

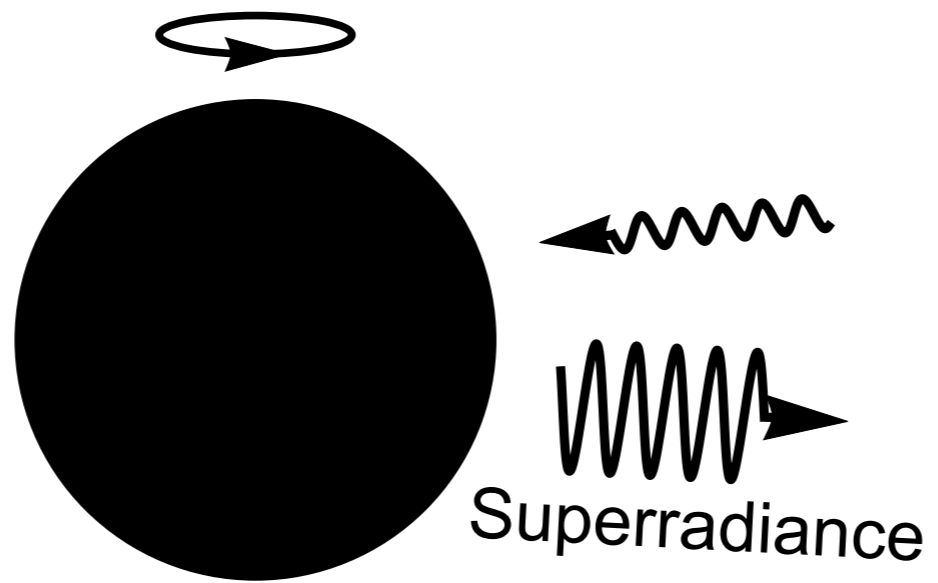
Hairy black resonators in AdS₅

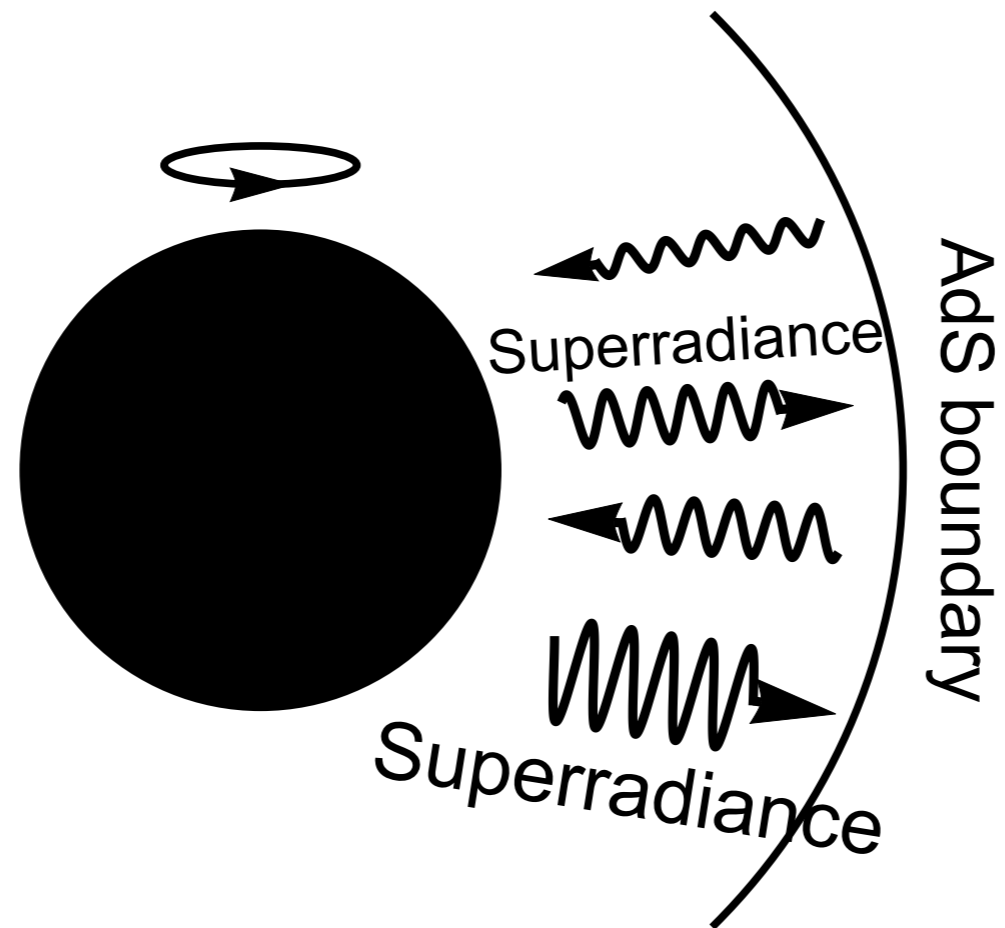
石井貴昭 (京大素論)

Takaaki Ishii

arXiv:2101.06325 w/ 村田佳樹, Jorge E. Santos, Benson Way

(参考 : arXiv:1810.11089, 1910.03234, 2005.01201)





Superradiant instability
(超放射不安定性)

目次

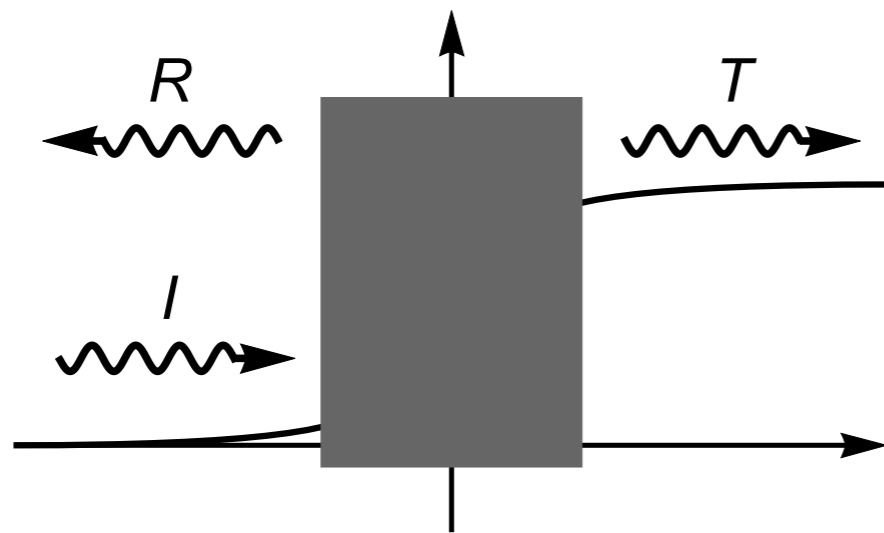
1. Superradiant instability (5 pages)
2. Black resonator in AdS_5 (9 pages)
3. Hairy black hole/resonator (8 pages)

