

ゲージ・ヒッグス大統一理論における ゲージ結合定数の統一

京都産業大学 益川塾

Maskawa Institute, Kyoto Sangyo University

山津 直樹

Naoki Yamatsu

2016年7月20日(水)

京都大学素粒子論研究室セミナー@ 京都大学, 京都

今回の講演の目的

Kaluza-Klein(KK) 展開を用いて五次元の $SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論での四次元の標準理論のゲージ結合定数が漸近的自由性を持ち, KK スケールよりも十分高エネルギーで統一することを説明する.

本講演の内容：

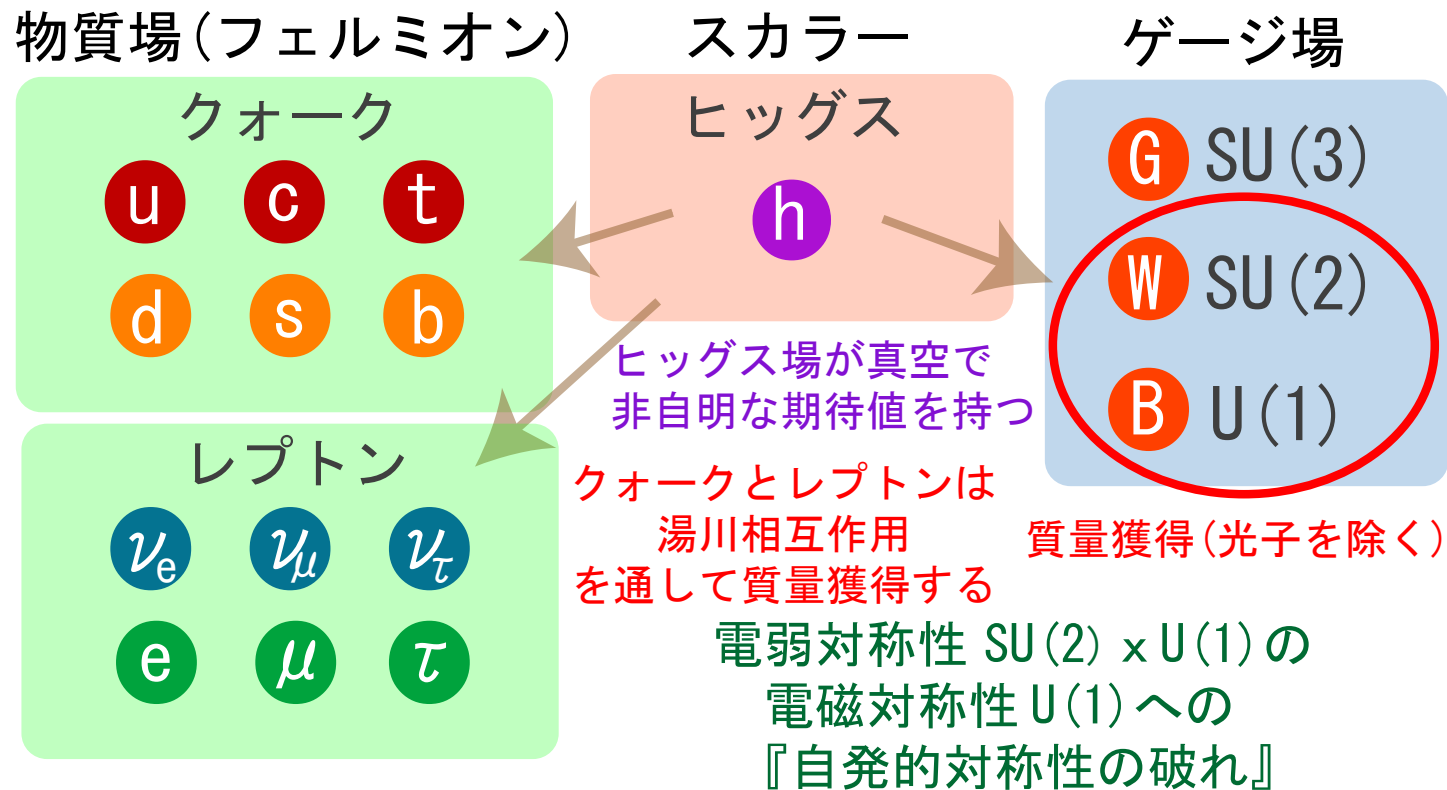
- ① ゲージ・ヒッグス大統一理論
- ② ゲージ結合定数の繰り込み群方程式

内 容

1. 背景と動機
2. ゲージ・ヒッグス大統一理論
3. ゲージ結合定数の繰り込み群方程式
4. まとめ

1. 背景と動機

標準理論



素粒子標準理論の未解決問題

- 素粒子のカイラルな世代の起源とその階層的構造
- 電荷の量子化と量子異常の相殺
- 物質場クォークとレプトンの表現の煩雑さ
- ゲージ階層性問題

⋮

低エネルギー現象からの標準理論を越える自然法則の示唆は？

クォーク・レプトンセクターに注目すると...

- なぜカイラルな三世代？
- なぜ質量階層性？
- なぜ電荷の量子化？
- なぜ量子異常の相殺？
- なぜ基本表現だけ？

低エネルギー現象からの標準理論を越える自然法則の示唆は？

クォーク・レプトンセクターに注目すると...

- なぜカイラルな三世代？
- なぜ質量階層性？
- なぜ電荷の量子化？
- なぜ量子異常の相殺？
- なぜ基本表現だけ？

対称性に基づいてこれらを統一的に理解できないだろうか？

低エネルギー現象からの標準理論を越える自然法則の示唆は？

クォーク・レプトンセクターに注目すると...

- なぜカイラルな三世代？
 - なぜ質量階層性？
 - なぜ電荷の量子化？
 - なぜ量子異常の相殺？
 - なぜ基本表現だけ？
- ⇒ 世代対称性(?)
- ⇒ 大統一理論(?)
- ⇒ ??

