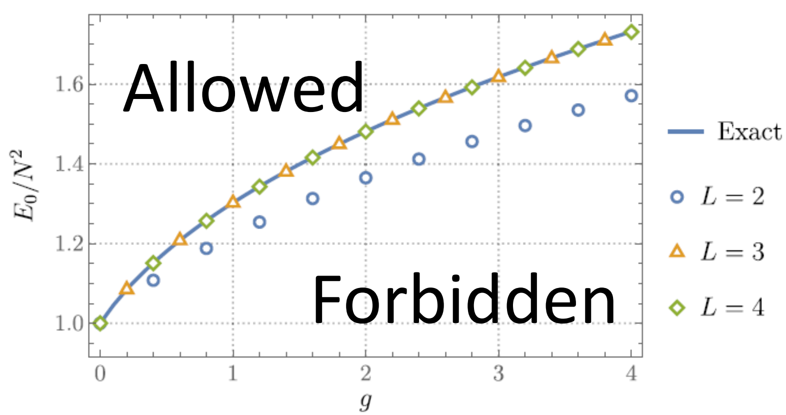


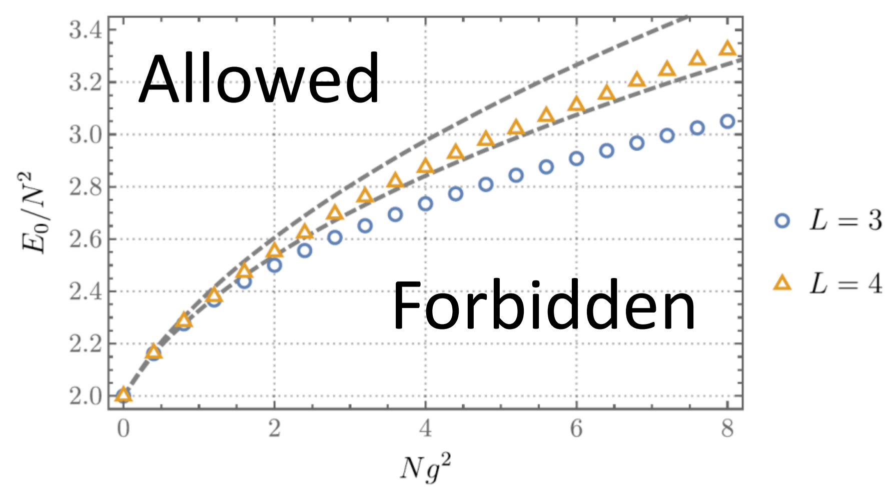
Lin (2020)

example) 1dim Matrix Quantum Mechanics: 基底エネルギー

$$H = \mathrm{tr}\, P^2 + \mathrm{tr}\, X^2 + \frac{g}{N} \mathrm{tr}\, X^4$$

$$H = \mathrm{tr}\left\{ P_X^2 + P_Y^2 + m^2 (X^2 + Y^2) - g^2 [X, Y]^2 \right\}$$





Figures in Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

1. Review of Bootstrap Approach

Anderson-Kruczenski (2016), Lin (2020)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

コメント1: 数値コスト

→ Kを大きくしても精度が上がる保証がない.

Single Matrix model (0dim) < 1 dim QM << 2 dim QM << Multi Matrix Models, MQM

K=O(10)	K=O(10)	K=O(10)	K=O(100)~
$O=\mathrm{tr}M^n$	$O=x^np^m$	$O=x^kp_x^ly^mp_y^n$	$O=\mathrm{tr}ABAAB\cdots$ $O=\mathrm{tr}XXPXX\cdots$

コメント2: 数値アルゴリズム

$M\succeq 0$ を満たす最小の*E*は?

Positive Semi-definite Matrix problem (半正定値計画問題)


WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

Main page
Contents
Current events
Random article
About Wikipedia
Contact us
Donate

Article Talk

Semidefinite programming

From Wikipedia, the free encyclopedia

Semidefinite programming (**SDP**) is a subfield of convex optimization concerned wi
the intersection of the cone of positive semidefinite matrices with an affine space, i.e.

Semidefinite programming is a relatively new field of optimization which is of growing
modeled or approximated as semidefinite programming problems. In automatic contr
and can be efficiently solved by interior point methods. All linear programs can be exp
Semidefinite programming has been used in the optimization of complex systems. In

実は「最適化問題」で重要な1分野
→ 結構早いアルゴリズムが多い

Mathematicaでもver12から
"SemidefiniteOptimization"
を使用可能.

FindMinimumで1時間かかる問題が
数十秒で終わったりする.

Anderson-Kruczenski (2016): GWW model, Lattice gauge theroy
Lin (2020), Kazakov-Zheng (2021): 0dim matrix models
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020): 1dim QM, Matrix quantum mechanics

数値Bootstrap法:

- ✓ 近年提唱された新しい数値解析の手法.
- ✓ これまで0次元や1次元の行列模型や量子力学に適応.
- ✓ Schwinger-Dyson**方程式**/Heisenberg**方程式** + **確率分布の正定値性** を解く

Monte-Carloとの比較 → MCと相補的な関係

	Monte Carlo	Bootstrap	
厳密解	NG	広い意味でOK	Sec.1
N = ∞	NG	OK	
finite-N	OK	Hard	
カノニカル分布	OK	NG	Sec.2
ミクロカノニカル	NG	Partially OK	
基底状態(T=0)	Hard	OK	
θ-term	Very Hard	Partially OK	Sec.3

Sec.2 熱平衡状態

2. 熱平衡状態

Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

(グランド)カノニカルアンサンブル

$$\langle O\rangle_\beta = \sum \langle n|e^{-\beta H}O|n\rangle$$

$$\left(\langle O\rangle_{\beta,\mu} = \sum \langle n|e^{-\beta(H-\mu\hat{Q})}O|n\rangle\right)$$

Q. この期待値の満たす条件は?

エネルギー固有状態

- $M \succeq 0$
- $\langle O^\dagger\rangle = \langle O\rangle^*$
- $\langle HO\rangle = \langle OH\rangle = E\langle O\rangle$ (Finite N)
- $\langle [H,O]\rangle = 0$
- Symmetries $\langle \mathrm{tr}XX\rangle = \langle \mathrm{tr}YY\rangle$
- $[P_{ij}, X_{kl}] = -\frac{i}{N}\delta_{il}\delta_{jk}$
- $\langle \mathrm{tr}O_1\mathrm{tr}O_2\rangle = \langle \mathrm{tr}O_1\rangle\langle \mathrm{tr}O_2\rangle$ (large-N,基底)

熱平衡状態

- $M \succeq 0$
- $\langle O^\dagger\rangle_\beta = \langle O\rangle_\beta^*$
- $\cancel{\langle HO\rangle = \langle OH\rangle = E\langle O\rangle}$
- $\langle [H,O]\rangle_\beta = 0$
- Symmetries $\langle \mathrm{tr}XX\rangle_\beta = \langle \mathrm{tr}YY\rangle_\beta$
- $[P_{ij}, X_{kl}] = -\frac{i}{N}\delta_{il}\delta_{jk}$
- $\langle \mathrm{tr}O_1\mathrm{tr}O_2\rangle_\beta = \langle \mathrm{tr}O_1\rangle_\beta\langle \mathrm{tr}O_2\rangle_\beta$

  中心極限定理(?)
- New! $\frac{\partial}{\partial\beta}\langle O\rangle_\beta = E(\beta)\langle O\rangle_\beta - \langle HO\rangle_\beta$

$\longrightarrow$ 微分方程式は不等式と相性が悪くほぼ使えない.