目次

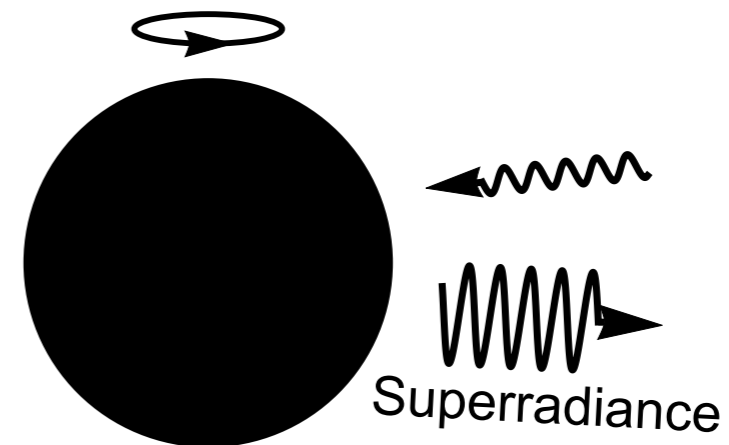
1. Superradiant instability (5 pages)
2. Black resonator in AdS_5 (9 pages)
3. Hairy black hole/resonator (8 pages)

Superradiance

Superradiance(超放射): ポテンシャルとの散乱で反射波の振幅が入射波より大きくなる



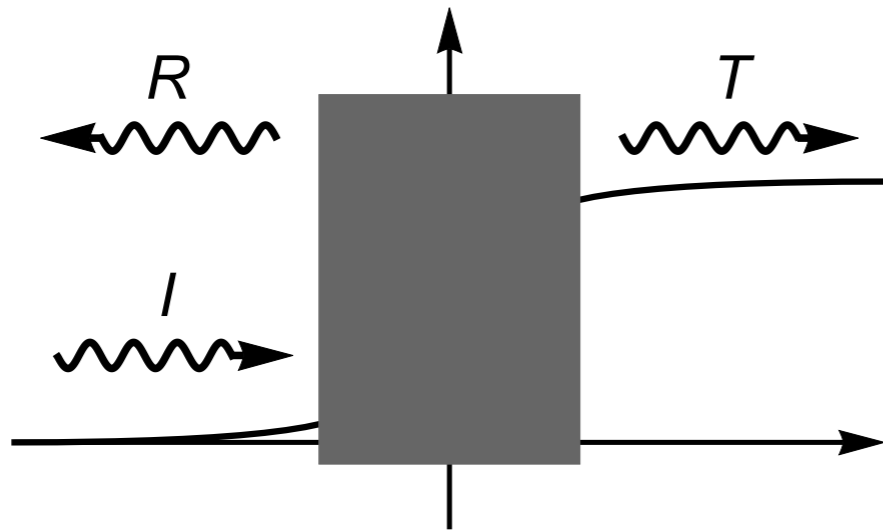
量子力学ポテンシャル
超放射がおこると $|R| > |I|$



回転するブラックホール
Rotational superradiance

例：1+1次元複素スカラー+背景ゲージ場

$x=-\infty$ から振動数 ω で入射する平面波を考える [Review: 1501.06570]



$$A_\mu = (A_t, 0)$$

$$A_t \rightarrow \begin{cases} 0 & (x \rightarrow -\infty) \\ V & (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

Klein-Gordon方程式を解いて $x \rightarrow \pm\infty$ での漸近解を求める

$$D^2\Phi = 0 \quad \text{where} \quad D_\mu\Phi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\Phi$$

$$A_\mu = (A_t, 0) \quad \Rightarrow \quad \partial_x^2\Phi - (\partial_t - ieA_t)^2\Phi = 0$$

$$\Phi \rightarrow e^{-i\omega t} \times \begin{cases} \mathcal{I} e^{i\omega x} + \mathcal{R} e^{-i\omega x} & (x \rightarrow -\infty) \\ \mathcal{T} e^{i(\omega - eV)x} & (x \rightarrow +\infty) \end{cases}$$

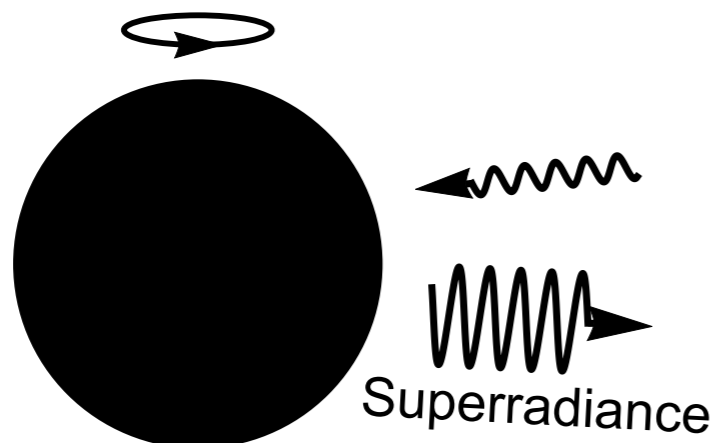
係数の間関係はWronskianから分かる

$$W = \Phi \partial_x \Phi^* - \Phi^* \partial_x \Phi \quad \text{which satisfies} \quad \partial_x W = 0$$

$$W|_{x=-\infty} = W|_{x=+\infty} \Rightarrow |\mathcal{R}|^2 = |\mathcal{I}|^2 - \frac{\omega - eV}{\omega} |\mathcal{T}|^2$$

$0 < \omega < eV$ について $|\mathcal{R}| > |\mathcal{I}| \rightarrow$ 反射波が増幅

Rotational superradiance: $0 < \omega < m\Omega$ の波が増幅



Ω : ブラックホールの角速度

m : 回転方向のモード量子数

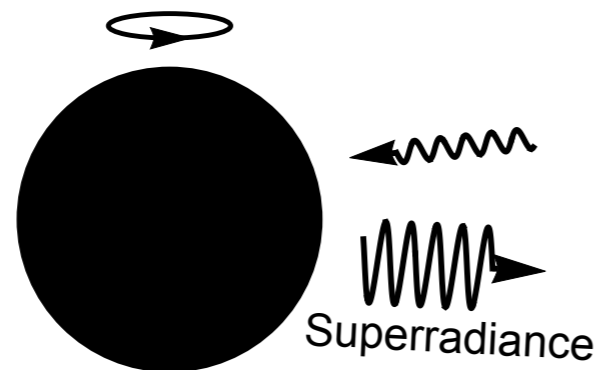
後々の都合で $\omega_{\text{new}} \equiv \omega - m\Omega$ とすると

$\omega_{\text{new}} = 0$ が増幅する/しないの境目

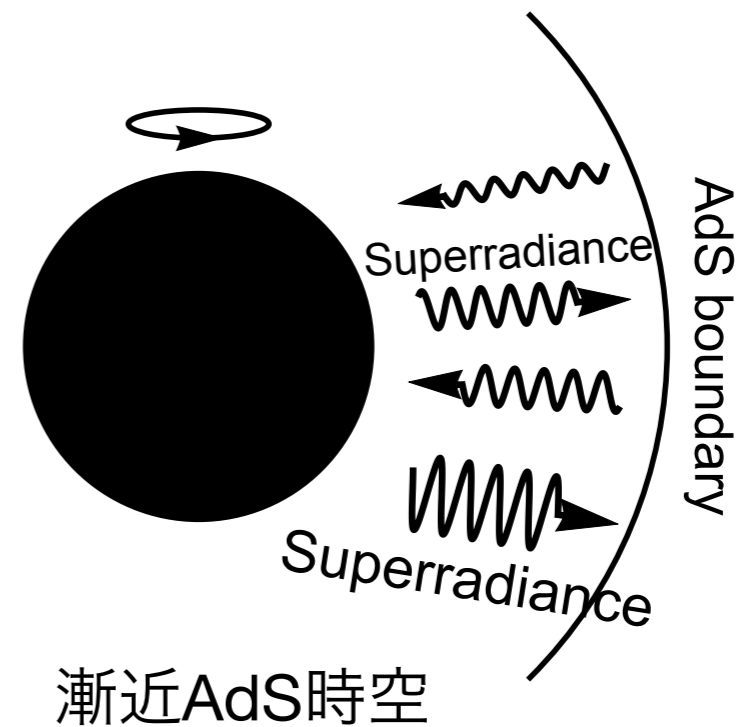
AdS superradiant instability

Anti de Sitter時空では波が時空に閉じ込められるために
superradiant instability(超放射不安定性)が起こりうる

[Hawking-Reall, Cardoso-Dias, Kunduri-Lucietti-Reall]