対称性に基づいてこれらを統一的に理解できないだろうか？

対称性とその破れに基づく統一理論への試み

- クォークやレプトンの世代の統一：世代対称性
- クォークとレプトンの統一：大統一ゲージ対称性
- 標準理論のゲージ対称性の統一：大統一ゲージ対称性
- フェルミオンとボソンの統一：超対称性
- ゲージとスカラーの統一：高次元時空対称性

⋮

対称性とその破れに基づく統一理論への試み

- クォークやレプトンの世代の統一：世代対称性
- クォークとレプトンの統一：大統一ゲージ対称性
- 標準理論のゲージ対称性の統一：大統一ゲージ対称性
- フェルミオンとボソンの統一：超対称性
- ゲージとスカラーの統一：高次元時空対称性

⋮

物質場クォーク・レプトンのゲージ群の表現の組み合わせに注目

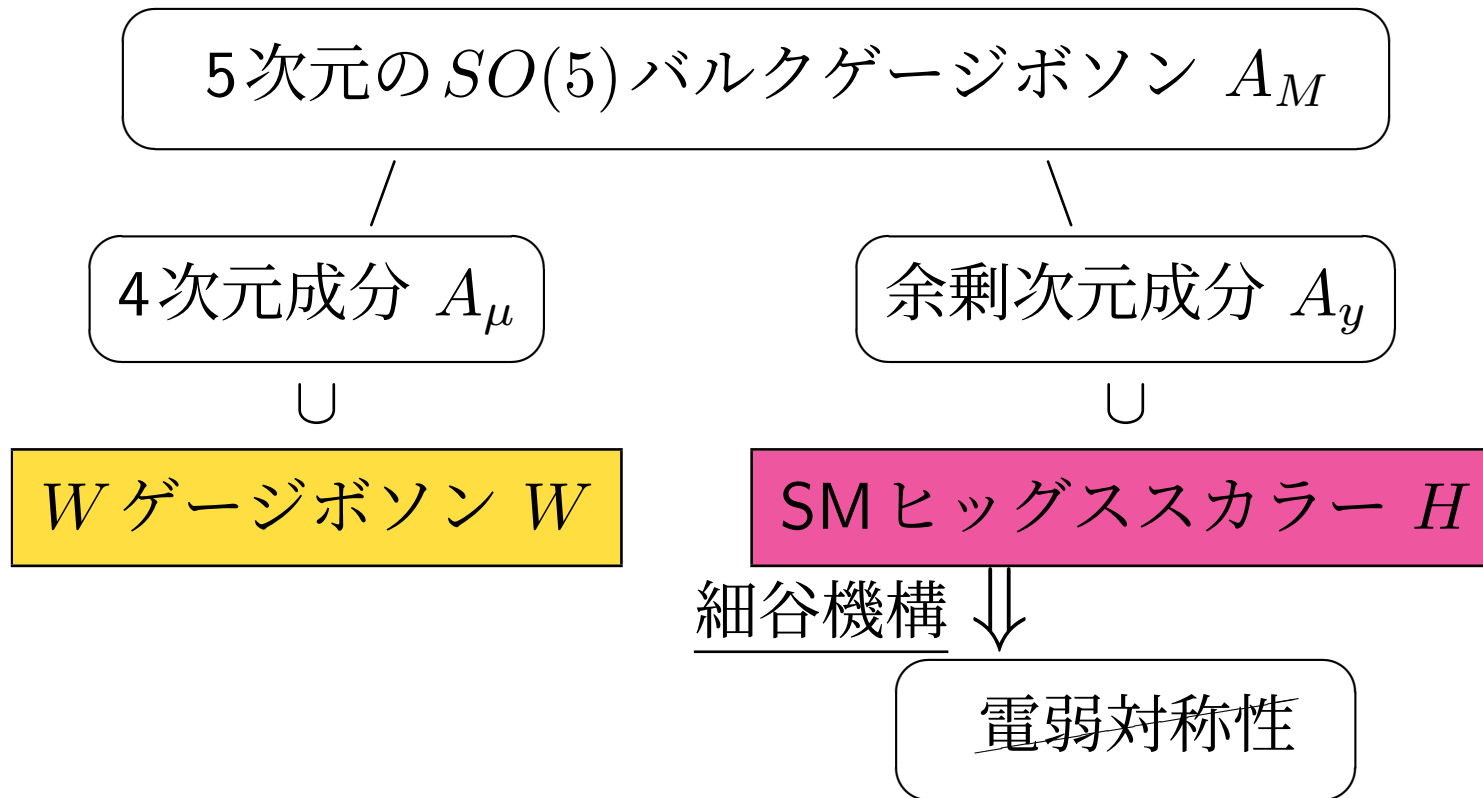
- なぜか四次元のカイラル量子異常が奇跡的に相殺している.
- なぜか $U(1)_Y$ の電荷が量子化されている.
- なぜか $SU(3)_C$ と $SU(2)_L$ の基本表現と自明な表現しかない.
- なぜか標準理論のゲージ群 G_{SM} を $SU(5)_{\text{GUT}}$ 群に埋め込むとフェルミオンを $SU(5)$ の基本表現に埋め込める.

物質場クォーク・レプトンのゲージ群の表現の組み合わせに注目

- なぜか四次元のカイラル量子異常が奇跡的に相殺している.
- なぜか $U(1)_Y$ の電荷が量子化されている.
- なぜか $SU(3)_C$ と $SU(2)_L$ の基本表現と自明な表現しかない.
- なぜか標準理論のゲージ群 G_{SM} を $SU(5)_{\text{GUT}}$ 群に埋め込むとフェルミオンを $SU(5)$ の基本表現に埋め込める.

すべてが解決する分けでないが一部は G_{SM} を G_{GUT} に埋め込むことにより理解できるように見える.

