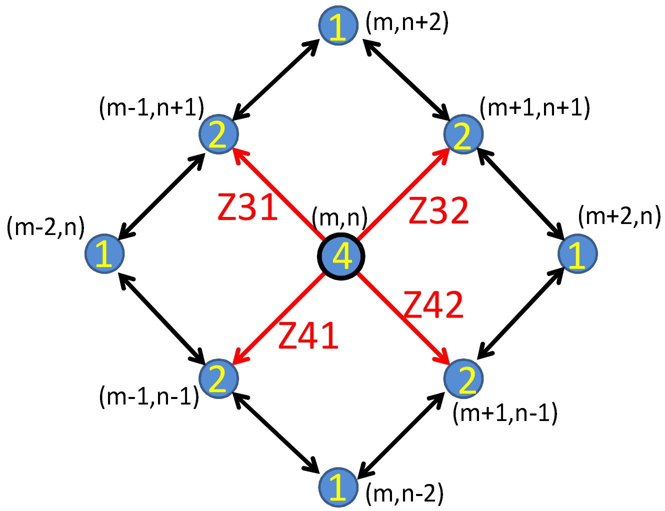
中心拡大された $\mathrm{sl}(2|2)$ 代数とその表現

Takuya Matsumoto

Utrecht University

セミナー at 京都大学　　December 18, 2013



collaboration work with

Alexander Molev (University of Sydney)

based on `arXiv:1401.XXXX` (in preparation).

超リー代数 $\mathbf{su}(2|2)$ を考える動機

1. AdS/CFT **対応におけるスピン鎖模型の対称性** [Beisert 2005]

$$\mathbf{psu}(2,2|4) \to \mathbf{su}(2|2) \oplus \mathbf{su}(2|2) \quad \curvearrowright \quad \mathcal{S}_{AdS/CFT} \simeq \mathcal{R} \otimes \mathcal{R}$$

2. 1 **次元ハバード模型の対称性** [Beisert] [Shastry]

$$\mathbf{su}(2|2) \quad \curvearrowright \quad \mathcal{S}_{Shastry} \simeq \mathcal{F}\mathcal{R}\mathcal{F}$$

3. **超リー代数の中で、唯一** 2 **個の中心拡大を持つ代数** [Iohara Koga]

$$\mathbf{su}(2|2) \oplus \mathbb{C}^{2}$$

ヤンギアン対称性 $\mathcal{Y}(\mathrm{su}(2|2))$

1. AdS/CFT **対応におけるスピン鎖模型の 無限次元 対称性** [Beisert 2007]

$$\mathcal{S}_{AdS/CFT} \simeq \mathcal{R} \otimes \mathcal{R} \qquad [J, \mathcal{R}] = 0 \qquad J \in \mathcal{Y}(\mathrm{su}(2|2))$$

2. 1 **次元ハバード模型の 無限次元 対称性**

$$\mathcal{S}_{Shastry} \simeq \mathcal{F}\mathcal{R}\mathcal{F} \qquad [J, \mathcal{S}_{Shastry}] = 0 \qquad J \in \mathcal{Y}(\mathrm{su}(2|2))$$

3. $\mathbf{2} \times \infty$ **個の大きな中心を持つ代数**

$$\mathcal{Y}(\mathrm{su}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2)$$

動機と目的

(無限次元) 代数とその表現から、AdS/CFT 対応の背後にある可積分構造を理解したい。そのために、AdS/CFT 対応におけるスピン鎖模型の対称性である、中心拡大された超リー代数 $\mathbf{su}(2|2)$ の (有限次元) 既約表現を分類したい。

方法

$\mathbf{sl}(2) \oplus \mathbf{sl}(2)$ 代数の表現から $\mathbf{sl}(2|2)$ の表現を誘導する。(Kac の方法)
既約性の判定には Mickelsson-Zhelobenko の技術を用いた。

結果

中心拡大された $\mathbf{su}(2|2)$ 代数の新しい有限次元既約表現を見つけた。

Plan

0. Introduction
1. $\mathbf{gl}(\boldsymbol{M}|\boldsymbol{N})$ から $\mathbf{sl}(\mathbf{2}|\mathbf{2}) \oplus \mathbb{C}^{\mathbf{2}}$ まで (review)
2. $\mathbf{su}(\mathbf{2}|\mathbf{2})$ スピン鎖模型 (review)
3. $\mathbf{sl}(\mathbf{2}|\mathbf{2}) \oplus \mathbb{C}^{\mathbf{2}}$ の有限次元既約表現
4. まとめ

$\mathfrak{gl}(4|4)$ から $\mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ まで

$D=4$ $\mathcal{N}=4$ Superconformal algebra $\mathrm{psu}(2,2|4)$

- リー代数 $\mathrm{gl}(M)$ は生成子 E_{ij} $(i,j=1,\cdots,M)$ で生成され、次の関係式をみたす。;

$$[E_{ij},E_{kl}]=\delta_{jk}E_{il}-\delta_{il}E_{jk}$$

- スーパーリー代数 $\mathrm{gl}(M|N)$ は生成子 E_{ij} $(i,j=1,\cdots,M+N)$ で生成され、次の関係式をみたす。;

$$[E_{ij},E_{kl}]=\delta_{jk}E_{il}-\delta_{il}E_{jk}(-1)^{(\bar{i}+\bar{j})(\bar{k}+\bar{l})}$$

ここで、パリティーは次のように定義する；

$$\bar{i}=\begin{cases}0 & \text{for} \quad i=1,\cdots,M\\ 1 & \text{for} \quad i=M+1,\cdots,M+N\end{cases}$$

$D=4$ $\mathcal{N}=4$ Superconformal algebra $\mathrm{psu}(2,2|4)$

even の添え字 $a, b, \ldots$, odd の添え字 $\alpha, \beta, \ldots$ について分解すると、

$$(E)_{ij} = \left(\begin{array}{c|c} E_{ab} & E_{a\beta} \\ \hline E_{\alpha b} & E_{\alpha\beta} \end{array}\right) \in \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{gl}(M) & \text{odd} \\ \hline \text{odd} & \mathrm{gl}(N) \end{array}\right)$$