$\longrightarrow$ 「温度」の情報をBootstrapに入れられない.

2. 熱平衡状態

Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

(グランド)カノニカルアンサンブル

$$\langle O\rangle_\beta = \sum \langle n|e^{-\beta H}O|n\rangle$$

Q.

cf. Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH)

量子多体系: $\langle O\rangle_\beta \simeq \langle O\rangle_E \simeq \langle E|O|E\rangle$

canonical ensemble

$\langle H\rangle_\beta = E$

Micro-canonical ensemble

Any energy eigenstate

「エネルギー固有状態」と「熱平衡状態」はほぼ等価.
→ 物理量の期待値から両者を区別できないのは自然.

• New! $\frac{\partial}{\partial\beta}\langle O\rangle_\beta = E(\beta)\langle O\rangle_\beta - \langle HO\rangle_\beta$

⟶ 微分方程式は不等式と相性が悪くほぼ使えない.

⟶ 「温度」の情報をBootstrapに入れられない.

2. 熱平衡状態

Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

(グランド)カノニカルアンサンブル

$$\langle O\rangle_\beta = \sum \langle n|e^{-\beta H}O|n\rangle$$

$$\left(\langle O\rangle_{\beta,\mu} = \sum \langle n|e^{-\beta(H-\mu\hat{Q})}O|n\rangle\right)$$

Q. この期待値の満たす条件は?

エネルギー固有状態

- $M \succeq 0$
- $\langle O^\dagger\rangle = \langle O\rangle^*$
- $\langle HO\rangle = \langle OH\rangle = E\langle O\rangle$ (Finite N)
- $\langle [H,O]\rangle = 0$
- Symmetries $\langle \mathrm{tr}XX\rangle = \langle \mathrm{tr}YY\rangle$
- $[P_{ij}, X_{kl}] = -\frac{i}{N}\delta_{il}\delta_{jk}$
- $\langle \mathrm{tr}O_1 \mathrm{tr}O_2\rangle = \langle \mathrm{tr}O_1\rangle\langle \mathrm{tr}O_2\rangle$ (large-N,基底)

熱平衡状態

- $M \succeq 0$
- $\langle O^\dagger\rangle_\beta = \langle O\rangle_\beta^*$
- $\cancel{\langle HO\rangle = \langle OH\rangle = E\langle O\rangle}$
- $\langle [H,O]\rangle_\beta = 0$
- Symmetries $\langle \mathrm{tr}XX\rangle_\beta = \langle \mathrm{tr}YY\rangle_\beta$
- $[P_{ij}, X_{kl}] = -\frac{i}{N}\delta_{il}\delta_{jk}$
- $\underline{\langle \mathrm{tr}O_1 \mathrm{tr}O_2\rangle_\beta = \langle \mathrm{tr}O_1\rangle_\beta\langle \mathrm{tr}O_2\rangle_\beta}$

  中心極限定理(?)
- New! $\frac{\partial}{\partial\beta}\langle O\rangle_\beta = E(\beta)\langle O\rangle_\beta - \langle HO\rangle_\beta$

観測量に温度依存性が
あらわに出現しないのは自然

⟶ 微分方程式は不等式と相性が悪くほぼ使えない.

⟶ 「温度」の情報をBootstrapに入れられない.

2. 熱平衡状態

Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

(グランド)カノニカルアンサンブル

$$\langle O\rangle_\beta = \sum \langle n|e^{-\beta H} O|n\rangle$$

$$\left(\langle O\rangle_{\beta,\mu} = \sum \langle n|e^{-\beta(H-\mu\hat{Q})} O|n\rangle\right)$$

Q. この期待値の満たす条件は?

温度依存性はあきらめ,

$$\langle H\rangle_\beta = E$$

$$\left(\langle \hat{Q}\rangle_{\beta,\mu} = Q\right)$$

という条件を課し,
micro-canonicalアンサンブル
として熱平衡状態を評価する.

観測量に温度依存性が
あらわに出現しないのは自然

熱平衡状態

- $M \succeq 0$
- $\langle O^\dagger\rangle_\beta = \langle O\rangle_\beta^*$
- $\cancel{\langle HO\rangle = \langle OH\rangle = E\langle O\rangle}$
- $\langle [H,O]\rangle_\beta = 0$
- Symmetries $\langle \mathrm{tr}XX\rangle_\beta = \langle \mathrm{tr}YY\rangle_\beta$
- $[P_{ij}, X_{kl}] = -\frac{i}{N}\delta_{il}\delta_{jk}$
- $\underline{\langle \mathrm{tr}O_1 \mathrm{tr}O_2\rangle_\beta = \langle \mathrm{tr}O_1\rangle_\beta \langle \mathrm{tr}O_2\rangle_\beta}$

  中心極限定理(?)
- New! $\cancel{\frac{\partial}{\partial\beta}\langle O\rangle_\beta = E(\beta)\langle O\rangle_\beta - \langle HO\rangle_\beta}$

→ 微分方程式は不等式と相性が悪くほぼ使えない.

→ 「温度」の情報をBootstrapに入れられない.

2. 熱平衡状態

Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

(グランド)カノニカルアンサンブル

$$\langle O \rangle_\beta = \sum \langle n | e^{-\beta H} O | n \rangle$$

$$\left(\langle O \rangle_{\beta,\mu} = \sum \langle n | e^{-\beta (H - \mu \hat{Q})} O | n \rangle \right)$$

Q. この期待値の満たす条件は?

温度依存性はあきらめ,

$$\langle H \rangle_\beta = E$$

$$\left(\langle \hat{Q} \rangle_{\beta,\mu} = Q \right)$$

という条件を課し,

micro-canonicalアンサンブル

として熱平衡状態を評価する.