$SU(3) \times SO(5) \times U(1)$ ゲージ・ヒッグス統一理論



$SO(5) \times U(1)$ GHU in RS [1–6, K.Agashe et al.'05; Y.Hosotani et al.'08-'15]

2. ゲージ・ヒッグス大統一理論

$SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論について話すこと

- 対称性の破れのパターン [7, Y.Hosotani,N.Y.'15]
- バルク場のゼロモード (概略) [7, Y.Hosotani,N.Y.'15]
- ゲージ結合定数の繰り込み群 (次のセクション) [8, N.Y.'16]

ここで議論しないこと

- 余剰次元理論の詳細

$SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論 [7, Y.Hosotani,N.Y.'15]

対称性の破れのパターン：

$SO(11)$

$SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論 [7, Y.Hosotani,N.Y.'15]

対称性の破れのパターン：

$$SO(11) \xrightarrow{BC} \begin{cases} SO(10) & \text{on Planck brane} \\ SO(4) \times SO(7) & \text{on TeV brane} \end{cases}$$

$SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論 [7, Y.Hosotani,N.Y.'15]

対称性の破れのパターン：

$$SO(11) \xrightarrow{BC} \begin{cases} SO(10) & \text{on Planck brane} \\ SO(4) \times SO(7) & \text{on TeV brane} \end{cases}$$

$$\underset{BC}{=} SO(4) \times SO(6) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_C$$

$SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論 [7, Y.Hosotani,N.Y.'15]

対称性の破れのパターン：

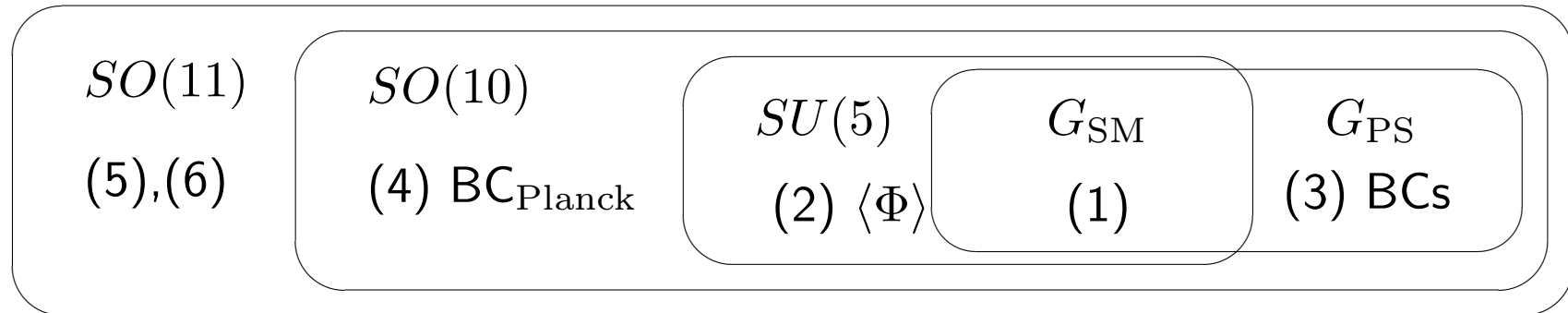
$$\begin{aligned}
 SO(11) &\xrightarrow{BC} \begin{cases} SO(10) & \text{on Planck brane} \\ SO(4) \times SO(7) & \text{on TeV brane} \end{cases} \\
 &\underset{BC}{=} SO(4) \times SO(6) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_C \\
 &\xrightarrow{\langle \Phi \rangle} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad \text{ブレーンスカラーの VEV}
 \end{aligned}$$

$SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論 [7, Y.Hosotani,N.Y.'15]

対称性の破れのパターン：

$$\begin{aligned}
 SO(11) &\xrightarrow{BC} \begin{cases} SO(10) & \text{on Planck brane} \\ SO(4) \times SO(7) & \text{on TeV brane} \end{cases} \\
 &\underset{BC}{=} SO(4) \times SO(6) \sim SU(2)_L \times SU(2)_R \times SU(4)_C \\
 &\xrightarrow[\langle \Phi \rangle]{} SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \quad \text{ブレーンスカラーの VEV} \\
 &\xrightarrow[\theta_H]{} SU(3)_C \times U(1)_{em} \quad (\text{細谷機構}) \quad [9, \text{Y.Hosotani}'83]
 \end{aligned}$$