$\mathrm{gl}(M|N)$ の bosonic 部分代数は $\mathrm{gl}(M) \oplus \mathrm{gl}(N)$ である。

ここで、$\mathrm{gl}(M) \oplus \mathrm{gl}(N) = \mathrm{sl}(M)_R \oplus \mathrm{sl}(N)_L \oplus \mathrm{u}(1)_C \oplus \mathrm{u}(1)_B$ の分解を顕わにみるため、次のような生成子書き換える；

$$E_{ab} = R_{ab} + \delta_{ab}\tfrac{1}{2}(C+B) \qquad E_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}\tfrac{1}{2}(C-B)$$

where

$$R_{ab} := E_{ab} - \delta_{ab}\tfrac{1}{M}E_{ll} \qquad C := \tfrac{1}{M}E_{ll} + \tfrac{1}{N}E_{\lambda\lambda}$$

$$L_{\alpha\beta} := E_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\tfrac{1}{N}E_{\lambda\lambda} \qquad B := \tfrac{1}{M}E_{ll} - \tfrac{1}{N}E_{\lambda\lambda}$$

$D=4$ $\mathcal{N}=4$ Superconformal algebra $\mathrm{psu}(2,2|4)$

つまり

$$\left(\begin{array}{c|c} E_{ab} & E_{a\beta} \\ \hline E_{\alpha b} & E_{\alpha\beta} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} R_{ab}+\delta_{ab}\frac{1}{2}(C+B) & S_{a\beta} \\ \hline Q_{\alpha b} & L_{\alpha\beta}+\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{2}(C-B) \end{array}\right)$$

トレース部分は $\frac{M-N}{2}C+\frac{M+N}{2}B$.

$M=N$ の時は、C がセンターになる。cf.

$$[C,Q]=-\left(\tfrac{1}{N}-\tfrac{1}{M}\right)Q \qquad [C,S]=\left(\tfrac{1}{N}-\tfrac{1}{M}\right)S$$

- $\mathrm{sl}(N|N)$, $\mathrm{pgl}(N|N)$, $\mathrm{psl}(N|N)$ はそれぞれ次のように定義される。;

$$\begin{aligned} \mathrm{gl}(N|N) &= \mathrm{u}(1)_B \ltimes \ \mathrm{sl}(N|N) && \text{sub alg.} \\ &= \qquad \mathrm{pgl}(N|N)\oplus \mathrm{u}(1)_C && \text{projected out} \\ &= \mathrm{u}(1)_B \ltimes \mathrm{psl}(N|N)\oplus \mathrm{u}(1)_C \end{aligned}$$

$D=4\ \mathcal{N}=4$ Superconformal algebra $\mathrm{psu}(2,2|4)$

- $\mathrm{psu}(2,2|4)$ は $\mathrm{psl}(4|4)$ の実形であり、条件

$$\begin{pmatrix} H & \\ & 1_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} A^\dagger & C^\dagger \\ B^\dagger & D^\dagger \end{pmatrix}\begin{pmatrix} H & \\ & 1_4 \end{pmatrix}=0$$

with $\quad H=\mathrm{diag}(-1,-1,+1,+1)$

によって制限される。

$AdS_5\times S^5$ 上の IIB 型超弦理論と $D=4,\mathcal{N}=4$SYM 理論との対応関係では、共通するグローバル対称性になっている。

$$\mathrm{psu}(2,2|4)\supset \mathrm{su}(2,2)\oplus\mathrm{su}(4)$$

- AdS 側： $AdS_5\times S^5$ の isometry
- SYM 側： 4D 共形代数 ($\mathrm{su}(2,2)=\mathrm{so}(2,4)$) と R 対称性 ($\mathrm{su}(4)=\mathrm{so}(6)$)

$\mathrm{psu}(2,2|4)$ から $\mathrm{su}(2|2)$ へ

弦理論側で light cone gauge **を固定し、**SYM **側で** $Z = \phi^5 + i\phi^6$ **を保つよう要請すると、**residual **対称性は** $\mathrm{psu}(2,2|4) \to \mathrm{su}(2|2) \oplus \mathrm{su}(2|2)$ **へ破れる。**

$$\begin{pmatrix} \mathrm{su}(2)_L & S & K \\ Q & \mathrm{su}(4)_R & \bar{S} \\ P & \bar{Q} & \mathrm{su}(2)_{\bar{L}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathrm{su}(2|2) & * \\ * & \mathrm{su}(2|2) \end{pmatrix}$$

さらに、all-loop **の寄与を取り込むために、弦理論側で無限に拡がった世界面、**SYM **側で** open spin chain (Trace **を忘れる。**) **を考える。**
その結果、代数は **中心拡大** **される。**

$$\mathrm{su}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2 = \begin{pmatrix} L_{\alpha\beta} & S_{a\beta} \\ Q_{\alpha b} & R_{ab} \end{pmatrix} \oplus \{P, K\}$$

$\mathrm{sl}(2|2)$ スピン鎖模型 (review)

中心拡大された $\mathrm{su}(2|2)$ 代数

代数 $R_{ab}, L_{\alpha\beta}$ はともに $\mathrm{su}(2)$ の生成子、$Q_{\alpha\beta}, S_{ab}$ は odd 生成子。

$$[Q_{\alpha a}, Q_{\beta b}] = \epsilon_{ab}\epsilon_{\alpha\beta}P$$

$$[S_{a\alpha}, S_{b\beta}] = \epsilon_{ab}\epsilon_{\alpha\beta}K$$

$$[Q_{\alpha a}, S_{b\beta}] = \delta_{ab}L_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}R_{ab} + \delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}C$$