観測量に温度依存性が
あらわに出現しないのは自然

熱平衡状態

具体例

- 自由粒子 (量子力学)
- Bosonic BFSS at J=0
- Bosonic BFSS at J≠0 (符号問題)

- New! $\frac{\partial}{\partial \beta} \langle O \rangle_\beta = E(\beta) \langle O \rangle_\beta - \langle HO \rangle_\beta$

→ 微分方程式は不等式と相性が悪くほぼ使えない.

→ 「温度」の情報をBootstrapに入れられない.

2. 熱平衡状態

Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

例1) 1次元自由ボーズ粒子

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

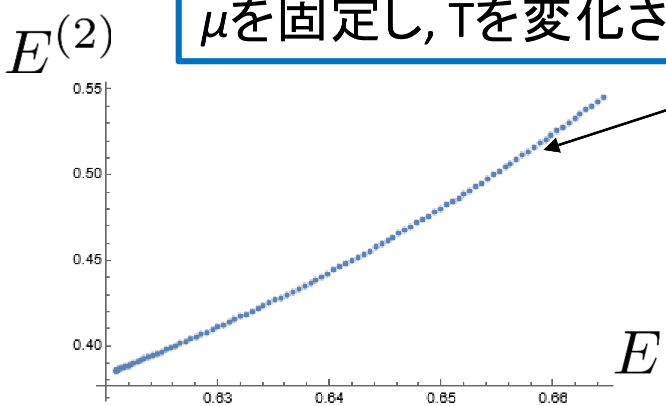
$$\langle O \rangle_{\beta,\mu} = \frac{1}{N(\beta,\mu)} \sum_n \frac{1}{e^{\beta(E_n-\mu)} - 1} \langle n|O|n \rangle$$

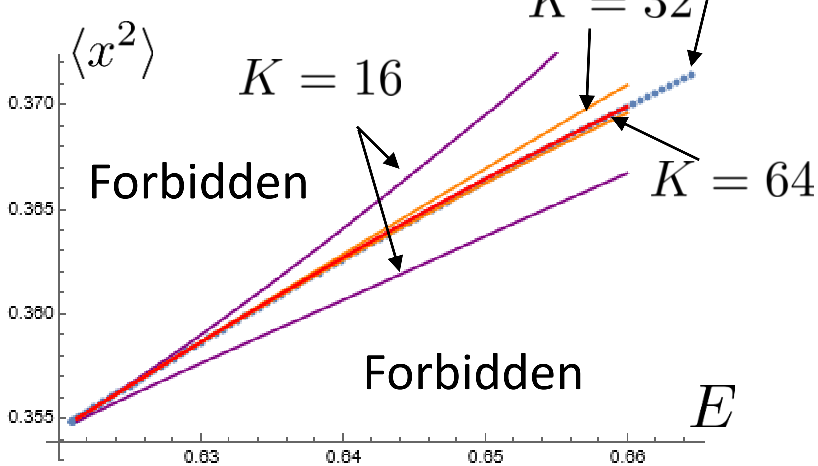
注: この系は無限個の保存量

$$E^{(m)} := \frac{1}{N(\beta,\mu)} \sum_n \frac{1}{e^{\beta(E_n-\mu)} \pm 1} (E_n)^m$$

暗に, β, μ 以外の無限個の化学ポテンシャルを全て0にしている.

数値的に固有値を求め
μを固定し, Tを変化させた解析





Bootstrapの解析

$$M \succeq 0$$

$$\begin{cases} \langle [H, O] \rangle_{\beta,\mu} = 0 \\ \langle 1 \rangle_{\beta,\mu} = 1 \\ \langle H \rangle_{\beta,\mu} = E \\ \langle H^2 \rangle_{\beta,\mu} = E^{(2)} \end{cases}$$

粒子1個あたりの期待値に規格化

無限個の保存量のうち3個だけ固定した

→ 数値解析と良い一致が見られる.

2. 熱平衡状態

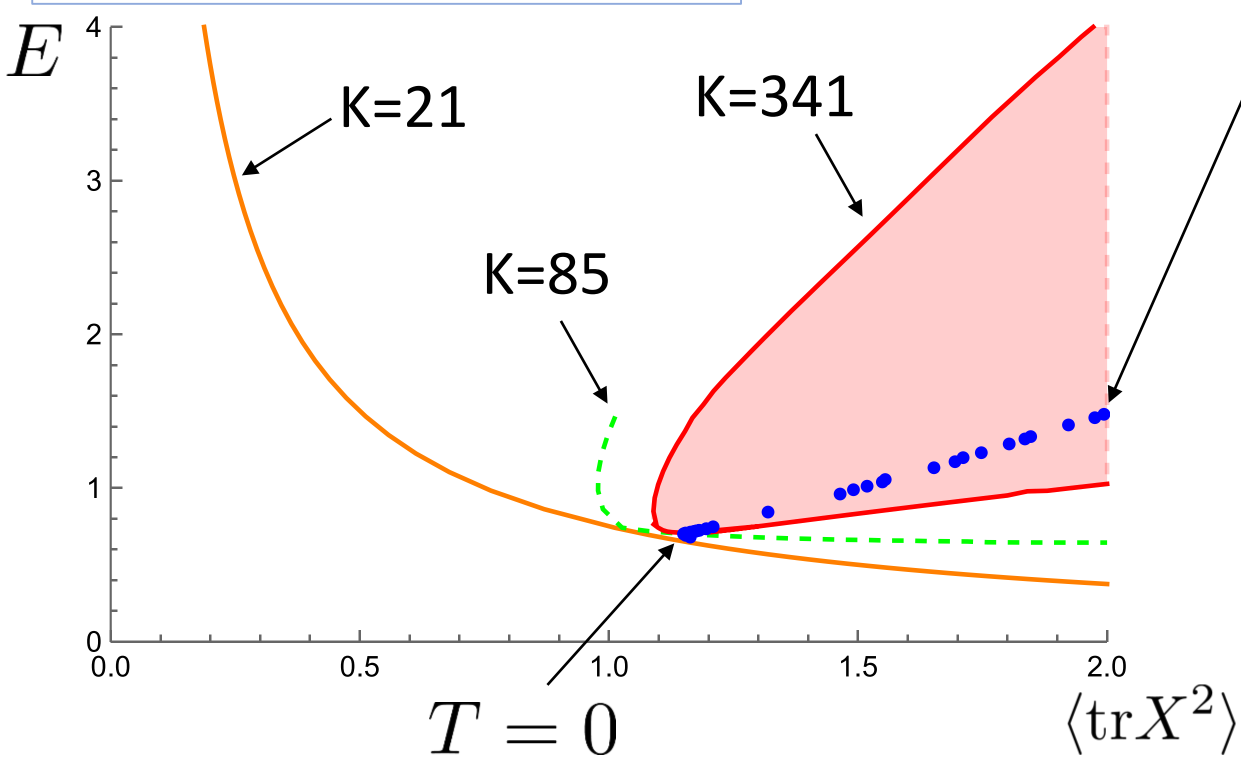
Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

例2) 有限温度 Bosonic BFSS matrix model
(Large-N reduction of D+1-dim YM to 1dim.)