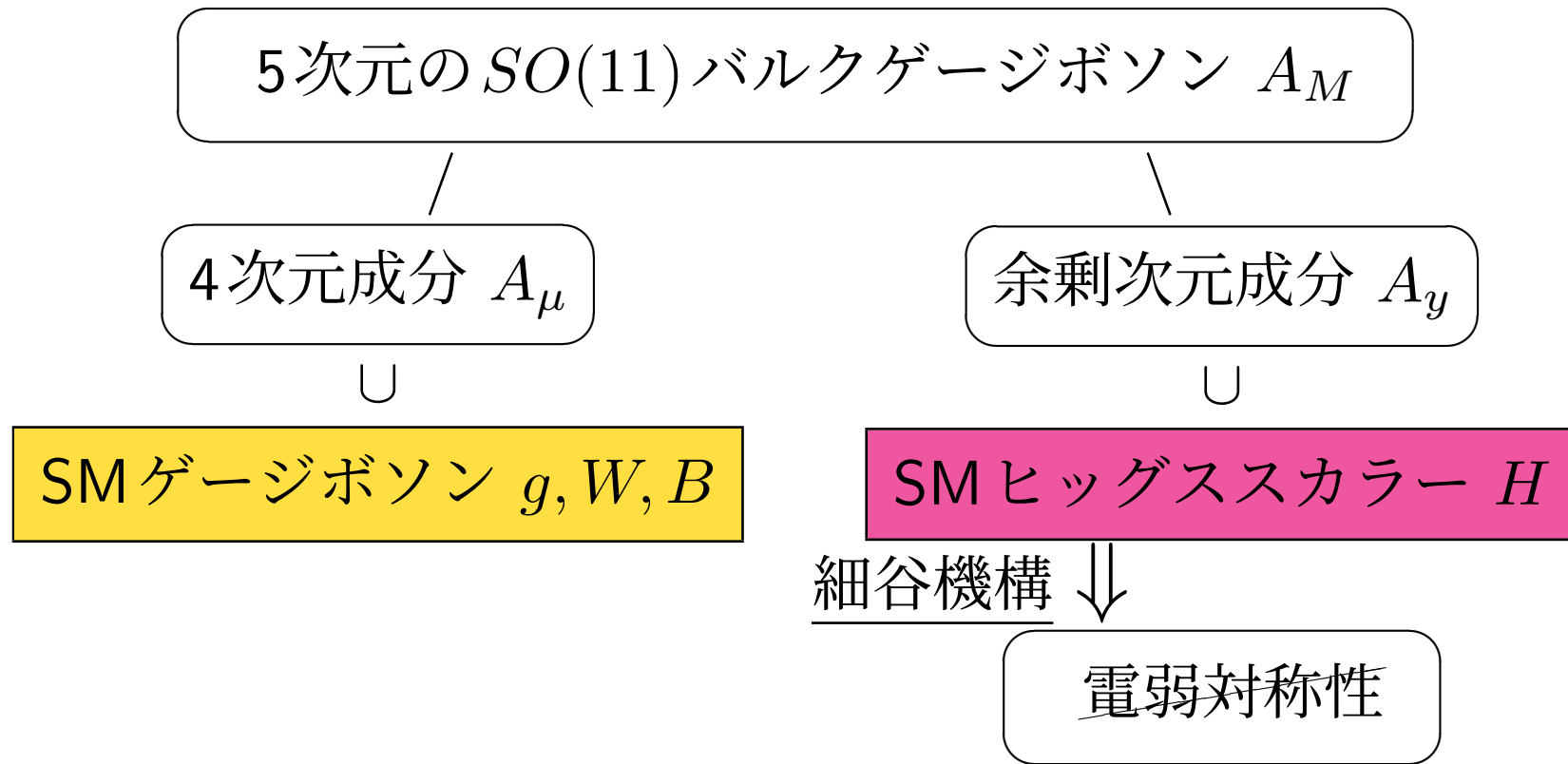
対称性の破れのパターン：Venn図版



5D ゲージ場 ($A_M = A_\mu \oplus A_z$) の境界条件

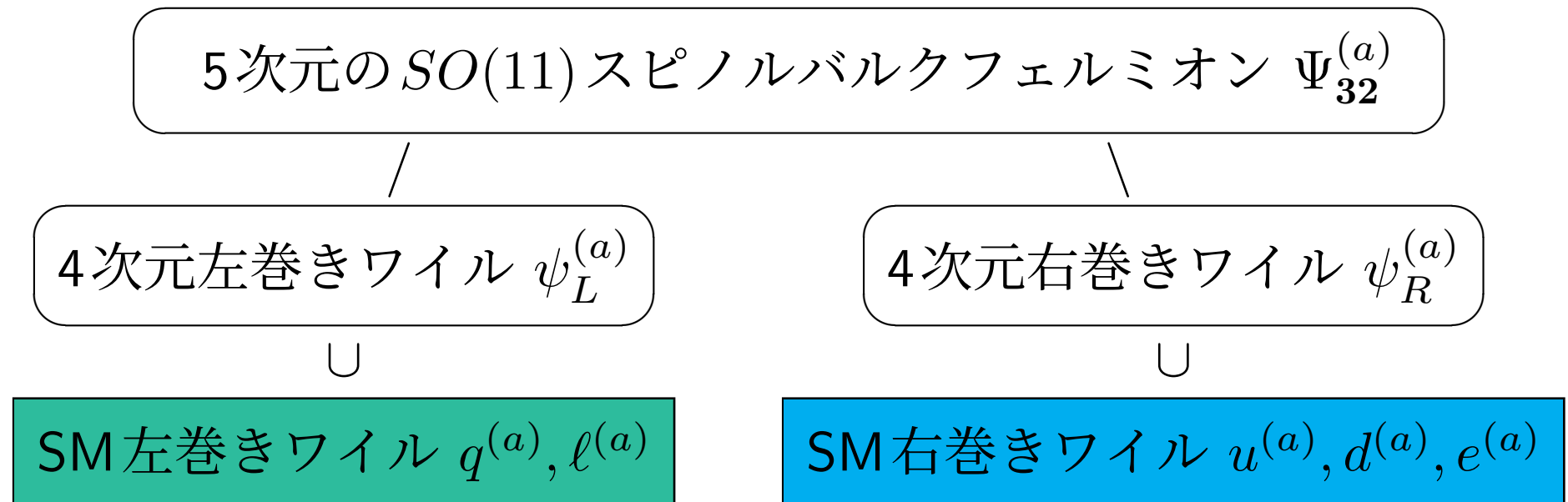
生成子	$A_\mu^{(z=1)}$	$A_\mu^{(z=z_L)}$	$A_z^{(z=1)}$	$A_z^{(z=z_L)}$
(1) G_{SM}	N	N	D	D
(2) $SU(5)/G_{\text{SM}}$	N	D	D	N
(3) $G_{\text{PS}}/G_{\text{SM}}$	D_{eff}	N	D	D
(4) $SO(10)/(SU(5) \cup G_{\text{PS}})$	D_{eff}	D	D	N
(5) $SO(5)/SO(4)$	D	D	N	N
(6) $SO(7)/SO(6)$	D	N	N	D

$SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論：ボソン



$SO(11)$ GHGUT in RS [7, 10, 11, Y.Hosotani, N.Y.'15; A.Furui et al.'16]

$SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論



$SO(11)$ GHGUT in RS [7, 10, 11, Y.Hosotani, N.Y.'15; A.Furui et al.'16]

$SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一模型でのゼロモードのまとめ

Bulk field	A_M			
Zero modes	G_μ	W_μ	A_μ	ϕ
G_{SM}	$(\mathbf{8}, \mathbf{1})_0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{3})_0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}$
$SL(2, \mathbb{C})$	$(1/2, 1/2)$	$(1/2, 1/2)$	$(1/2, 1/2)$	$(0, 0)$