(我々の宇宙のように)漸近平坦だと
波が無限遠に飛び去ってオシマイ



漸近AdS時空

結果、定常回転の対称性が破れた**対称性の低い新しいブラックホール解**があると予想された(2005年くらい)

先行研究：AdS₄ black resonator

Black holes with a single Killing vector field:
black resonators

Óscar J. C. Dias,^{1,*} Jorge E. Santos,^{2,†} and Benson Way^{2,‡}

¹*STAG research centre and Mathematical Sciences, University of Southampton, UK*

²*DAMTP, Centre for Mathematical Sciences, University of Cambridge,
Wilberforce Road, Cambridge CB3 0WA, UK*

We numerically construct asymptotically anti-de Sitter (AdS) black holes in four dimensions that contain only a single Killing vector field. These solutions, which we coin *black resonators*, link

[1505.04793]

重力場の超放射不安定性から周期的に時間変動するブラックホールが作られ**black resonator**と名付けられた

しかし4次元時空で作られた例は複雑だった

このトーク：5次元を考えると見通しの良い解がある

目次

1. Superradiant instability (5 pages)
2. Black resonator in AdS_5 (9 pages)
3. Hairy black hole/resonator (8 pages)

Anti de Sitter時空

このセクション：5次元の漸近AdS Einstein重力

$$S = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda)$$

- ・ 負の宇宙項 $\Lambda = -6/L^2$ (以下では $L=1$ とする)
- ・ 無限遠($r=\infty$)は時間的な境界 ($R_{\text{time}} \times S^3$ とする)

例：“空っぽ”のglobal AdS

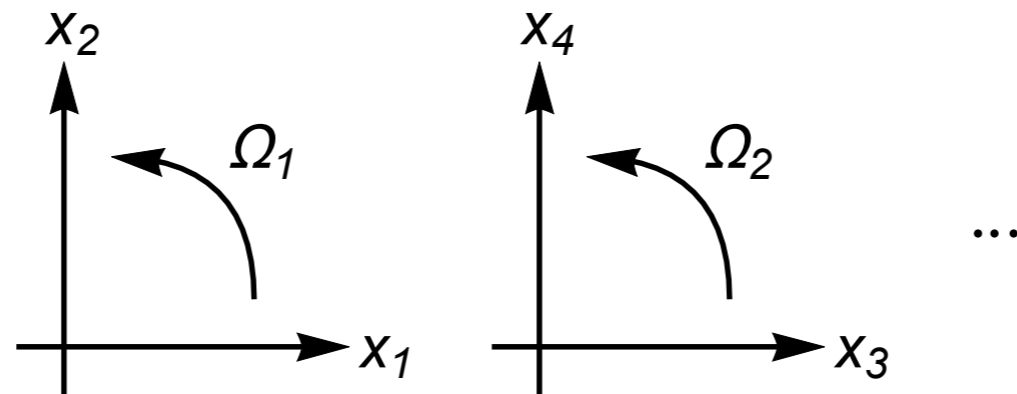
$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{L^2}} + r^2 d\Omega_3^2$$



Escher, Circle Limit III
(Wikipediaから引用)

高次元の回転ブラックホール

高次元($D \geq 5$)のブラックホールは複数の回転面があり、一般の場合の対称性は $R_{\text{time}} \times U(1) \times U(1) \times \dots$ である



- Kerr解($D=4$)の $D \geq 5$ への拡張は**Myers-Perry解**と呼ばれる
- $D=5$ だと回転が2つ(J_1, J_2)で対称性は $R_{\text{time}} \times U(1) \times U(1)$

$$ds^2 = - \frac{\Delta(1+r^2)}{\Sigma_1 \Sigma_2} dt^2 + \frac{\rho^2}{V-2M} d\tilde{r}^2 + \frac{2M}{\rho^2} \left(\frac{\Delta}{\Sigma_1 \Sigma_2} dt - \frac{a_1 \sin^2 \tilde{\theta}}{\Sigma_1} d\varphi_1 - \frac{a_2 \cos^2 \tilde{\theta}}{\Sigma_2} d\varphi_2 \right)^2$$

$$+ \frac{\rho^2}{\Delta} d\tilde{\theta}^2 + \frac{r^2 + a_1^2}{\Sigma_1} \sin^2 \tilde{\theta} d\varphi_1^2 + \frac{r^2 + a_2^2}{\Sigma_2} \cos^2 \tilde{\theta} d\varphi_2^2$$

5D MP(A)dS BH
cohomogeneity-2

5次元等角運動量MPAdS BH (1)

奇数次元で角運動量が等しい場合(5次元だと $J_1=J_2$)、
Myers-Perry解はcohomogeneity-1計量で書ける

$$ds^2 = -(1+r^2)f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)g(r)} + \frac{r^2}{4} \left[\underbrace{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}_{S^2} + \beta(r) \underbrace{(\sigma_3 + 2h(r)d\tau)^2}_{S^1 \text{ 回転方向}} \right]$$

$R_{\text{time}} \times U(1) \times U(1)$ が $R_{\text{time}} \times \mathbf{SU}(2) \times U(1)$ に拡大しており、角度依存性は $SU(2)$ 不変1形式 $\sigma_{1,2,3}$ に押し込められる

$$\sigma_1 = -\sin \chi d\theta + \cos \chi \sin \theta d\phi$$

$$\sigma_2 = \cos \chi d\theta + \sin \chi \sin \theta d\phi \quad (\theta, \phi, \chi: S^3 \text{のオイラー角})$$

$$\sigma_3 = d\chi + \cos \theta d\phi$$

U(1)対称性について $\chi \rightarrow \chi + \text{const.}$ で $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ は不変

5次元等角運動量MPAdS BH (2)

奇数次元で角運動量が等しい場合(5次元だと $J_1=J_2$)、
Myers-Perry解はcohomogeneity-1計量で書ける

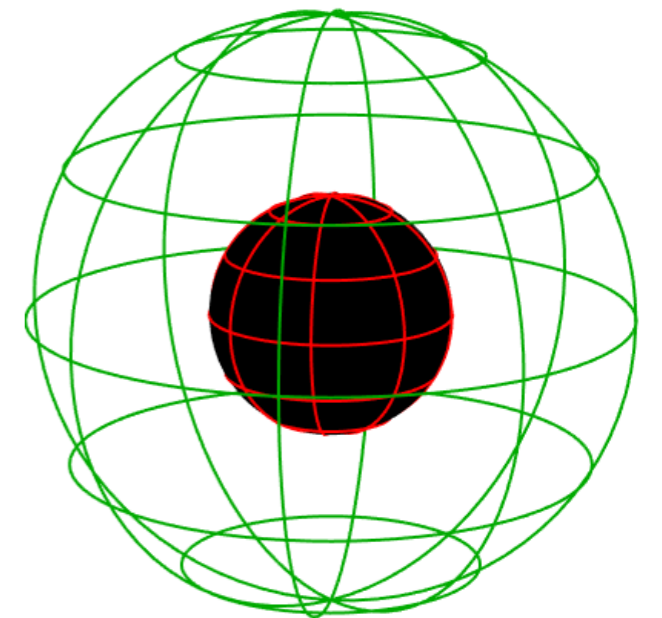
$$ds^2 = -(1+r^2)f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)g(r)} + \frac{r^2}{4} \left[\underbrace{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}_{S^2} + \beta(r) \underbrace{(\sigma_3 + 2h(r)d\tau)^2}_{S^1 \text{ 回転方向}} \right]$$