Banks-Fischler-Shenker-Susskind (1996)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

$$H = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}P_I^2 - \sum_{I,J}\frac{1}{4}[X^I, X^J]^2\right) \qquad I, J = 1, \cdots, D$$

Preliminary result at D=2



モンテ·カルロ (N=32)
(東氏(摂南大)提供)

Aharony-Marsano-Minwalla-Wiseman 2002
Kawahara-Nishimura-Takeuchi 2007
Azuma-Morita-Takeuchi 2014

- 収束性がまだ悪い
- T=0はよく収束

2. 熱平衡状態

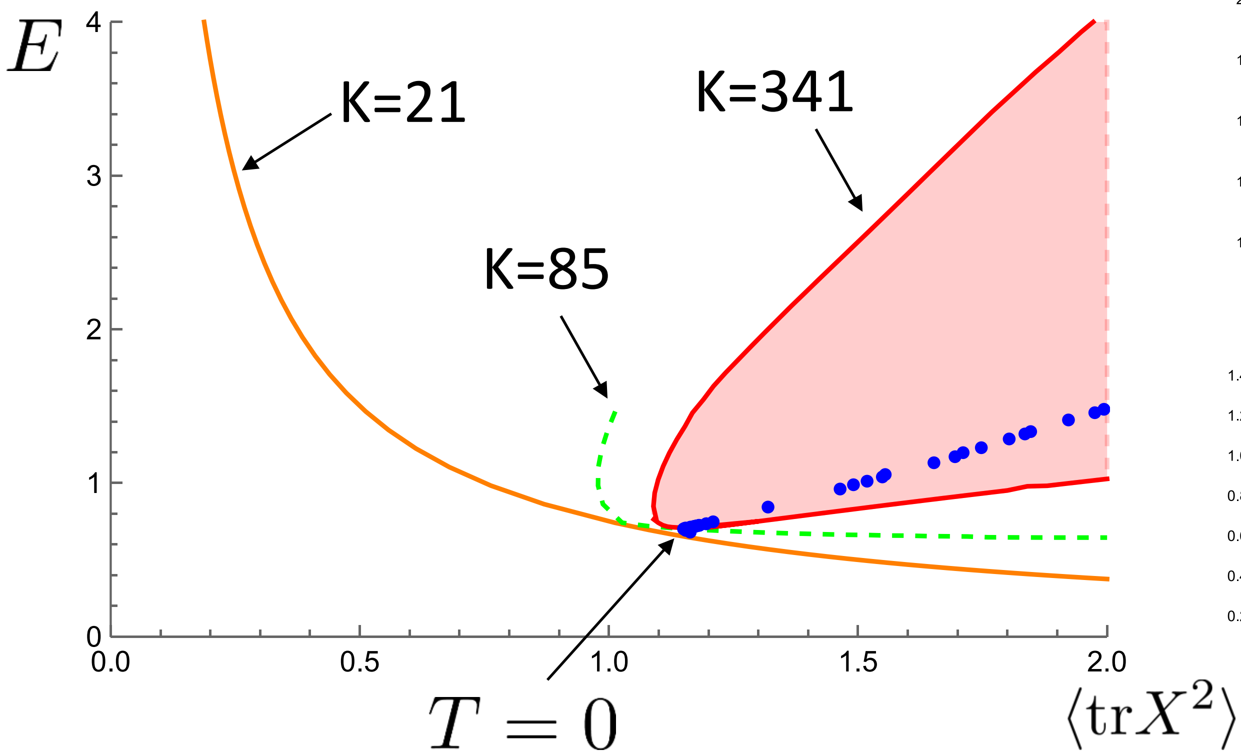
Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

例2) 有限温度 Bosonic BFSS matrix model
(Large-N reduction of D+1-dim YM to 1dim.)

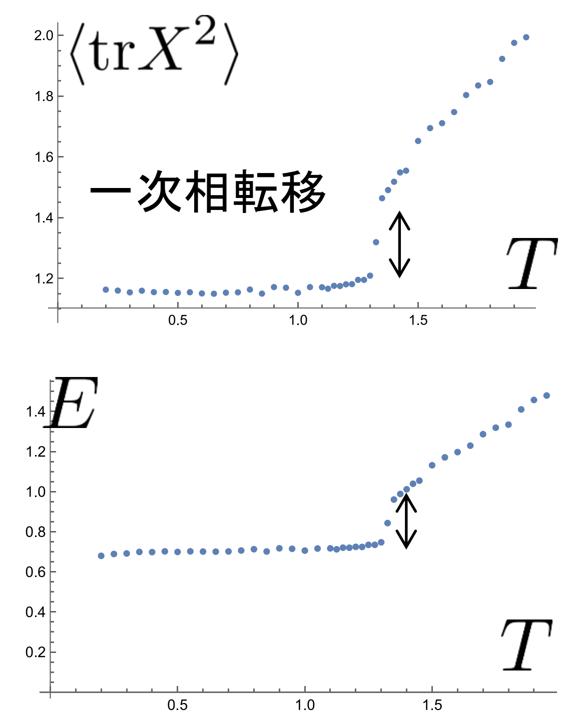
Banks-Fischler-Shenker-Susskind (1996)
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020)

$$H = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}P_I^2 - \sum_{I,J}\frac{1}{4}[X^I, X^J]^2\right) \qquad I, J = 1, \cdots, D$$

Preliminary result at D=2



モンテ·カルロ (N=32)