Bulk field	$\Psi_{32}^{(a)}$				
Zero modes	$q_L^{(a)}$	$\ell_L^{(a)}$	$u_R^{(a)}$	$d_R^{(a)}$	$e_R^{(a)}$
G_{SM}	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{+1/6}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{+2/3}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-1/3}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}$
$SL(2, \mathbb{C})$	$(1/2, 0)$	$(1/2, 0)$	$(0, 1/2)$	$(0, 1/2)$	$(0, 1/2)$

ゲージ・ヒッグス大統一理論でのこれまでに知られた結果など

- ゲージ・ヒッグス大統一理論に適用可能なゲージ群の分類 [12, N.Y.'15]
- $SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論でのフェルミオン数の保存による陽子崩壊の禁止 [7, 10, Y.Hosotani, N.Y.'15]
- $SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論での電弱対称性の破れとフェルミオンの質量構造の詳細解析 [11, A.Furui, Y.Hosotani, N.Y., '16]
- 五次元ゲージ・ヒッグス大統一理論での四次元の標準理論のゲージ結合定数の漸近的自由性とその統一 [8, N.Y.'16]

ゲージ・ヒッグス大統一理論でのこれまでに知られた結果など

- ゲージ・ヒッグス大統一理論に適用可能なゲージ群の分類 [12, N.Y.'15]
- $SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論でのフェルミオン数の保存による陽子崩壊の禁止 [7, 10, Y.Hosotani, N.Y.'15]
- $SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論での電弱対称性の破れとフェルミオンの質量構造の詳細解析 [11, A.Furui, Y.Hosotani, N.Y., '16]
- 五次元ゲージ・ヒッグス大統一理論での四次元の標準理論のゲージ結合定数の漸近的自由性とその統一 [8, N.Y.'16]

大統一理論と電弱統一理論での予言

大統一スケールでのゲージ結合定数 (@ $\mu = M_{GUT}$)

$$\alpha_{3C}(M_{GUT}) = \alpha_{2L}(M_{GUT}) = \alpha_{1Y}(M_{GUT})$$

電弱統一理論での関係

$$\alpha_{em}(\mu) = \frac{3\alpha_{1Y}(\mu)\alpha_{2L}(\mu)}{3\alpha_{1Y}(\mu) + 5\alpha_{2L}(\mu)}, \quad \sin^2 \theta_W(\mu) = \frac{3\alpha_{1Y}(\mu)}{3\alpha_{1Y}(\mu) + 5\alpha_{2L}(\mu)}.$$

上記より

$$\sin^2 \theta_W(M_{GUT}) = \frac{3\alpha_{1Y}}{3\alpha_{1Y} + 5\alpha_{2L}}(M_{GUT}) = \frac{3}{8} \neq 0.23 \simeq \sin^2 \theta_W(M_Z)$$

3. ゲージ結合定数の繰り込み群方程式

ゲージ結合定数の繰り込み群方程式 (1-loop) [13, E.g., Slansky'81]

$$\frac{d}{d\log(\mu)} \alpha_i^{-1}(\mu) = -\frac{b_i^{1\text{-loop}}}{2\pi},$$

ただし, $\alpha_i := g_i^2/4\pi$, $T(R):R$ の Dynkin 指数,

$$b_i^{1\text{-loop}} = -\frac{11}{3} \sum_{\substack{\text{Gauge} \\ \text{(Real)}}} T(R_V) + \frac{2}{3} \sum_{\substack{\text{Fermion} \\ \text{(Weyl)}}} T(R_F) + \frac{1}{6} \sum_{\substack{\text{Scalar} \\ \text{(Real)}}} T(R_S)$$

ゲージ結合定数の繰り込み群方程式 (1-loop) [13, E.g., Slansky'81]

$$\frac{d}{d\log(\mu)}\alpha_i^{-1}(\mu) = -\frac{b_i^{1-\text{loop}}}{2\pi}.$$

$b_i^{1-\text{loop}}$ が μ に依存しない場合には, 上記の方程式は容易に解ける.

$$\alpha_i^{-1}(\mu) = \alpha_i^{-1}(\mu_0) - \frac{b_i^{1-\text{loop}}}{2\pi} \log\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right).$$

残りは文献 [12–14, McKay-Patera'81; Slansky'81; N.Y.'15] に掲載されているディンキン指数を用いて β 関数の係数を計算してやれば良い.

標準理論でのゲージ結合定数の繰り込み群方程式

標準理論の場の表現

場	G_μ	W_μ	B_μ	Q	u^c	d^c	L	e^c	ϕ
$SU(3)_C$	8	1	1	3	$\bar{3}$	$\bar{3}$	1	1	1
$SU(2)_L$	1	3	1	2	1	1	2	1	2
$U(1)_Y$	0	0	0	1/6	-2/3	1/3	-1/2	1	1/2

$$b_i^{\text{SM}} = -\frac{11}{3}C_2(G_i) + \frac{2}{3} \sum_{\text{Fermions}} T(R_F) + \frac{1}{3} \sum_{\text{Higgs}} T(R_S)$$