ここで $C = \frac{1}{2}(E_{ll} + E_{\lambda\lambda})$ は $\mathrm{su}(2|2)$ の中心。

基本表現 $\mathbb{C}^{2|2} = \mathrm{span}\{|\phi^1\rangle, |\phi^2\rangle \mid |\psi^3\rangle,\ |\psi^4\rangle\}$ w/ 条件 $ad - bc = 1$

$$Q_{\alpha a}|\phi^b\rangle = a\delta_{ab}|\psi^\alpha\rangle \qquad Q_{\alpha a}|\psi^\beta\rangle = b\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon_{ak}|\phi^k\rangle$$

$$S_{a\alpha}|\phi^b\rangle = c\epsilon_{ab}\epsilon_{\alpha\kappa}|\psi^\kappa\rangle \qquad S_{a\alpha}|\psi^\beta\rangle = d\epsilon_{\alpha\beta}|\phi^b\rangle$$

SUSY 代数から中心の固有値は、次のように定まる。;

$$C = \frac{1}{2}(ad + bc) \qquad P = ab \qquad K = cd$$

$\mathrm{su}(2|2)$ スピン鎖模型

基本表現 $\mathbb{C}^{2|2} = \mathrm{span}\{|\phi^a\rangle \mid |\psi^\alpha\rangle\}$ をマグノン (スピン鎖の励起) に対応させたスピン鎖模型。;

$$|\chi\rangle = \sum_n e^{ipn}|Z\cdots Z\chi_n Z\cdots Z\rangle$$

拡大された中心 P, K は次のように作用する。; (g:coupl. const, α:const.)

$$\begin{aligned} P|\chi\rangle &= g\alpha\sum_n e^{ipn}(|Z\cdots Z\chi_n Z\cdots Z\rangle - |Z\cdots Z\chi_{n-1} Z\cdots Z\rangle) \\ &= g\alpha\sum_n e^{ipn}(1-e^{ip})|Z\cdots Z\chi_n Z\cdots Z\rangle \\ &= g\alpha(1-e^{ip})|\chi\rangle \quad (\simeq 0 \quad \text{on} \quad \mathrm{Tr}(\cdots)) \end{aligned}$$

同様に $K|\chi\rangle = g\alpha^{-1}(1-e^{-ip})|\chi\rangle$

$\mathrm{su}(2|2)$ スピン鎖模型

ここで、基本表現

$$C = \tfrac{1}{2}(ad+bd) \qquad P = ab \qquad K = cd \qquad ad - bc = 1$$

を思い出すと $C^2 - PK = 1/4$ であり、これと物理的対応

$$P = g\alpha(1-e^{ip}) \qquad K = g\alpha^{-1}(1-e^{-ip})$$

を合わせると、マグノンの **分散関係** を得る。; [Beisert 2005]

$$C = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1+16g^2\sin^2\left(\frac{p}{2}\right)}$$

- さらに、基本散乱行列 $S_{12}(16\times 16)$ も代数の対称性から、dressing phase を除いて決定される。

$$[\Delta(J), S_{12}] = 0 \qquad \text{for} \quad {}^\forall J \in \mathrm{su}(2|2)_{\mathrm{ext}}$$

$\mathbf{sl(2|2)} \oplus \mathbb{C}^{\mathbf{2}}$ の有限次元既約表現

(スーパー) リー代数の表現論の復習

- リー代数 $\mathfrak{g}$ の **表現** (ρ, V) とは、準同型 $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$;

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)] \qquad x, y \in \mathfrak{g}$$

のことをいう。特に $V = \mathbb{C}^n$ ならば、$\mathfrak{g} \ni x$ に対して、 交換関係を保つ $n \times n$ 行列 $\rho(x) \in \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$ を対応させるということ。

- V の部分空間 W が次の性質を満たすとき、W を **不変部分空間** という。;

$$\rho(x)W \in W \qquad {}^{\forall}x \in \mathfrak{g}$$

- V の不変部分空間が 0 または V(それ自身) しかないとき、表現 (ρ, V) は **既約** であるという。既約でないとき、 **可約** であるという。

- V が既約表現の直和に分解されるとき、表現 (ρ, V) は **完全可約** であるという。

例：表現 (ρ, V) で、$V = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2\}$、極大不変部分空間 $W \subset V$ の基底を $W = \mathrm{span}\{f_1, f_2\}$ とする。$({}^\forall x \in \mathfrak{g})$

可約表現

$$\rho(x)(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2) = (e_1, e_2, e_3, f_1, f_2)\begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

完全可約表現

$$\rho(x)(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2) = (e_1, e_2, e_3, f_1, f_2)\begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

例：表現 (ρ, V) で、$V = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2\}$、極大不変部分空間 $W \subset V$ の基底を $W = \mathrm{span}\{f_1, f_2\}$ とする。$({}^\forall x \in \mathfrak{g})$

可約表現　(**スーパーリー代数**, reducible but indecomposable)　[Kac]

$$\rho(x)(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2) = (e_1, e_2, e_3, f_1, f_2)\begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

完全可約表現　(bosonic **なリー代数の表現**)　[Weyl]

$$\rho(x)(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2) = (e_1, e_2, e_3, f_1, f_2)\begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$$

例：表現 (ρ, V) **で、**$V = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3, f_1, f_2\}$**、極大不変部分空間** $W \subset V$ **の基底を** $W = \mathrm{span}\{f_1, f_2\}$ **とする。**$({}^\forall x \in \mathfrak{g})$

可約表現　(**スーパーリー代数**, reducible but indecomposable) [Kac]

$$\rho(x)(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2) = (e_1, e_2, e_3, f_1, f_2)\begin{bmatrix} * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{bmatrix}$$