成分の非自明な部分は動径座標 r だけで書ける: $f(r), g(r), \dots$

$$f(r) = \frac{g(r)}{\beta(r)}, \quad g(r) = 1 - \frac{2\mu(1-a^2)}{r^2(1+r^2)} + \frac{2a^2\mu}{r^4(1+r^2)}$$
$$\beta(r) = 1 + \frac{2a^2\mu}{r^4}, \quad h(r) = \Omega - \frac{2\mu a}{r^4 + 2a^2\mu}$$

後々便利なようにRotating frame at infinityで書く

$$h(r_h) = 0, \quad h(\infty) = \Omega$$



5次元等角運動量MPAdS BH (3)

奇数次元で角運動量が等しい場合(5次元だと $J_1=J_2$)、
Myers-Perry解はcohomogeneity-1計量で書ける

$$ds^2 = -(1+r^2)f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)g(r)} + \frac{r^2}{4} \left[\underbrace{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}_{S^2} + \beta(r) \underbrace{(\sigma_3 + 2h(r)d\tau)^2}_{S^1 \text{ 回転方向}} \right]$$

ここで $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ の係数をずらす重力摂動がU(1)定常回転を破る

超放射不安定性を起こす： $\delta g_{\mu\nu} = \delta\alpha(r)e^{-i\omega\tau}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)$

[Murata 0812.0718]

なぜrotating frameが便利か

不安定性が起きる/起きないの境目で $\omega=0$ になる

→ τ 依存しない摂動になる

Cohomogeneity-1 black resonator

先程の摂動の非線形な拡張として、**U(1)対称性が破れた cohomogeneity-1 metric ansatz**を導入する

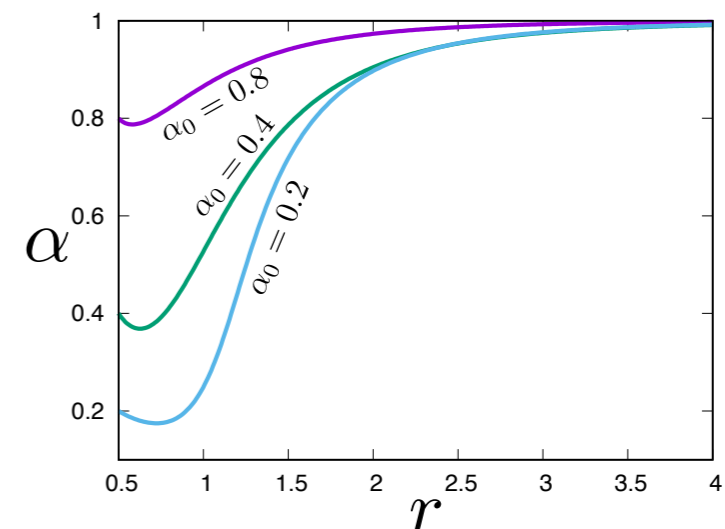
[TI-Murata]

$$ds^2 = -(1+r^2)f(r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)g(r)} + \frac{r^2}{4} \left[\alpha(r)\sigma_1^2 + \frac{1}{\alpha(r)}\sigma_2^2 + \beta(r)(\sigma_3 + 2h(r)d\tau)^2 \right]$$

新しく $\alpha(r)$ を導入： $\alpha(r)=1$ は元のMPAdS w/ $R_{\text{time}} \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1)$

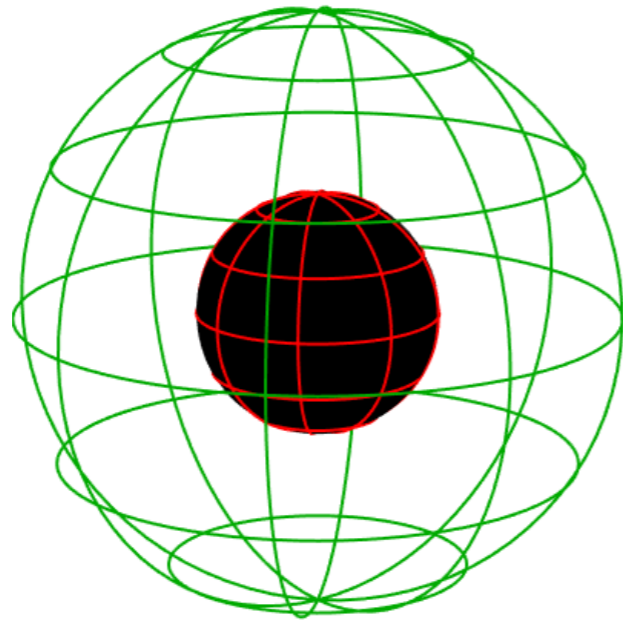
$\Rightarrow \alpha(r) \neq 1$ だと U(1) が破れた $R_{\text{time}} \times \text{SU}(2)$ 対称な解になる