標準理論でのゲージ結合定数の繰り込み群方程式

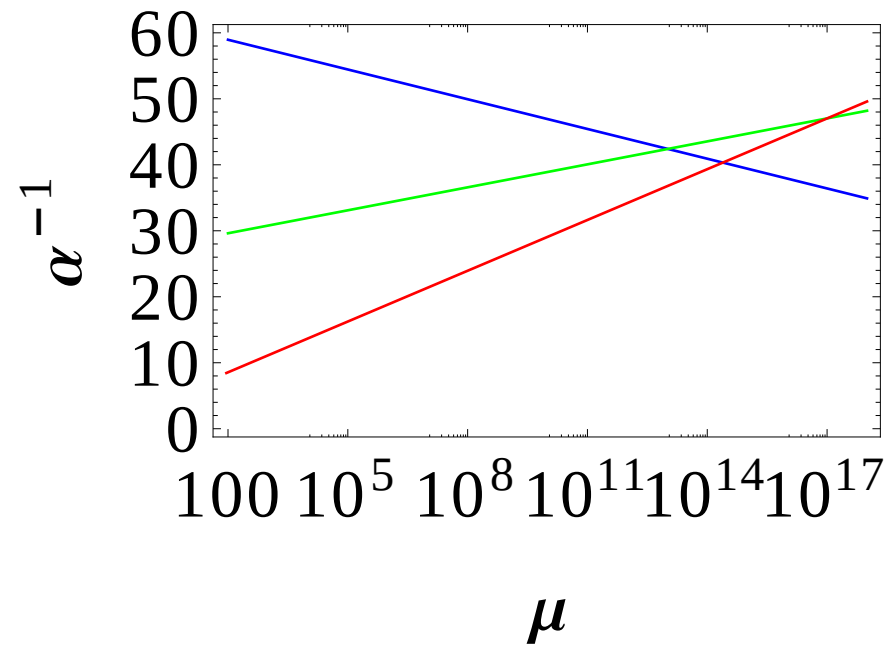
標準理論の場の表現

場	G_μ	W_μ	B_μ	Q	u^c	d^c	L	e^c	ϕ
$SU(3)_C$	8	1	1	3	$\bar{3}$	$\bar{3}$	1	1	1
$SU(2)_L$	1	3	1	2	1	1	2	1	2
$U(1)_Y$	0	0	0	1/6	$-2/3$	1/3	$-1/2$	1	1/2

$$b_i^{\text{SM}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -22/3 \\ -11 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +41/10 \\ -19/6 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

標準理論でのゲージ結合定数の繰り込み群発展 [8, E.g., N.Y.'16]

Standard Model



境界条件：ゲージ結合定数 (@ $\mu = M_Z \simeq 91 \text{ GeV}$) Ref. [15, PDG'14]

$$\alpha_{3C} \simeq 0.118, \quad \alpha_{2L} = \frac{\alpha_{em}}{\sin^2 \theta_W}, \quad \alpha_{1Y} = \frac{5\alpha_{em}}{3 \cos^2 \theta_W}, \quad \alpha_{em}^{-1} \simeq 128, \quad \sin^2 \theta_W \simeq 0.23.$$

ゲージ結合定数の繰り込み群方程式 (1-loop) [13, E.g., Slansky'81]

$$\frac{d}{d\log(\mu)}\alpha_i^{-1}(\mu) = -\frac{b_i^{1-\text{loop}}}{2\pi},$$

$b_i^{1-\text{loop}}$ に KK 粒子の寄与が追加されることで μ に依存する場合はどうなるだろうか? 以下の議論は,

- KK 展開を用いて 4 次元ゲージ結合定数の繰り込み群を議論する.
- $k \times m_{KK}$ ($k \in \mathbb{Z}$) で k 番目の KK モードが現れる.
- 1-ループの近似の範囲での計算を行う.

5D GHGUTでのゲージ結合定数の繰り込み群方程式

$$\frac{d}{d\log(\mu)}\alpha_i^{-1}(\mu) = -\frac{b_i^{1-\text{loop}}}{2\pi},$$

エネルギースケール $km_{KK} < \mu < (k+1)m_{KK}$ での β 関数の係数

$$b_i^{1-\text{loop}} = \underbrace{b_i^0}_{\text{ゼロモード}} + \underbrace{k\Delta b^{KK}}_{\text{KKモード}}.$$

ただし, 一セットのKKモードの寄与を Δb^{KK} とする.

5D GHGUTでのゲージ結合定数の繰り込み群方程式

$$\frac{d}{d\log(\mu)}\alpha_i^{-1}(\mu) = \begin{cases} -\frac{b_i^0}{2\pi} & \text{for } \mu < m_{KK} \\ -\frac{b_i^0}{2\pi} - \frac{k\Delta b^{KK}}{2\pi} & \text{for } km_{KK} < \mu < (k+1)m_{KK} \end{cases}$$

KK粒子の数 k を次のように近似する： $k \simeq \mu/m_{KK}$.

$m_{KK} < \mu$ に対して,

$$\alpha_i^{-1}(\mu) = \alpha_i^{-1}(m_{KK}) - \underbrace{\frac{b_i^0}{2\pi} \log \frac{\mu}{m_{KK}}}_{\text{ゼロモード}} - \underbrace{\frac{\mu - m_{KK}}{m_{KK}} \frac{\Delta b^{KK}}{2\pi}}_{\text{KKモード}}.$$

5D GHGUTでのゲージ結合定数の繰り込み群方程式

$\Delta b^{KK} < 0$ に対して, ゲージ結合定数は急速に小さくなる:

$$\alpha_i(\mu) \simeq \frac{-2\pi}{\Delta b^{KK}} \frac{m_{KK}}{\mu}$$

もし $\Delta b^{KK} > 0$ であると,

$$\alpha_i(\mu) \rightarrow \infty \quad \text{near} \quad \alpha_i^{-1}(m_{KK}) \simeq \frac{\Delta b^{KK}}{2\pi} \frac{\mu}{m_{KK}}$$

5D $SO(11)$ GHGUT でのゲージ結合定数の繰り込み群方程式

バルク場	A_M	$\Psi_{32}^{(a)}$	$\Psi_{11}^{(b)}$
$SO(11)$	55	32	11
5D RS_1	5	4	4
Orbifold BC		$(-, -)$	$(-, -)$

ゲージ結合定数の β 関数の係数への 1st KK モードからの寄与

$$\Delta b^{KK} = \left(-\frac{11}{3}_{\text{Vector}} + \frac{1}{6}_{\text{Scalar}} \right) C_2(SO(11)) + \frac{4}{3} \sum_{\text{Fermion (Dirac)}} T(R_F) .$$

5D $SO(11)$ GHGUT でのゲージ結合定数の繰り込み群方程式

バルク場	A_M	$\Psi_{32}^{(a)}$	$\Psi_{11}^{(b)}$
$SO(11)$	55	32	11
5D RS_1	5	4	4
Orbifold BC		$(-, -)$	$(-, -)$