上のような表現から既約表現を得るには、商表現を考えればよい。

$$L := V/W = \mathrm{span}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$$

$$\rho(x)(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}$$

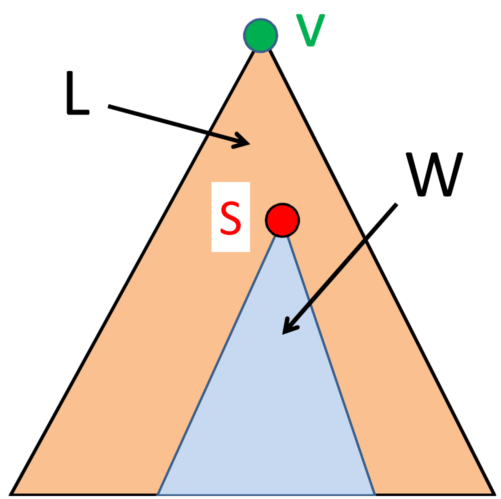
最高ウエイト表現と特異ベクトル

リー代数 $\mathfrak{gl}(N)$ の表現 L が **最高ウエイト表現** であるとは、ある $0 \neq v \in L$ が存在して、L が v によって生成され、かつ

$$\begin{aligned} E_{ij} v &= 0 \quad \text{for} \quad 1 \leq i < j \leq N \\ E_{ii} v &= \lambda_i v \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots, N, \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{1}$$

を満たすことをいう。v は最高ウエイトベクトルと呼ばれる。

$s \neq 0, v$ であって (1) を満たす $s \in L$ (**特異ベクトル**) が存在すると、s によって生成される加群 W は L の不変部分空間になる。既約表現を得るには、特異ベクトルを持たないように商表現 L/W を考えればよい。L/W の中では $s = 0$ (ヌルベクトル) になる。



スーパーリー代数の表現の一般的構成

スーパーリー代数 $\mathfrak{g}$ の分解を次のように与える。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{(0)} \oplus \mathfrak{g}_{(1)} \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{g}_{(1)} = \mathfrak{g}^{+}_{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{-}_{(1)}$$

Bosonic **部分代数** $\mathfrak{g}_{(0)}$ **の表現から、スーパーリー代数の表現を誘導する。**

$$\mathfrak{g}^{+}_{(1)} L_{(0)} \equiv 0 \quad \text{と定義する。}$$

$$K := U(\mathfrak{g}) \otimes_{(\mathfrak{g}_{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{+}_{(1)})} L_{(0)} = U(\mathfrak{g}^{-}_{(1)}) \otimes L_{(0)} \quad \text{(Kac 加群)}$$

Kac **加群の次元は** $\dim K = 2^{\dim \mathfrak{g}^{-}_{(1)}} \cdot \dim L_{(0)}$

Kac **加群は一般に** **既約とは限らない**!

(**既約** "Typical" or "long" / **可約** "Atypical" or "short") **従って、**

$$\mathfrak{g} \text{ の有限次元既約表現} \equiv \text{Kac 加群の既約商 (irreducible quotient)}$$

$$= K/W \quad (W\text{ : 極大部分空間})$$

$\mathrm{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ 表現と最高ウエイトベクトル

$\mathrm{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ の一般の表現は、最高ウエイト表現...? とは限らない!

(例) 基本表現　$\mathbb{C}^{2|2} = \mathrm{span}\{|\phi^1\rangle, |\phi^2\rangle \mid |\psi^3\rangle, |\psi^4\rangle\}$

$$E_{12}|\phi^1\rangle = 0 \qquad E_{34}|\psi^3\rangle = 0$$

$$E_{23}|\phi^1\rangle = -c|\psi^3\rangle \qquad E_{23}|\psi^3\rangle = d|\phi^2\rangle$$

$c = 0,\ d = 1$ ならば、$|\phi^1\rangle$ が最高ウエイトベクトル。
このとき $K = cd = 0$

$K = 0$ ならば、$\mathrm{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ の任意の表現は最高ウエイト表現である。 [TM Molev]

$(\because)$ $[E_{13}, E_{24}] = -[E_{23}, E_{14}] = K = 0$ positive gen. が可換になる。

Q. 表現を「捻って」、$K = 0$(固有値) とすることは可能か？

A. YES! $SL(2,\mathbb{C})$ 自己同型 を使えばよい。

$\mathrm{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ の $SL_2(\mathbb{C})$ 自己同型

自己同型 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes SL_2(\mathbb{C})$ (対称性の対称性) は、中心元に随伴的に作用する；

$$\begin{pmatrix} C & P \\ -K & -C \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u & v \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & P \\ -K & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ z & w \end{pmatrix}^{-1}$$

cf. 1+1D ローレンツ変換：$C^2 - PK = const.$

うまく $\tilde{\rho} := \rho \circ \phi$ と捻ると、$(\tilde{\rho}, V)$ は最高ウエイト表現に持っていける。

1. $\phi : (C, P, K) \mapsto (\tilde{C}, 0, 0)$ の時は、$\mathrm{sl}(2|2)$ の表現と同型。(known)
2. $\phi : (C, P, K) \mapsto (0, 0, 0)$ の時は、$\mathrm{psl}(2|2)$ の表現と同型。(known)
3. $\phi : (C, P, K) \mapsto (0, \tilde{P}, 0)$ の時は、調べられていない。
   $\mathrm{psl}(2|2) \oplus \mathbb{C}P$ の表現と同型。(今回の話)

$\mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ の表現の一般的構成

$\widetilde{\mathfrak{g}} := \mathfrak{sl}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2$ の分解を次のように与える。

$$\widetilde{\mathfrak{g}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{sl}_2 & \mathfrak{g}^+_{(1)} \\ \mathfrak{g}^-_{(1)} & \mathfrak{sl}_2 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \mathfrak{g}^+_{(1)} = \begin{Bmatrix} E_{13} & E_{14} \\ E_{23} & E_{24} \end{Bmatrix} \quad \mathfrak{g}^-_{(1)} = \begin{Bmatrix} E_{31} & E_{32} \\ E_{41} & E_{42} \end{Bmatrix}$$

Bosonic 部分代数 $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ の表現 $L_{(0)}(m,n)$ から、$\widetilde{\mathfrak{g}}$ の表現を誘導する;

$$\mathfrak{g}^+_{(1)} L_{(0)}(m,n) \equiv 0 \quad \text{と定義する。}$$

$$K := \mathrm{span}\{E_{41}^{\theta_1} E_{42}^{\theta_2} E_{31}^{\theta_3} E_{32}^{\theta_4} v | v \in L_{(0)}(m,n), \theta_i = 0,1\} \quad (\text{Kac 加群})$$

- 次元は $\dim K = 2^4 \cdot \dim L_{(0)}(m,n) = 16(m+1)(n+1)$.
- K の既約性は、特異ベクトルの有無を判定すればよい。

$\Rightarrow$ 特異ベクトル ($E_{i<j} s = 0$) は $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$-H.W.V($E_{12}s = E_{34}s = 0$).