この ansatz は rotating frame at infinity の境界条件でうまくいく

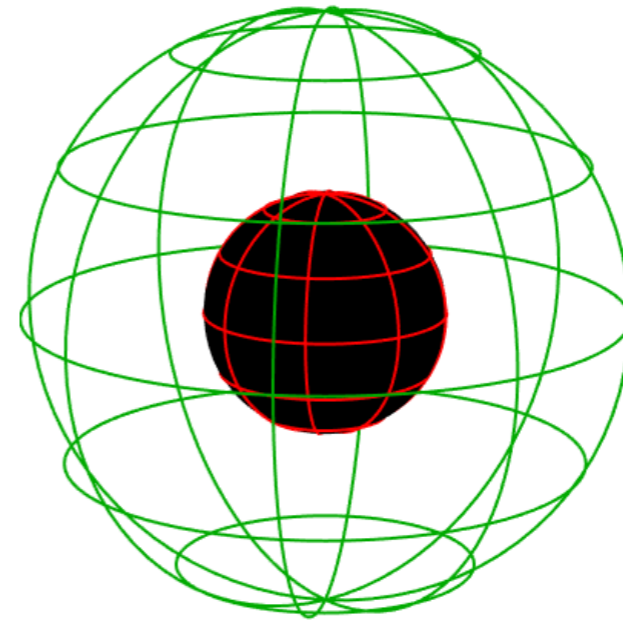


時間周期的と解釈される

無限遠が止まっている**non-rotating frame**に移ると、計量が陽に時間周期的になっている



rotating frame at infinity

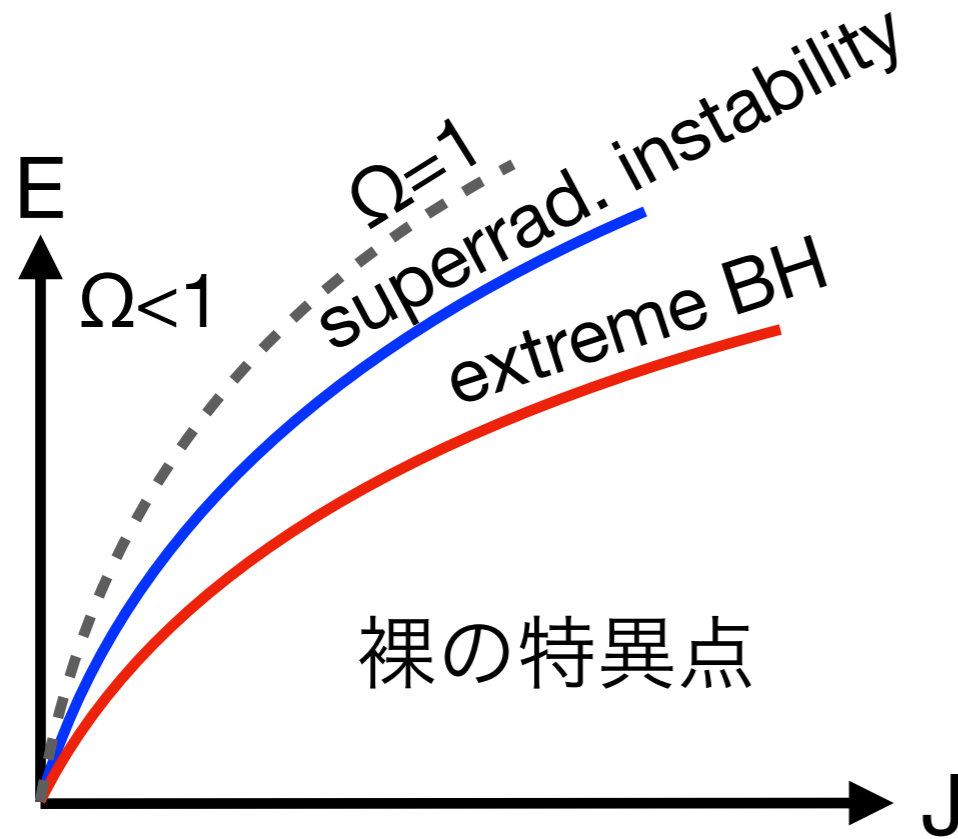


non-rotating frame at infinity

$$ds^2 = -(1 + r^2)f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{(1 + r^2)g(r)} + \frac{r^2}{4} \left[\frac{\alpha(r)^2 + 1}{2\alpha(r)} (\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2) + \frac{\alpha(r)^2 - 1}{2\alpha(r)} (\cos(4\Omega t)(\bar{\sigma}_1^2 - \bar{\sigma}_2^2) + 2 \sin(4\Omega t)\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2) + \beta(r)(\bar{\sigma}_3 + 2\bar{h}(r)dt)^2 \right]$$

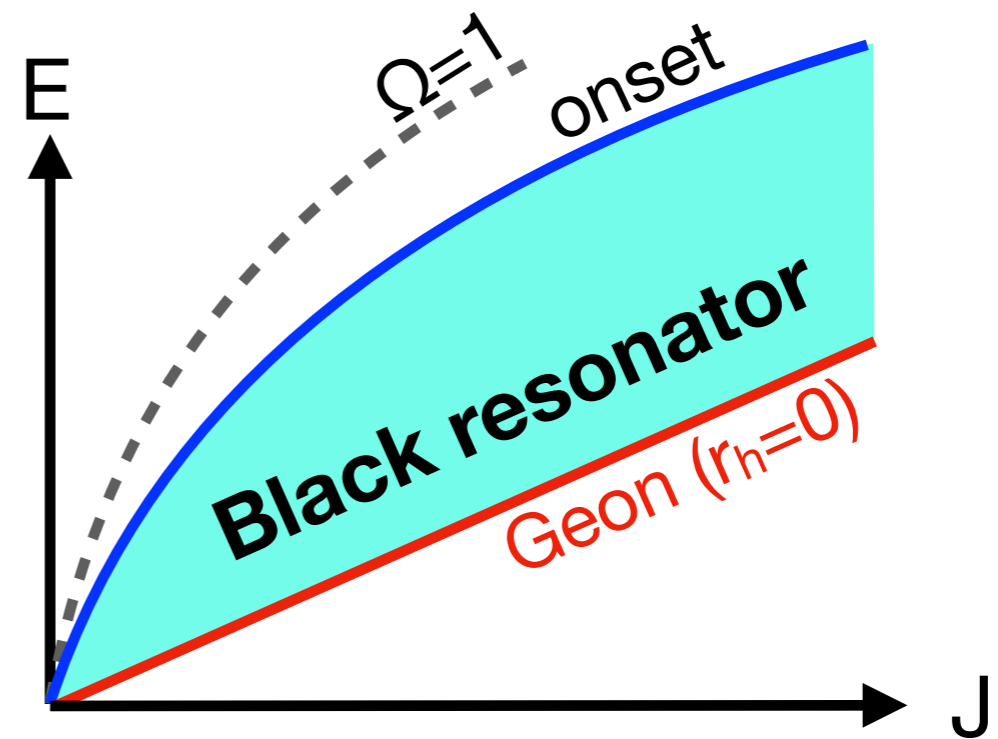
(E,J) phase diagram

Black resonatorはMPAdS BHがsuper extremeとなる領域までひろがる



MPAdS

\Rightarrow



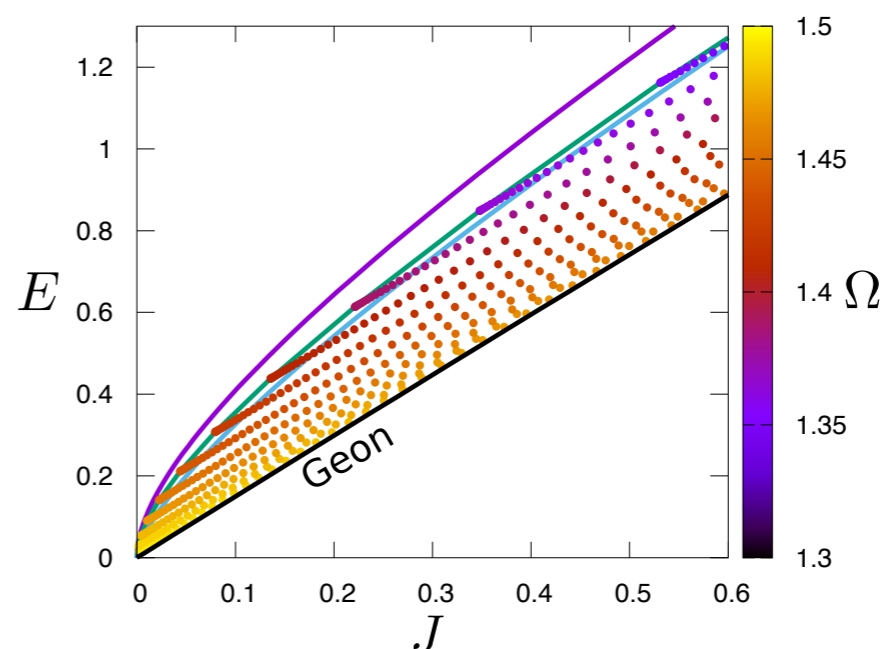
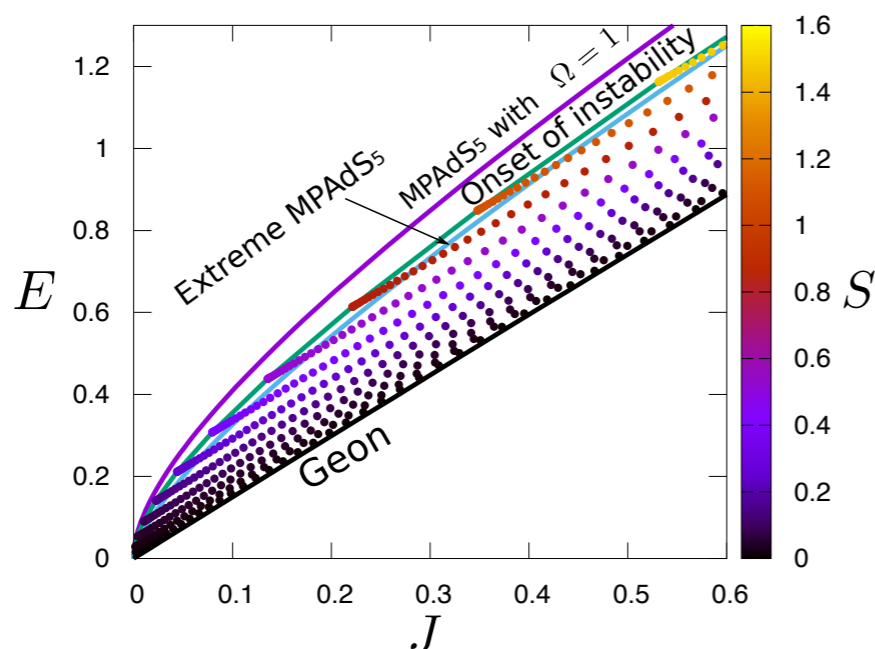
Black resonator