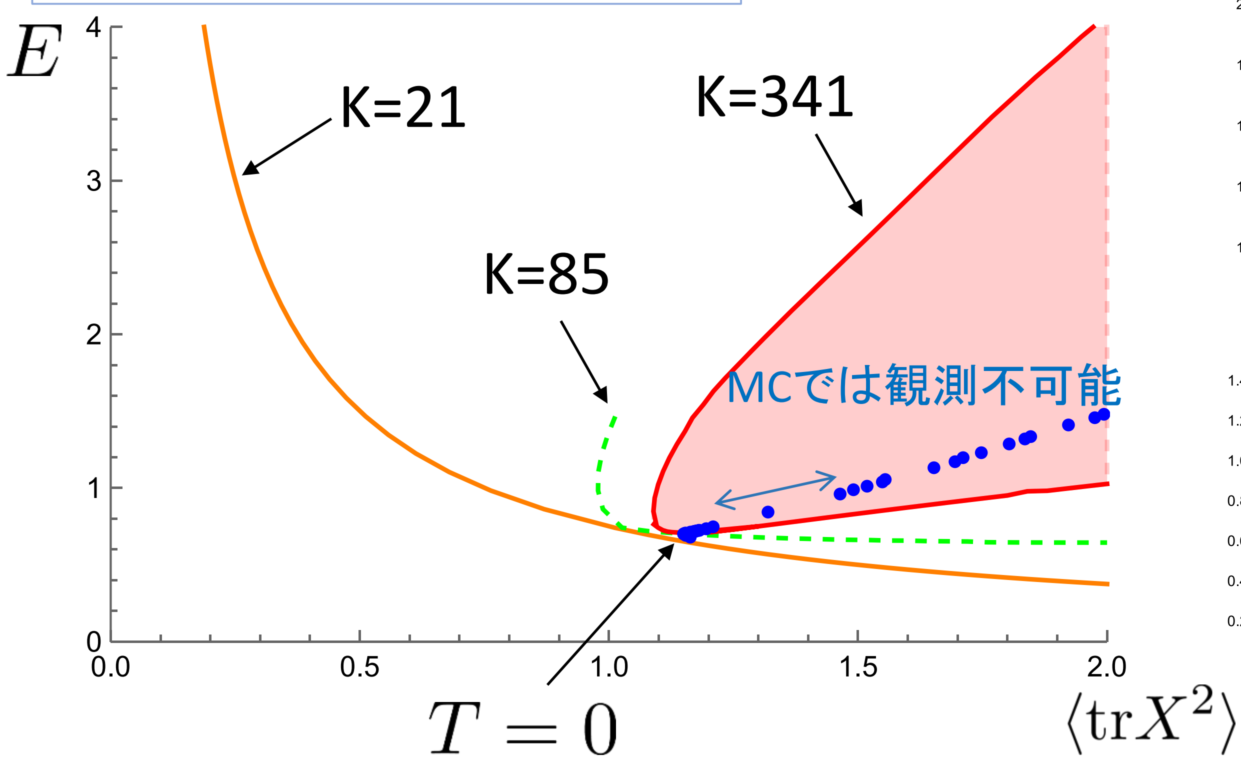


2. 熱平衡状態

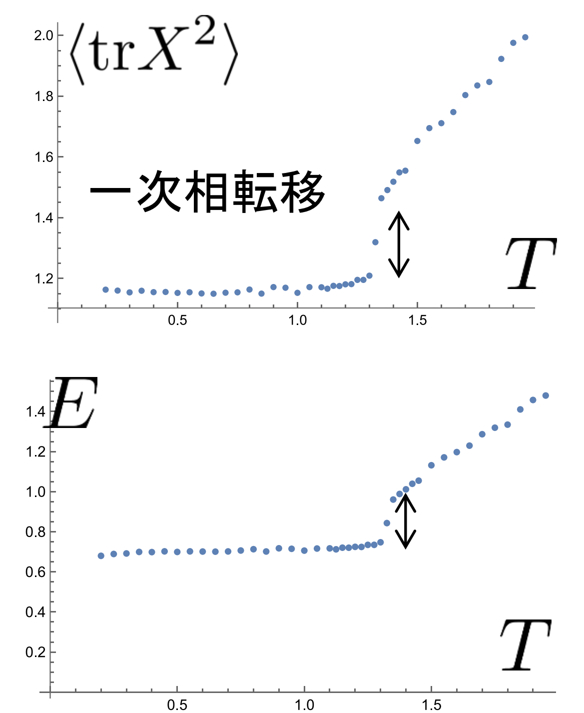
Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

Boostrap法の利点:
Micro-canonicalアンサンブルが調べられる(かも)

Preliminary result at D=2

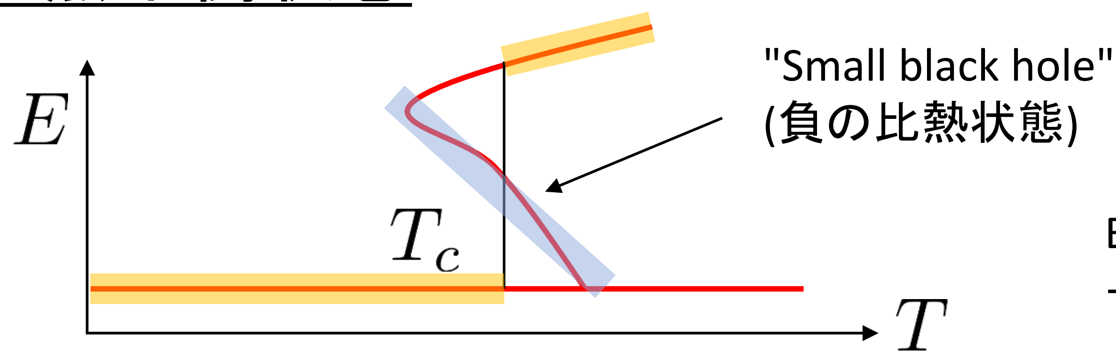


モンテ·カルロ (N=32)