$\Rightarrow$ $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$-H.W.V を調べる必要がある。(分岐則 : $\widetilde{\mathfrak{g}} \downarrow \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$)

$\mathrm{sl}(2) \oplus \mathrm{sl}(2)$ 部分代数への分岐則 1

$v_{m,n} \in K$ を $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$-H.W が (m,n) の $\tilde{\mathfrak{g}}$ の最高ウエイトベクトルとする;

$$E_{i<j} v_{m,n} = 0 \ , \quad h_1 v_{m,n} = m v_{m,n} \ , \quad h_3 v_{m,n} = n v_{m,n} \ .$$

ここで、$h_1 = E_{11} - E_{22}$, $h_3 = E_{33} - E_{44}$.

Obs. Super charges $E_{32}, E_{31}, E_{42}, E_{41} \simeq Q_{\alpha a}$ によって v のウエイトを $(m \pm 1, n \pm 1)$ と動かすことが出来るが、それらは必ずしも $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$-H.W.V とは限らない。

$$E_{12}(E_{32} v_{m,n}) = E_{34}(E_{32} v_{m,n}) = 0$$

$$E_{12}(E_{31} v_{m,n}) = -E_{32} v_{m,n} \neq 0 \ , \quad E_{34}(E_{31} v_{m,n}) = 0$$

問題 $v_{m,n}$ を $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$-H.W.V. のままウエイトを動かすには、どのような Super charge を使えばよいか。

答え Michelsson-Zhelobenko 生成子を用いる。

Mickelson-Zhelobenko 演算子

L から $L^+ = \{E_{12}v = E_{34}v = 0 | v \in L\}$ への射影演算子 extremal projection operator を次のように定義する；

$$p := \left(1 + \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k!} E_{21}^k E_{12}^k \frac{1}{(h_1+2)\cdots(h_1+k+1)}\right)\left(1 + \sum_{l\geq 1} \frac{(-1)^l}{l!} E_{43}^l E_{34}^l \frac{1}{(h_3+2)\cdots(h_3+l+1)}\right)$$

実際、$p : L \to L^+$ は次の性質を持つ；

$$p^2 = p\ , \quad E_{12}p = E_{34}p = 0\ , \quad pE_{21} = pE_{43} = 0$$

Mickelson-Zhelobenko 演算子 $z_{ij} \equiv pE_{ij}$ は L の $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ 最高ウエイト空間への分解を explicit に与えてくれる。

$$z_{32} = pE_{32} = E_{32} \qquad \Rightarrow \quad E_{12}(z_{32}v) = E_{34}(z_{32}v) = 0$$

$$z_{31} = pE_{31} = E_{31} + E_{21}E_{32}\frac{1}{h_1+1} \quad \Rightarrow \quad E_{12}(z_{31}v) = E_{34}(z_{31}v) = 0$$

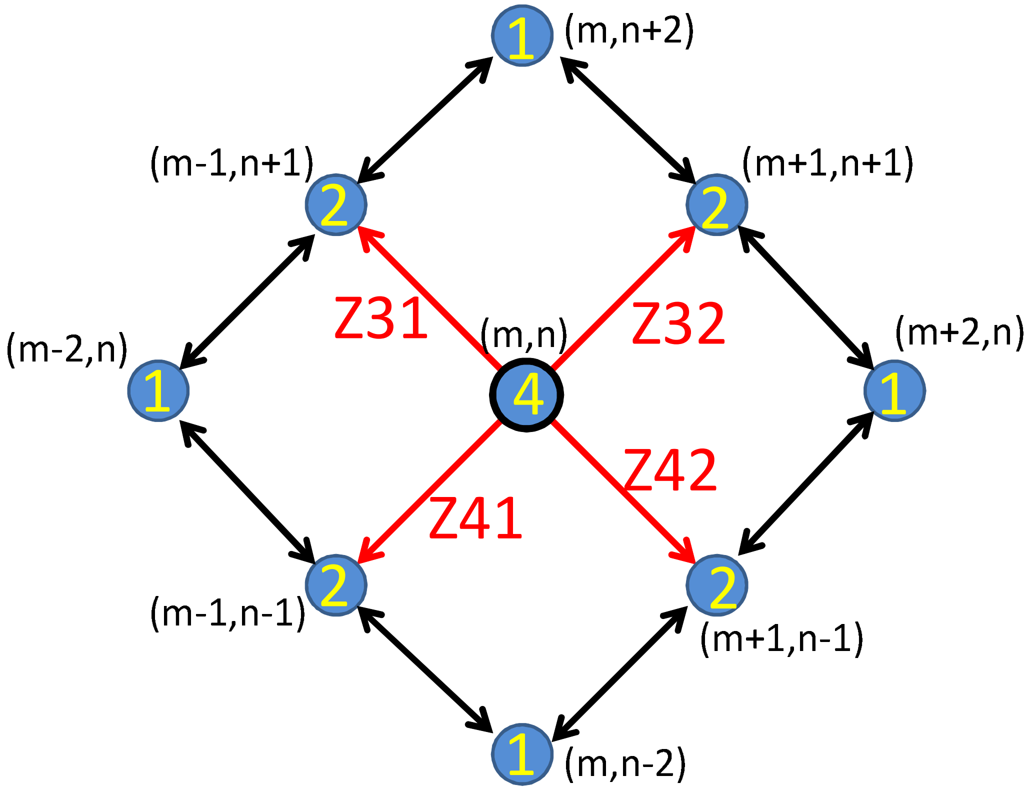
$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ 部分代数への分岐則 2