コメント

- エントロピーは時間一定で $S_{\text{black resonator}} > S_{\text{MPAdS}}$
- $r_h \rightarrow 0$ がなめらかに取れて、geonになる ($S \rightarrow 0$)
- 得られた解は全て $\Omega > 1 \Rightarrow$ さらに不安定性がある

[Green-Hollands-Ishibashi-Wald]

実際の数値解



($E_{\text{geon}} \sim 1.5J$ for small J)

目次

1. Superradiant instability (5 pages)
2. Black resonator in AdS_5 (9 pages)
3. Hairy black hole/resonator (8 pages)

模型

このセクション：複素スカラーを加える

$$S = \frac{1}{16\pi G_5} \int d^5x \sqrt{-g} \left(R - 2\Lambda - \partial^\mu \vec{\Pi}^* \cdot \partial_\mu \vec{\Pi} \right)$$

Π は $(2j+1)$ -成分の複素スカラー多重項

解を作るルール

等角運動量の計量と対称性が整合的なようにスカラー場を導入してcohomogeneity-1解を作る

(hairy black resonatorは $j > 4$ について可能なので)

j について $j=9/2$ つまり $2j+1=10$ に注目する

Hairy解を作る

重力 スカラー	安定 $\alpha(r)=1$	超放射不安定 $\alpha(r)\neq 1$
自明 $\Pi=0$	Myers-Perry AdS black hole	Black resonator [1810.11089]
超放射不安定 $\Pi\neq 0$	Hairy MPAdS BH [1105.4167, 2101.06325]	Hairy black resonator [2101.06325]

Doublet scalarによるhairy BH

先行研究においてcohomogeneity-1の計量で書かれる
hairy AdS BHが**doublet scalar**を用いて作られた

[Dias-Horowitz-Santos 1105.4167]

$$ds^2 = -(1+r^2)f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)g(r)} + \frac{r^2}{4} [\underbrace{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}_{\alpha(r)=1} + \beta(r)(\sigma_3 + 2\bar{h}(r)dt)^2]$$

$$\vec{\Pi} = \Phi(r)e^{-i\Omega t + i\bar{\chi}} \begin{pmatrix} \sin(\frac{\theta}{2})e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \quad (\text{non-rotating frame})$$

実はWigner D関数で書ける

(ついでにrotating frameで書く)

$$\vec{\Pi} = \Phi(r) \begin{pmatrix} D_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta, \phi, \chi) \\ D_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(\theta, \phi, \chi) \end{pmatrix}$$

参考：[J.J.サクライ 現代の量子力学]など

Multiplet scalarによるhairy BH

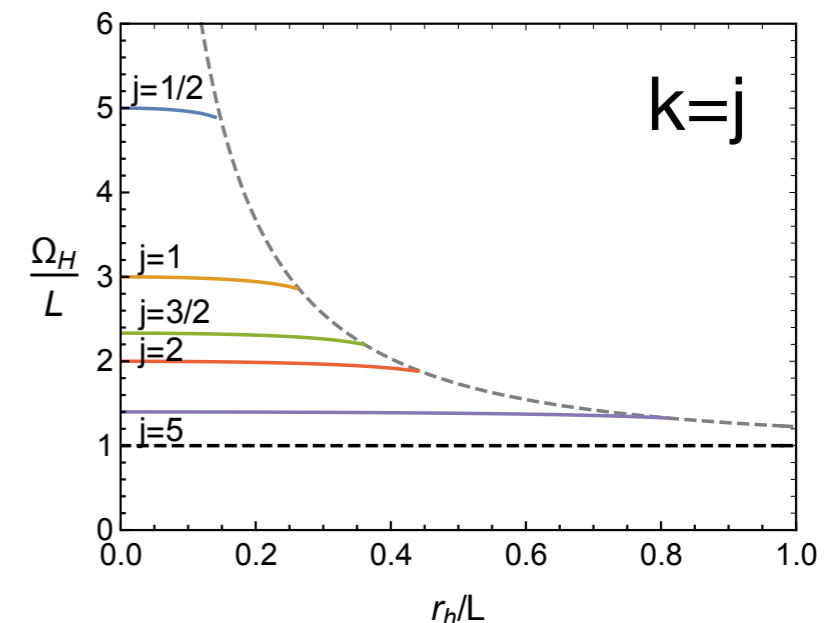
(2j+1)成分multipletに拡張すると任意のjについて

cohomogeneity-1 hairy BHが作れる [TI-Murata-Santos-Way]

$$\vec{\Pi} = \Phi_k(r) \vec{D}_k^{(j)}(\theta, \phi, \chi) \quad \vec{D}_k^{(j)} = \begin{pmatrix} D_{m=j,k}^j \\ D_{m=j-1,k}^j \\ \vdots \\ D_{m=-j,k}^j \end{pmatrix}$$