ゲージ結合定数の β 関数の係数への 1st KK モードからの寄与

$$\Delta b^{KK} = -\frac{7}{2}C_2(SO(11)) + \frac{4}{3}(n_S T(\mathbf{32}) + n_V T(\mathbf{11})),$$

$$C_2(SO(11) = \mathbf{55}) = T(\mathbf{55}) = 9, T(\mathbf{32}) = 4, T(\mathbf{11}) = 1.$$

5D $SO(11)$ GHGUT でのゲージ結合定数の繰り込み群方程式

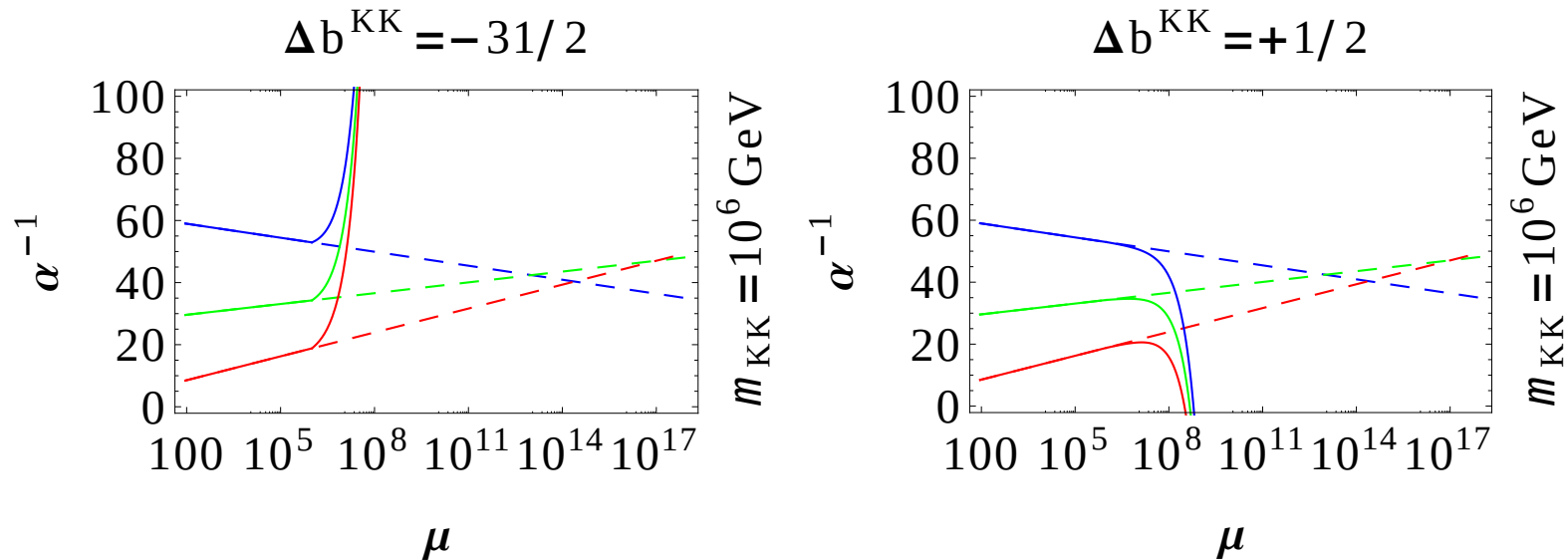
バルク場	A_M	$\Psi_{32}^{(a)}$	$\Psi_{11}^{(b)}$
$SO(11)$	55	32	11
5D RS_1	5	4	4
Orbifold BC		$(-, -)$	$(-, -)$

ゲージ結合定数の β 関数の係数への 1st KK モードからの寄与

$$\Delta b^{KK} = -\frac{7}{2} \times 9 + \frac{4}{3}(3 \times 4 + 0 \times 1) = -\frac{31}{2}.$$

n_S, n_V : バルクフェルミオンの数. $n_S = 3, n_V = 0$.