一般に Kac 加群の基底は、MZ 演算子を用いて、次のように書き換えられる；

$$K(m,n;C,P,K)$$
$$= \mathrm{span}\{E_{21}^k E_{43}^l \cdot z_{41}^a z_{31}^b z_{42}^c z_{32}^d v_0 | k,l \in \mathbb{Z}_+, a,b,c,d = 0,1\}$$

Kac 加群の $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ 加群への分解は、MZ 生成子を用いて explicit に記述できる。

$$2^4 = 1+1+1+1$$
$$+2+2+2+2$$
$$+4$$



Kac 加群の 特異ベクトル は、$z_{41}^a z_{31}^b z_{42}^c z_{32}^d v_0$ の形。

$\mathfrak{sl}(2|2)$Kac 加群の特異ベクトル -1

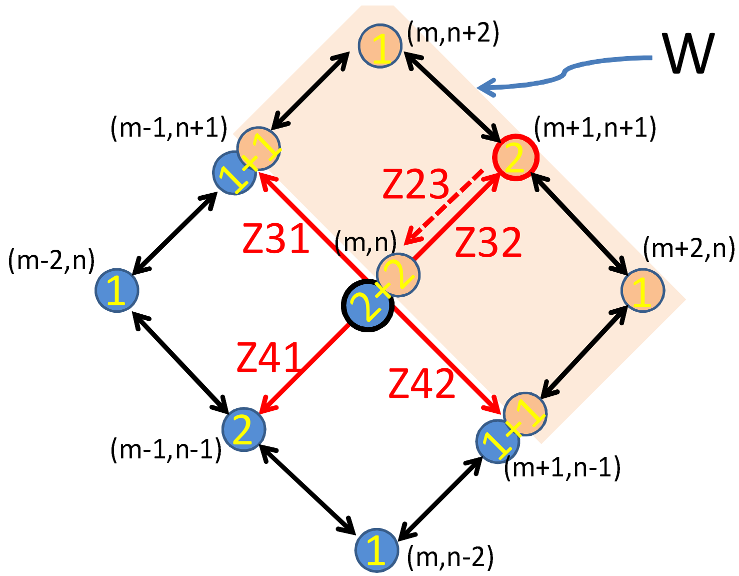
MZ 代数を見ると、$\mathfrak{sl}(2|2)$ の中心 C が特定の値をとると、特異ベクトルが存在することが分かる。;

$$z_{23}z_{32} = -\frac{h_1 - h_3 - 2C}{2} - z_{31}z_{13}\frac{1}{h_1+1} + \cdots$$

$$z_{23}z_{32}v_{m,n} = -\frac{m-n-2C}{2}v_{m,n} = 0 \quad \text{if} \quad C = \frac{m-n}{2}.$$

つまり、$C=(m-n)/2$ のとき $z_{32}v_{m,n}$ は特異ベクトル。

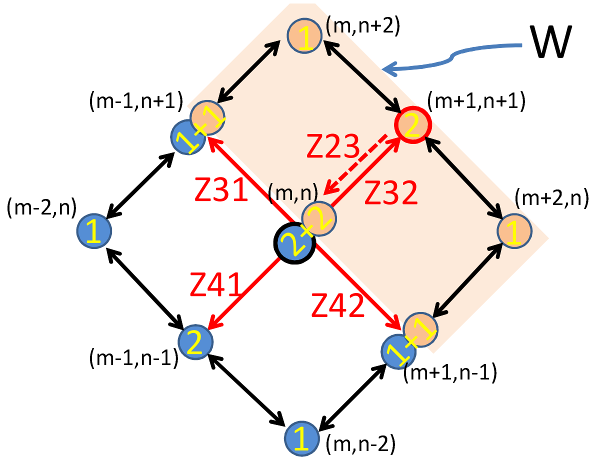
このとき Kac 加群は可約であり、既約表現は既約商 $L=K/W$ によって与えられる。



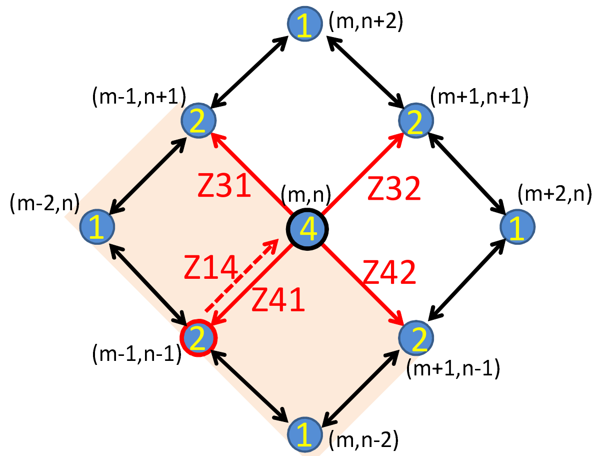
$\mathfrak{sl}(2|2)$Kac加群の特異ベクトル -2

4つの Atypical 条件 (shortning condition) がある ($C \in \mathbb{C},\ m, n \in \mathbb{Z}_+$)；