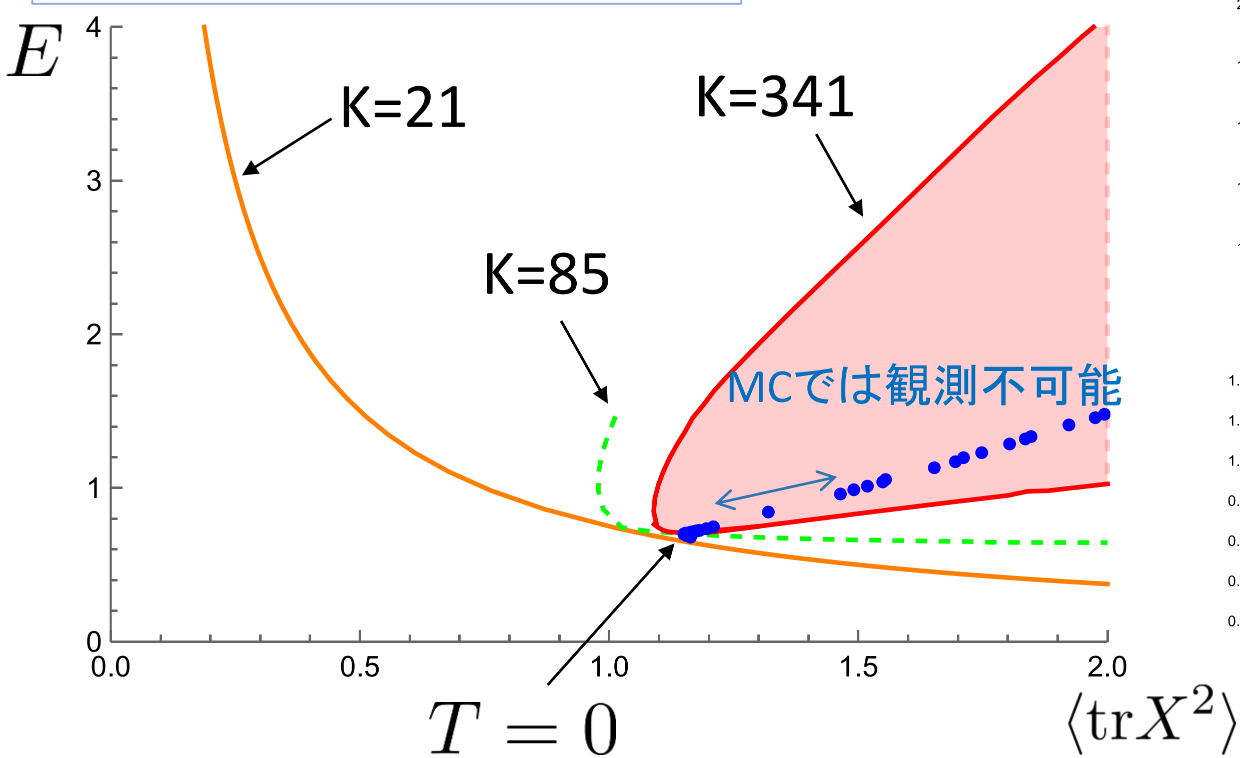
2. 熱平衡状態

Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

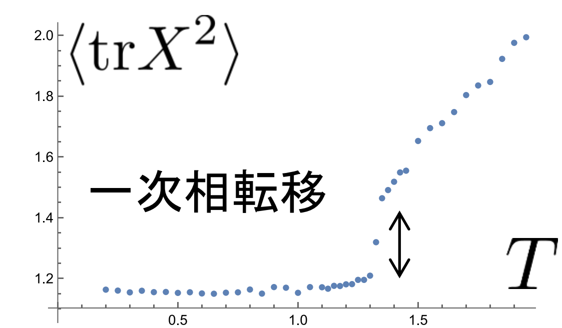


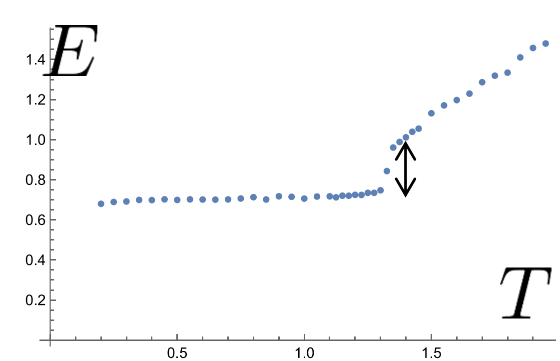
Bootstrapでは原理的に観測可能
→ 数値が収束すれば
興味深い物理が見えるかも.

Preliminary result at D=2



モンテ·カルロ (N=32)





2. 熱平衡状態

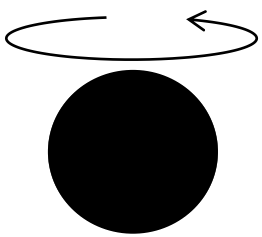
Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

例3) 有限温度 Bosonic BFSS matrix model with finite *J*

$$H = \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}P_I^2 - \sum_{I,J}\frac{1}{4}[X^I, X^J]^2\right)$$

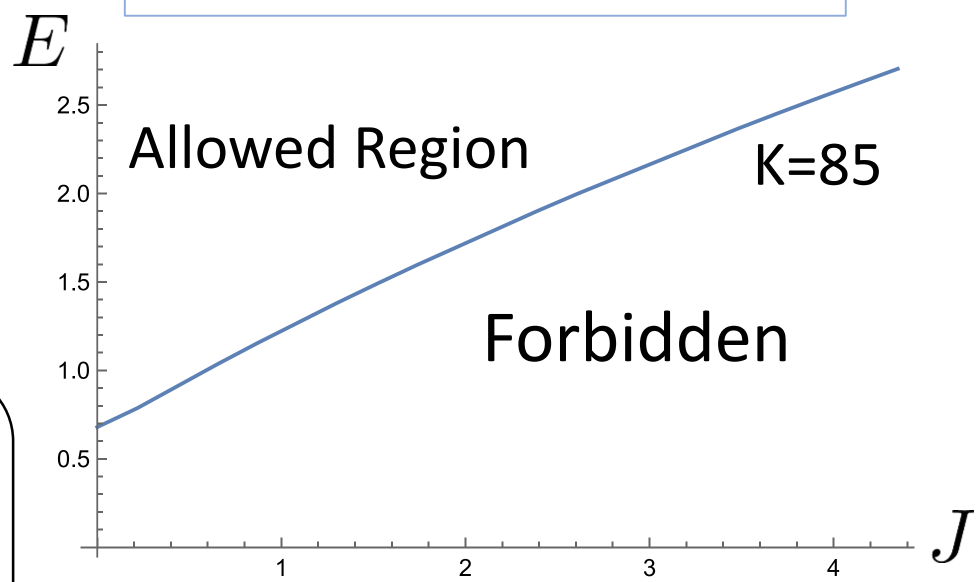
Angular momentum

$$J = \langle \mathrm{tr} X_1 P_2 - X_2 P_1 \rangle$$



cf. rotating black hole

Preliminary results at D=2



注) chemical potential

$$L = \mathrm{tr}\left(\underline{(D_t-\mu)Z^\dagger(D_t+\mu)Z} - \sum_{I,J=1}^{2}\frac{1}{4}[X^I, X^J]^2\right)$$

→ 符号問題

$$Z = (X_1 + iX_2)/\sqrt{2}$$

2. 熱平衡状態

Aikawa-Morita-Yoshimura on going work

○ その他の量

Entropy, Temperature, Free energy?

Bootstrap only determines the values of $\langle E|O|E\rangle$.

→ ??

Polyakov loop?

→ ??

Real time evolution?

Heisenberg equation: $$i\hbar\langle\dot{O}\rangle = \langle[O,H]\rangle$$

"Time" enters only through derivatives.

→ Difficult...