k=jの場合を考える

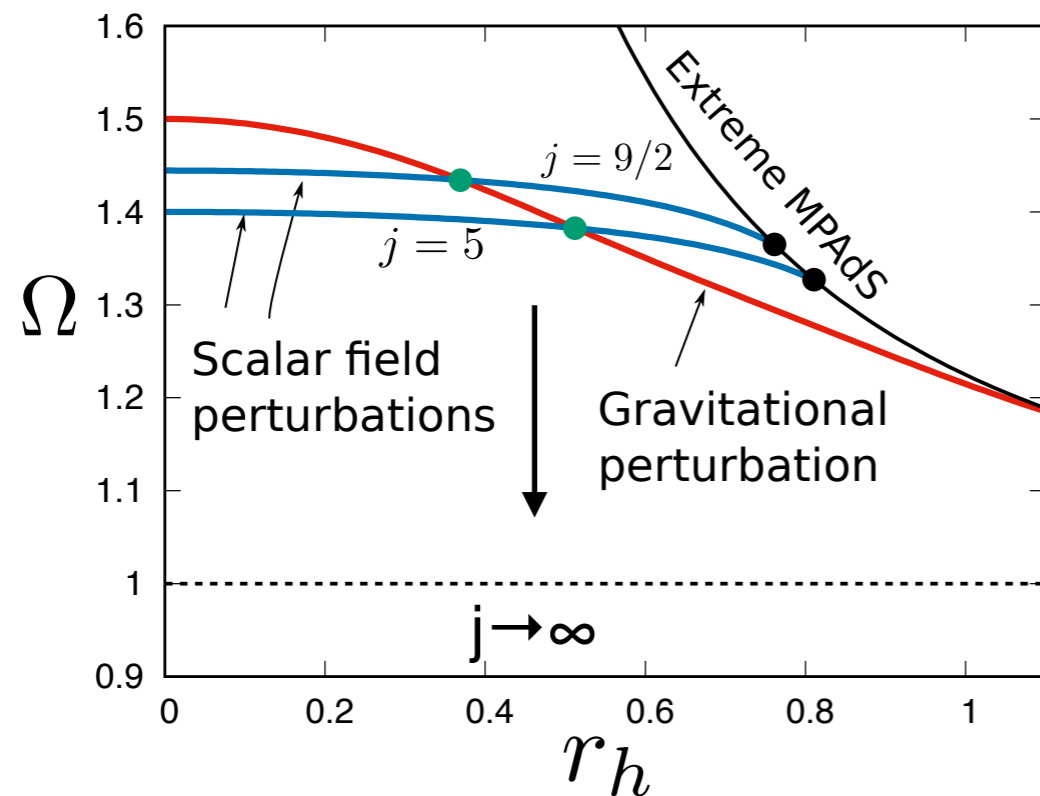
jを大きくすると、より小さい角速度 Ω についてsuperradiant不安定になる



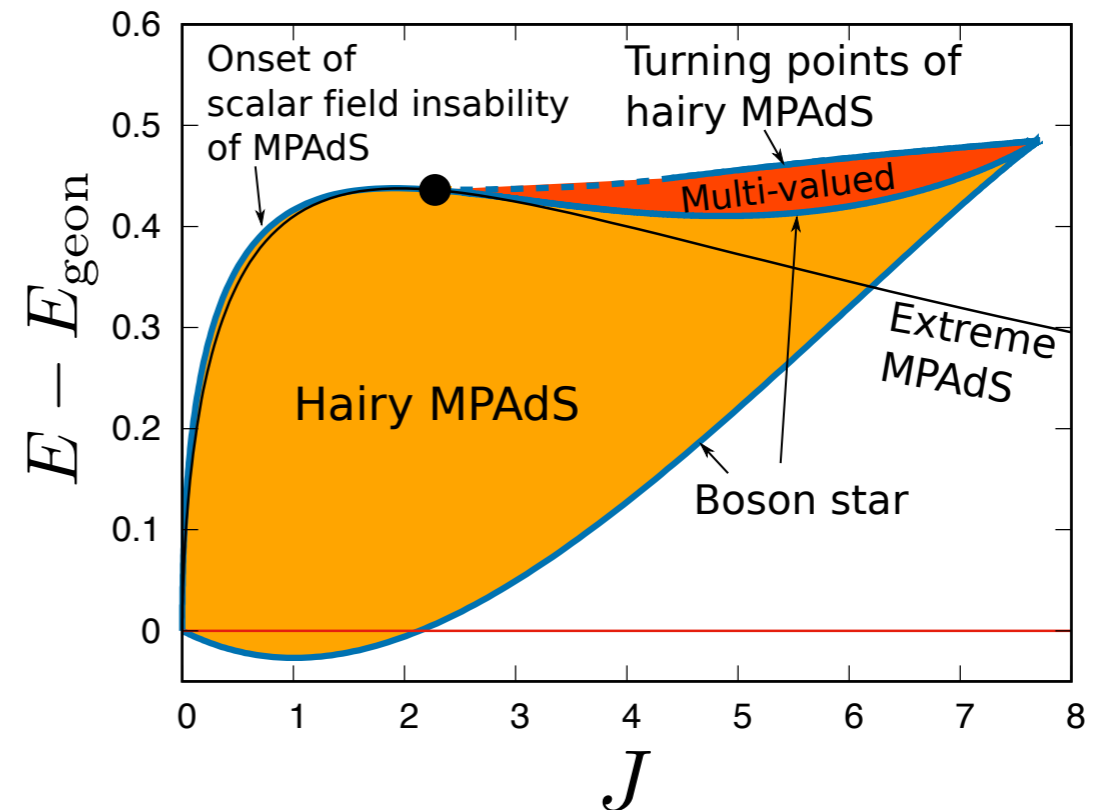
$k=j=9/2$ hairy MPAdS BH

$k=j=9/2$ くらいにすると先ほどのgravitational black resonatorに重なる領域でhairy BH解があらわれる

MPAdSの不安定性onset



$k=j=9/2$ 解



Hairy black resonator

Multipletスカラー場を $k=j, j-2, \dots$ について和を取るよう
に導入するとblack resonatorの対称性と整合的にできる

[TI-Murata-Santos-Way]

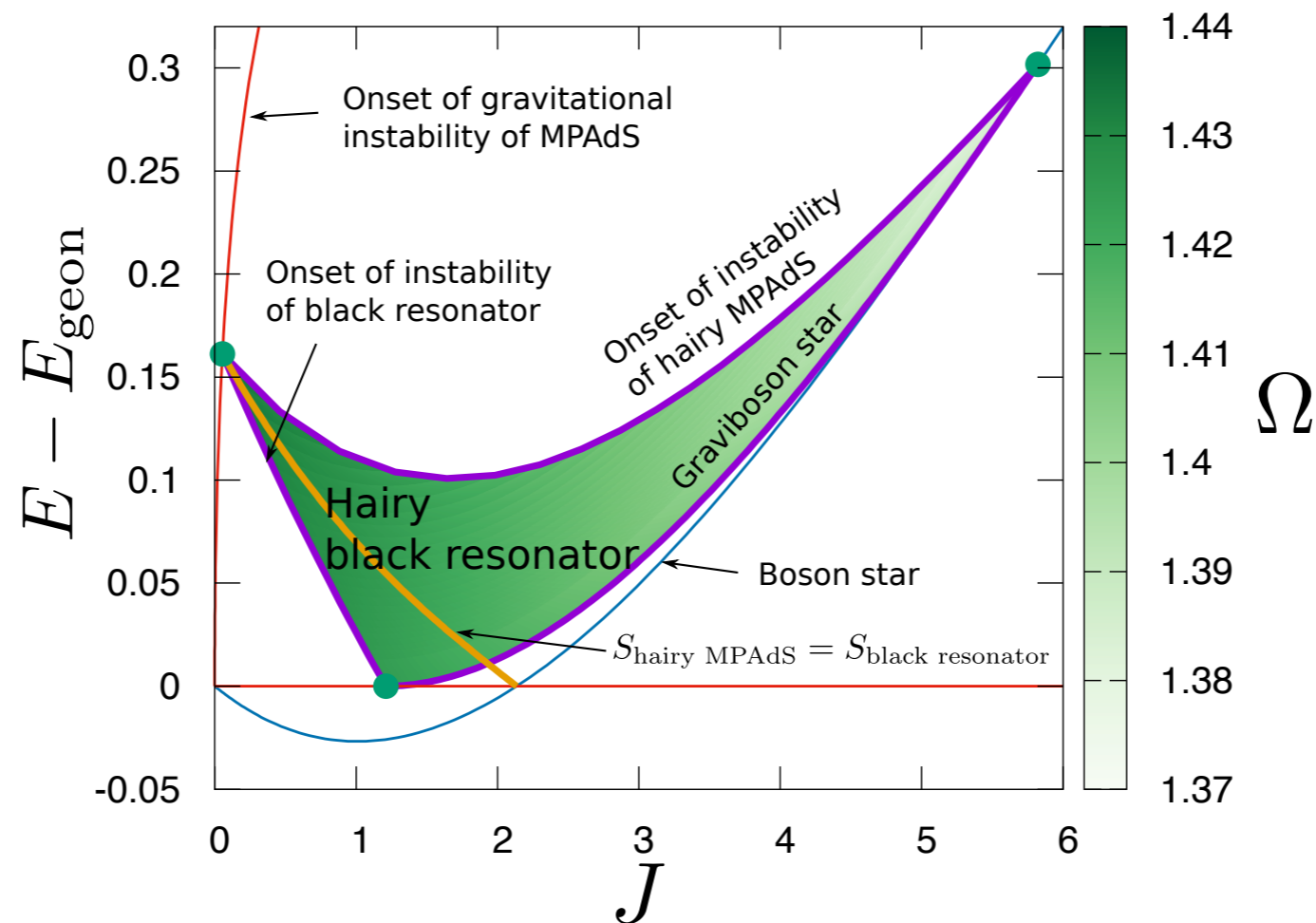
$$ds^2 = -(1+r^2)f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{(1+r^2)g(r)} + \frac{r^2}{4} \left[\alpha(r)\sigma_1^2 + \frac{1}{\alpha(r)}\sigma_2^2 + \beta(r)(\sigma_3 + 2h(r)dt)^2 \right]$$