5D $SO(11)$ GHGUTでのゲージ結合定数の繰り込み群発展

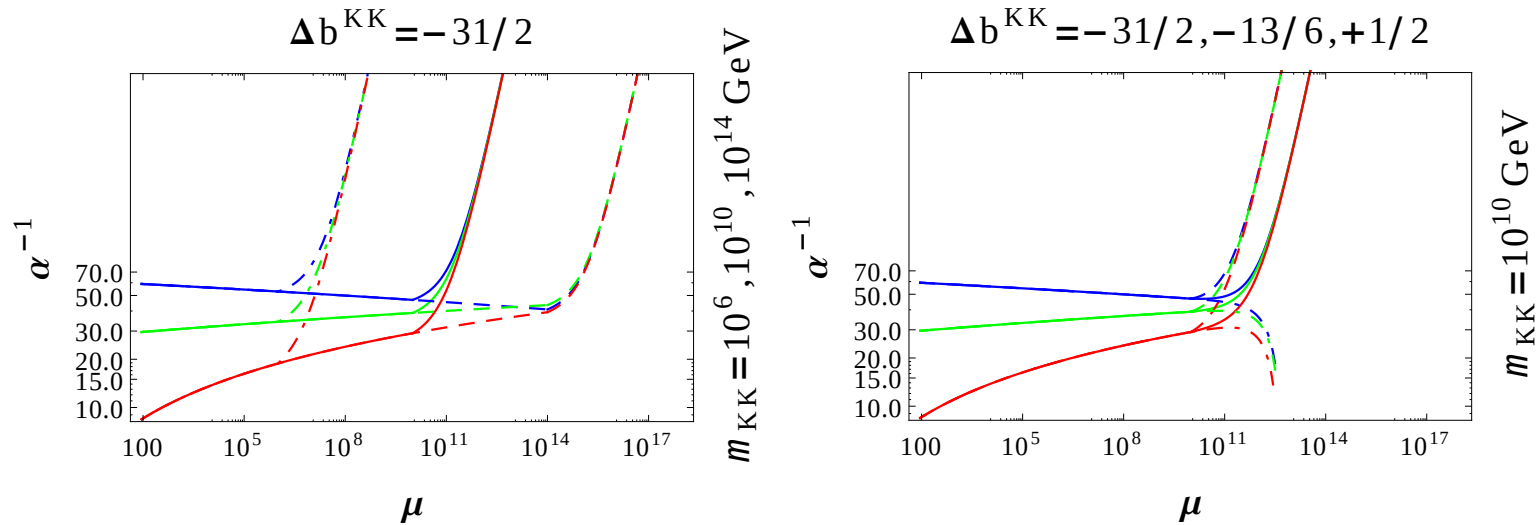


文献 [8, N.Y.'16] の図2で左から $(n_{32}, n_{11}) = (3, 0), (5, 4)$

境界条件：ゲージ結合定数 (@ $\mu = M_Z \simeq 91 \text{ GeV}$) Ref. [15, PDG'14]

$$\alpha_{3C} \simeq 0.118, \quad \alpha_{2L} = \frac{\alpha_{em}}{\sin^2 \theta_W}, \quad \alpha_{1Y} = \frac{5\alpha_{em}}{3 \cos^2 \theta_W}, \quad \alpha_{em}^{-1} \simeq 128, \quad \sin^2 \theta_W \simeq 0.23.$$

5D $SO(11)$ GHGUTでのゲージ結合定数の繰り込み群発展



文献 [8, N.Y.'16] の図3で左図はKKスケール, 右図は β 関数の係数違う場合

境界条件：ゲージ結合定数 (@ $\mu = M_Z \simeq 91 \text{ GeV}$) Ref. [15, PDG'14]

$$\alpha_{3C} \simeq 0.118, \quad \alpha_{2L} = \frac{\alpha_{em}}{\sin^2 \theta_W}, \quad \alpha_{1Y} = \frac{5\alpha_{em}}{3 \cos^2 \theta_W}, \quad \alpha_{em}^{-1} \simeq 128, \quad \sin^2 \theta_W \simeq 0.23.$$

4. ま と め

Kaluza-Klein(KK) 展開を用いて五次元の $SO(11)$ ゲージ・ヒッグス大統一理論での四次元の標準理論のゲージ結合定数が漸近的自由性を持ち, KK スケールよりも十分高エネルギーで統一することを説明した.

その他

- もし標準理論のゲージ群を大統一ゲージ群(すくなくとも可換リー群を含む半単純リー群)に埋め込まないと必ず発散する.
- 今回の繰り込み群の解析は文献 [12, N.Y.'15] を使うと任意のゲージ群について行える(詳細は文献 [8, N.Y.'16] を参照).

References

- [1] K. Agashe, R. Contino, and A. Pomarol, “The Minimal composite Higgs model,” *Nucl. Phys. B* **719** (2005) 165–187, [arXiv:hep-ph/0412089 \[hep-ph\]](#).
- [2] Y. Hosotani, K. Oda, T. Ohnuma, and Y. Sakamura, “Dynamical Electroweak Symmetry Breaking in $SO(5) \times U(1)$ Gauge-Higgs Unification with Top and Bottom Quarks,” *Phys. Rev. D* **78** (2008) 096002, [arXiv:0806.0480 \[hep-ph\]](#).
- [3] Y. Hosotani, S. Noda, and N. Uekusa, “The Electroweak Gauge Couplings in $SO(5) \times U(1)$ Gauge-Higgs Unification,” *Prog. Theor. Phys.* **123** (2010) 757–790, [arXiv:0912.1173 \[hep-ph\]](#).
- [4] S. Funatsu, H. Hatanaka, Y. Hosotani, Y. Orikasa, and T. Shimotani, “LHC Signals of the $SO(5) \times U(1)$ Gauge-Higgs Unification,” *Phys. Rev. D* **89** no. 9, (2014) 095019, [arXiv:1404.2748 \[hep-ph\]](#).
- [5] S. Funatsu, H. Hatanaka, Y. Hosotani, Y. Orikasa, and T. Shimotani, “Dark Matter in the $SO(5) \times U(1)$ Gauge-Higgs Unification,” *PTEP* **2014** (2014) 113B01, [arXiv:1407.3574 \[hep-ph\]](#).

- [6] S. Funatsu, H. Hatanaka, and Y. Hosotani, “ $H \rightarrow Z\gamma$ in the Gauge-Higgs Unification,” *Phys. Rev.* **D92** (2015) 115003, [arXiv:1510.06550 \[hep-ph\]](#).
- [7] Y. Hosotani and N. Yamatsu, “Gauge-Higgs Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015** (2015) 111B01, [arXiv:1504.03817 \[hep-ph\]](#).
- [8] N. Yamatsu, “Gauge Coupling Unification in Gauge-Higgs Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016** (2016) 043B02, [arXiv:1512.05559 \[hep-ph\]](#).
- [9] Y. Hosotani, “Dynamical Mass Generation by Compact Extra Dimensions,” *Phys.Lett.* **B126** (1983) 309.
- [10] Y. Hosotani and N. Yamatsu, “Gauge-Higgs Grand Unification,” *PoS PLANCK2015* (2015) 058, [arXiv:1511.01674 \[hep-ph\]](#).
- [11] A. Furui, Y. Hosotani, and N. Yamatsu, “Toward Realistic Gauge-Higgs Grand Unification,” [arXiv:1606.07222 \[hep-ph\]](#).
- [12] N. Yamatsu, “Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building,” [arXiv:1511.08771 \[hep-ph\]](#).
- [13] R. Slansky, “Group Theory for Unified Model Building,” *Phys. Rept.* **79** (1981) 1–128.

- [14] W. G. McKay and J. Patera, *Tables of Dimensions, Indices, and Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.
- [15] **Particle Data Group** Collaboration, K. A. Olive *et al.*, “Review of Particle Physics (RPP),” *Chin.Phys.* **C38** (2014) 090001.