Anderson-Kruczenski (2016): GWW model, Lattice gauge theroy
Lin (2020), Kazakov-Zheng (2021): 0dim matrix models
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020): 1dim QM, Matrix quantum mechanics

数値Bootstrap法:

- ✓ 近年提唱された新しい数値解析の手法.
- ✓ これまで0次元や1次元の行列模型や量子力学に適応.
- ✓ Schwinger-Dyson方程式/Heisenberg方程式 + 確率分布の正定値性 を解く

Monte-Carloとの比較 → MCと相補的な関係

	Monte Carlo	Bootstrap	
厳密解	NG	広い意味でOK	Sec.1
$N = \infty$	NG	OK	
finite-N	OK	Hard	
カノニカル分布	OK	NG	Sec.2
ミクロカノニカル	NG	Partially OK	
基底状態(T=0)	Hard	OK	
θ-term	Very Hard	Partially OK	Sec.3

3. θ-term

3. θ-term

Aikawa-Morita-Yoshimura (2021)

θ-term ?

$$\frac{N}{\lambda}\int d^4x \mathrm{tr}F^2 + \underline{\theta\int \mathrm{tr}F\wedge F} \qquad (0\le\theta<2\pi)$$

ユークリッド化で純虚数→ sign problem in MC

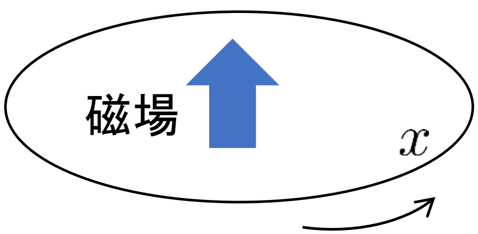
4次元YMはまだきついので量子力学のtoy model (S1上の量子力学):

$$S(\theta) = \int dt\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - V(x)\right) - \underline{\frac{\theta}{2\pi}\int dt\dot{x}}, \qquad x = x + 2\pi$$

$$V(x) = a(1-\cos(x)).$$

ユークリッド化で純虚数
→ sign problem in MC

cf. AB効果



ゲージポテンシャル

$$A_x = \frac{\theta}{2\pi}$$

$$\longrightarrow \quad H(\theta) := \frac{1}{2}\left(p + \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - a(\cos(x) - 1)$$

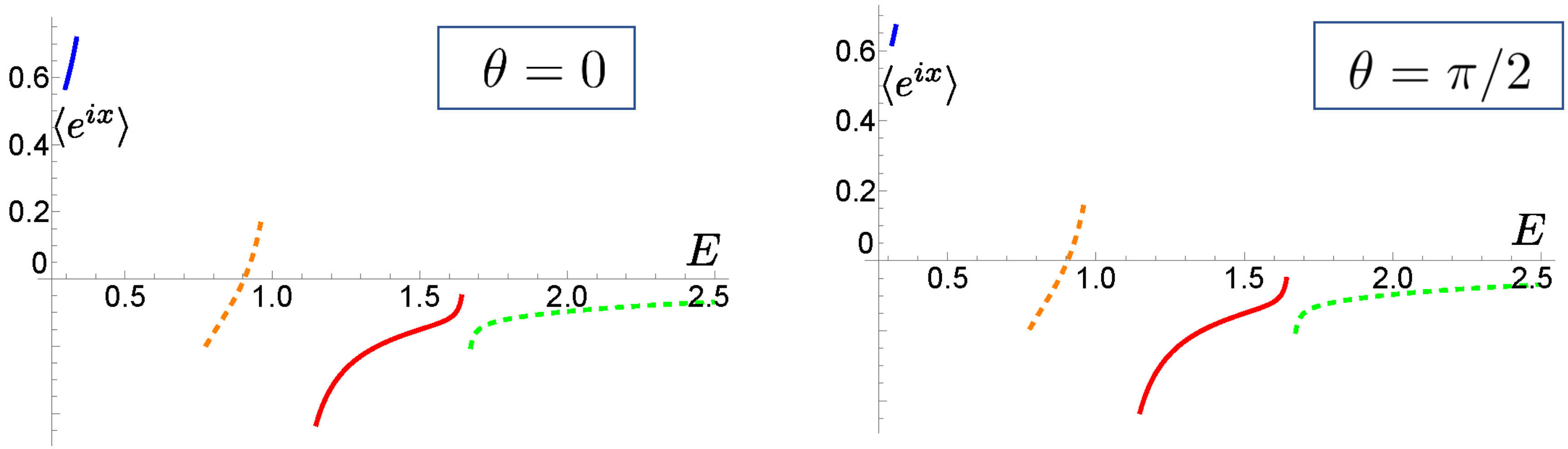
Bootstrap法が適応できる.

3. θ-term

Aikawa-Morita-Yoshimura (2021)

$$H(\theta) := \frac{1}{2}\left(p + \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - a(\cos(x) - 1)$$

数値Bootstrapの結果:



- Bootstrapの結果が「線」に収束
  → 固有状態なら「点」に収束するはず?

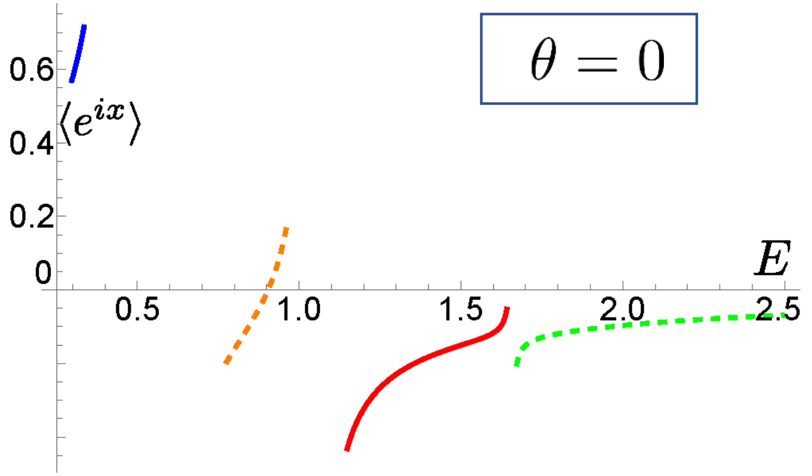
- なぜか結果がθにほとんど依らない.

3. θ-term

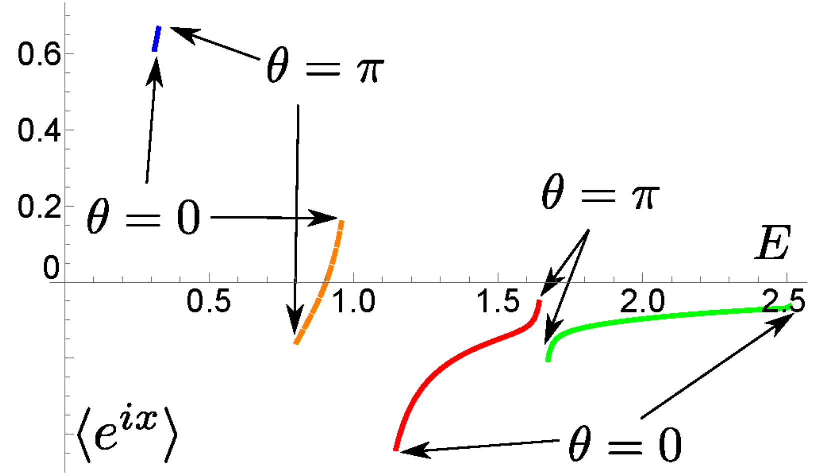
Aikawa-Morita-Yoshimura (2021)

$$H(\theta) := \frac{1}{2}\left(p + \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - a(\cos(x) - 1)$$

数値Bootstrapの結果:



シュレディンガー方程式を直接解いた結果:



- Bootstrapの結果が「線」に収束
  → 固有状態なら「点」に収束するはず?