$$\vec{\Pi} = \sum_{k=j, j-2, \dots} \Phi_k(r) \vec{D}_k^{(j)}(\theta, \phi, \chi) \quad \vec{D}_k^{(j)} = \begin{pmatrix} D_{m=j,k}^j \\ D_{m=j-1,k}^j \\ \vdots \\ D_{m=-j,k}^j \end{pmatrix}$$

kについて和を取るのは、 $U(1)_\chi$ が破れて異なる量子数kのモードが
混ざるからである

$j=9/2$ hairy black resonator

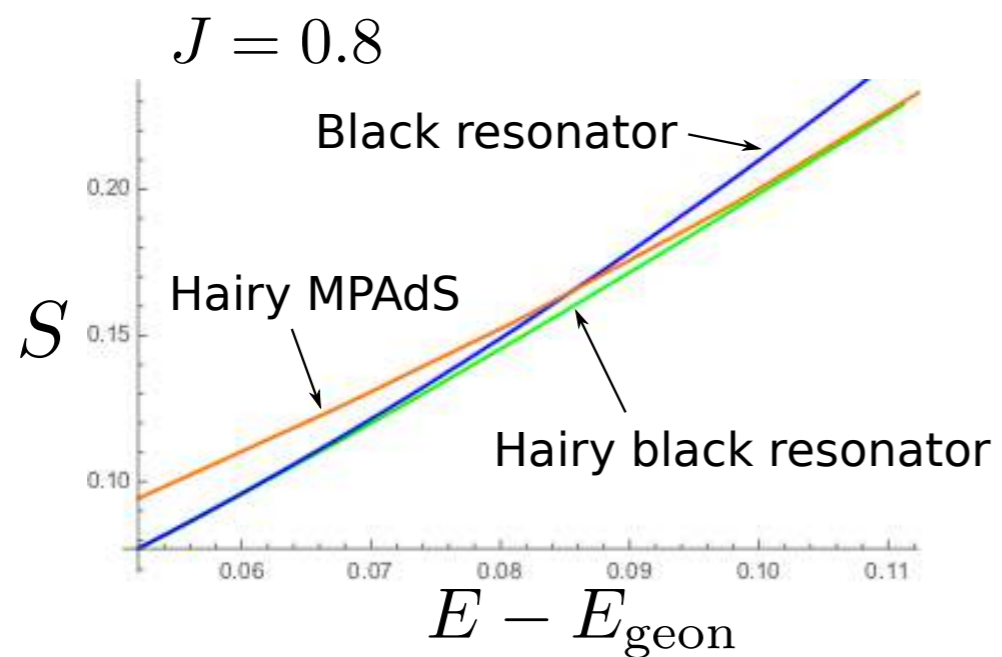
スカラー・計量場の不安定性のonset (2辺)と $r_h=0$ 極限
(graviboson star)で囲まれた三角の領域で解がある



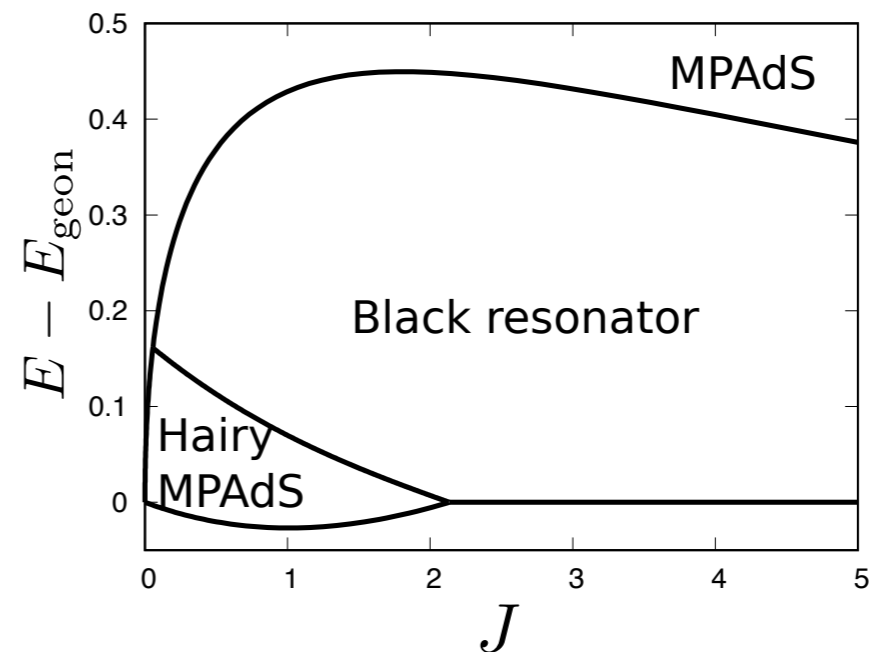
エントロピー比較

Black resonatorおよびhairy MPAdSよりも**hairy black resonator**はエントロピーが低い

Jが一定面での比較



エントロピーが一番大きい解



まとめ

5次元等角運動量Myers-Perry AdS BHの超放射不安定性から分岐するcohomogeneity-1解を構成した

スカラー \ 重力	安定	超放射不安定
安定	MPAdS BH	Black resonator
超放射不安定	Hairy MPAdS BH	Hairy black resonator

展望

他の次元では？ 超重力解は？ AdS/CFT解釈は？

AdS以外では？ → [Dias-TI-Murata-Santos-Way, to appear]