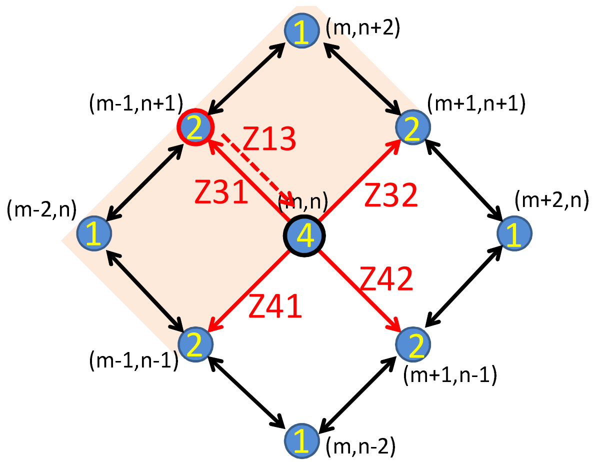
(1) $C = (m-n)/2$



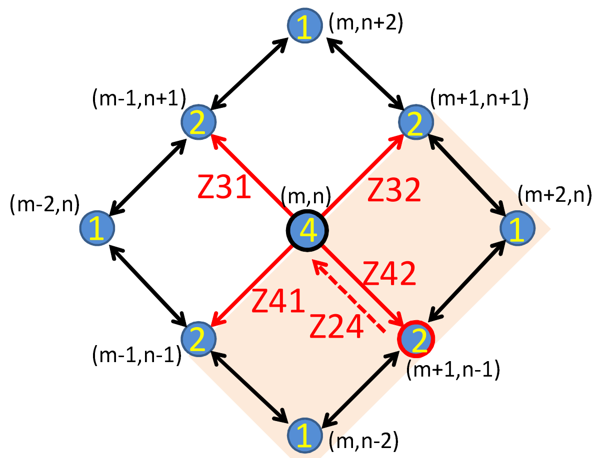
(2) $C = -(m-n)/2$



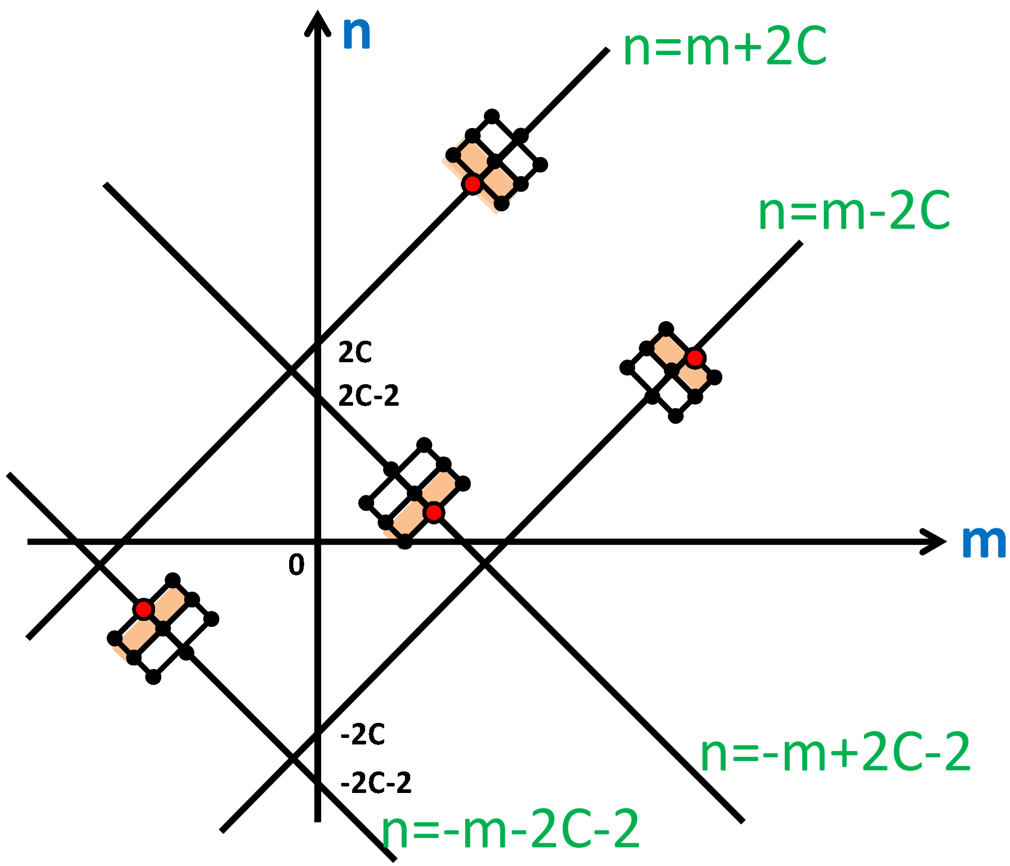
(3) $C = -(m-n+2)/2$



(4) $C = (m-n+2)/2$



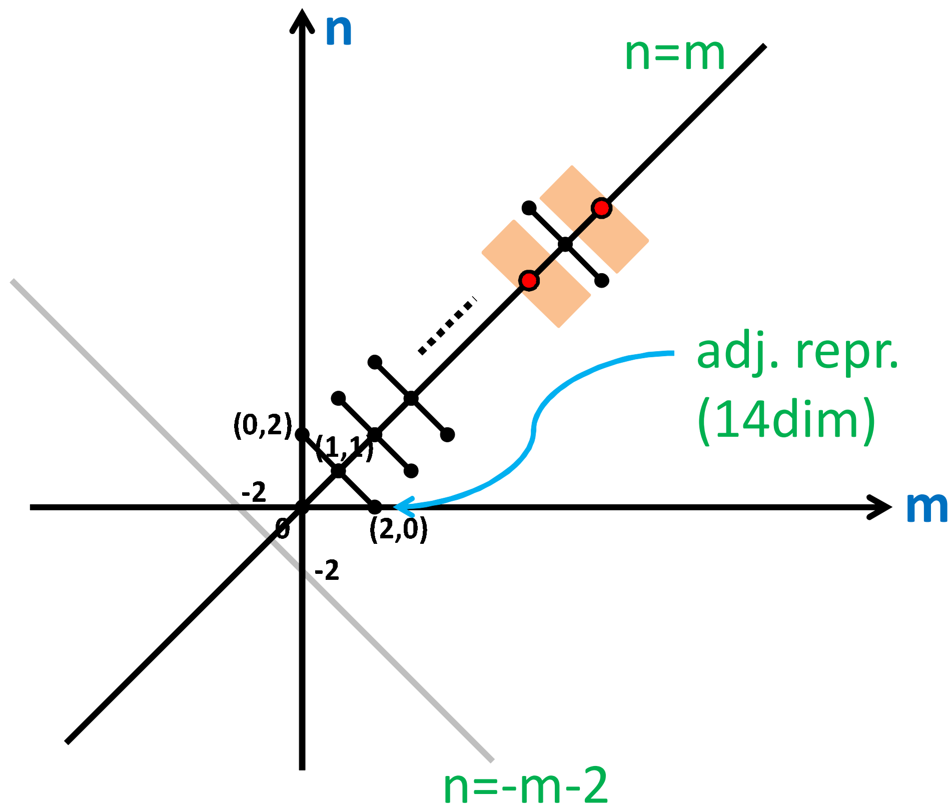
$\mathfrak{sl}(2|2)$ Kac 加群の特異ベクトル -2



- Shortning condition (4 つの直線上) を満たす場合、Kac 加群は可約
- それ以外の点では Kac 加群は既約 (typical / long mult)