- なぜか結果がθにほとんど依らない.

全てのθの結果が, Bootstrapでは各θに対して一度に得られてしまった. (ちょっと悪い結果)

3. θ-term

Aikawa-Morita-Yoshimura (2021)

$$H(\theta) := \frac{1}{2}\left(p + \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - a(\cos(x) - 1)$$

何が起きたのか?

$$H(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2\pi}x} H(0) e^{i\frac{\theta}{2\pi}x}$$

$$\begin{cases} H(\theta)\psi(x) = E\psi(x) \\ \psi(x+2\pi) = \psi(x) \end{cases} \quad \xleftrightarrow[\text{gauge equivalent}]{} \quad \begin{cases} H(0)\psi(x) = E\psi(x) \\ \psi(x+2\pi) = e^{i\theta}\psi(x) \end{cases}$$

→ 波動関数の周期性を決めなければ,
ハミルトニアンのθの値は定まらない.
(ゲージ固定が必要)

Bootstrap法では$\langle p \rangle$, $\langle e^{ix} \rangle$, E と言った観測量の取り得る値の範囲を調べた.
→ 波動関数の周期性の情報が入っていない.
→ 全てのθに対応した結果が得られた.

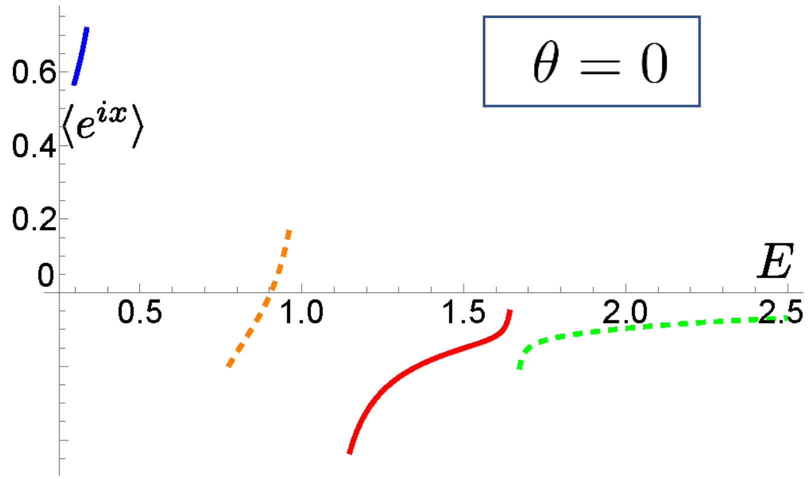
3. θ-term

Aikawa-Morita-Yoshimura (2021)

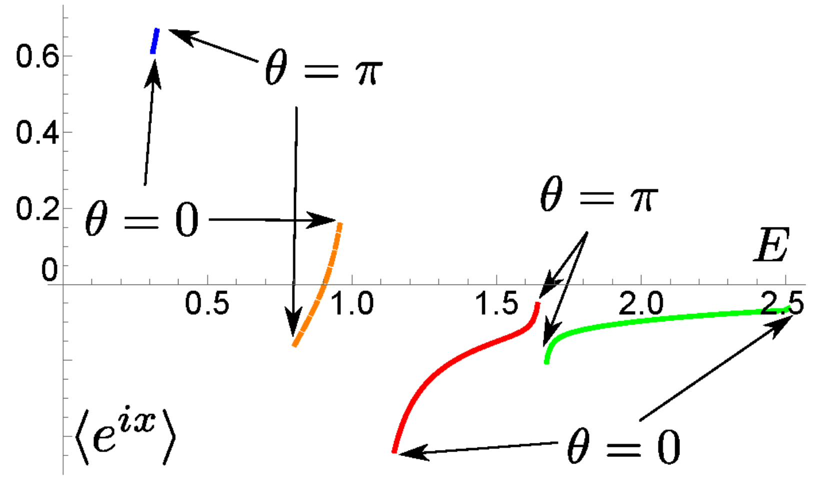
$$H(\theta) := \frac{1}{2}\left(p + \frac{\theta}{2\pi}\right)^2 - a(\cos(x) - 1)$$

→ これはあまりうれしくない結果

数値Bootstrapの結果:



シュレディンガー方程式を直接解いた結果:



- Bootstrapでは $E(\theta)$ などは計算できない.
- ただし $\langle e^{ix} \rangle (E)$ などの物理量の相関は求まる.
- $\theta = 0, \pi$ は特別で対称性から $E(\theta = 0),\ E(\theta = \pi)$ など求まる.

注) Bootstrapで波動関数の周期性を求める試みもある.

$\langle e^{i2\pi p} \rangle$: 周期性を読み取る演算子

Tchoumakov-Florens (2021)

Summary

数値Bootstrap法:

Anderson-Kruczenski (2016): GWW model, Lattice gauge theroy
Lin (2020), Kazakov-Zheng (2021): 0dim matrix models
Han-Hartnoll-Kruthoff (2020): 1dim QM, Matrix quantum mechanics

- ✓ 近年提唱された新しい数値解析の手法.
- ✓ これまで0次元や1次元の行列模型や量子力学に適応.
- ✓ Schwinger-Dyson方程式/Heisenberg方程式 + 確率分布の正定値性 を解く

Monte-Carloとの比較 → MCと相補的な関係

	Monte Carlo	Bootstrap
厳密解	NG	広い意味でOK
N = ∞	NG	OK
finite-N	OK	Hard
カノニカル分布	OK	NG
ミクロカノニカル	NG	Partially OK
基底状態(T=0)	Hard	OK
θ-term	Very Hard	Partially OK

Summary

- Bootstrap法は, かなりクセのある数値解析
- 示強性の量が苦手. (温度,化学ポテンシャル,θ)
- 示量性の量は得意.

Future Direction

- Improve Numerical Analysis Kazakov-Zheng (2021)
- Canonical-ensemble, real time → Need some breakthrough
- Many applications:
  - ✓ Small black holes, Rotating black holes, (black rings?)
  - ✓ BFSS matrix theory (符号問題) Anagnostopoulos-Hanada -Nishimura-Takeuchi (2008)
  - ✓ IKKT matrix model (符号問題) Kim-Nishimura-Tsuchiya (2012)
  - ✓ Higher dimensions? Lattice gauge theories? Anderson-Kruczenski (2016)