$\mathfrak{psl}(2|2)$ Kac 加群の特異ベクトル

$\mathrm{sl}(2|2)$ の中心を $C=0$ とすると、
$\mathrm{psl}(2|2)$ 加群の構造が得られる。

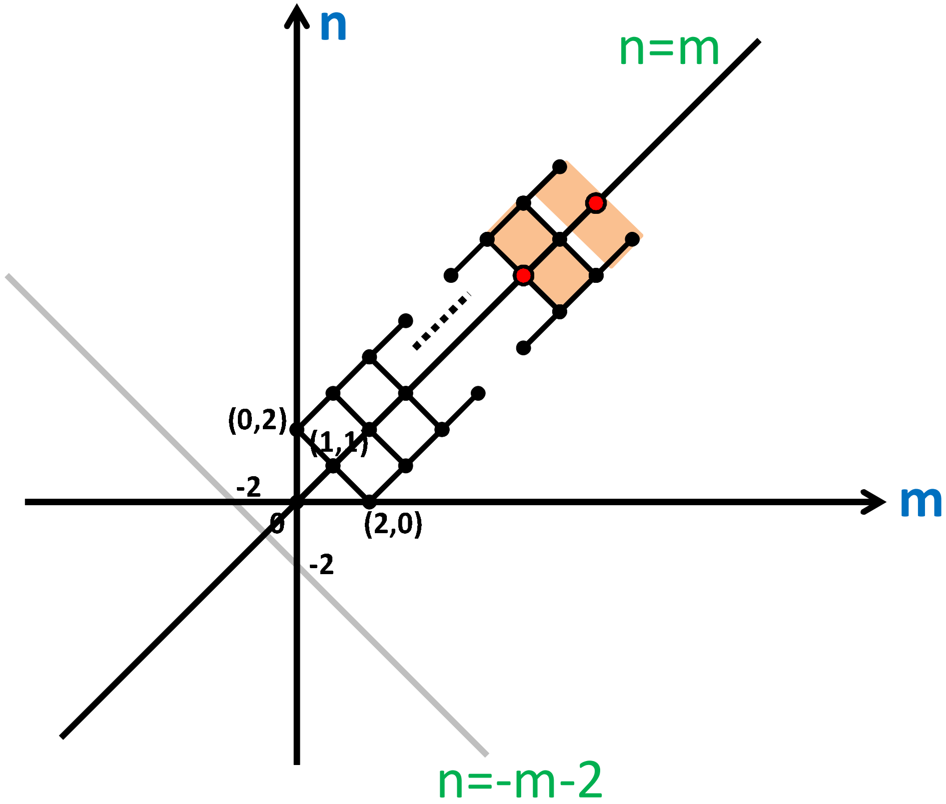


cf. adjoint 表現

$$(0+1)(2+1)+2(1+1)^2+(2+1)(0+1)=14$$

$\mathbf{psl}(2|2) \oplus \mathbb{C}P$ Kac 加群の構造

$\mathbf{psl}(2|2)$ に中心 P を付け加えると、
$\mathbf{psl}(2|2)$ 加群の short multiplet が
enhance する！ [TM Molev]

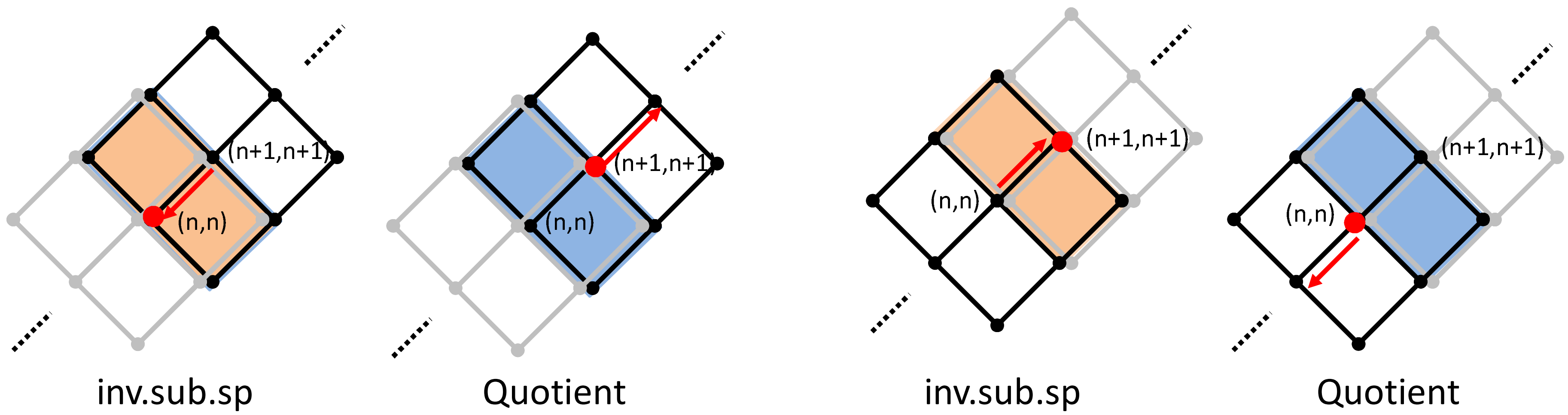


	Short of $\mathbf{psl}(2|2)$ (背骨)	"Middle" (半身)	Long(両身)
dim	$4n(n+2)+2$	$8n(n+1)$	$16(n+1)^2$

$\mathrm{psl}(2|2) \oplus \mathbb{C}P$ Kac加群の構造

Comments

- Middle 多重項は $\mathrm{sl}(2|2)$ 加群の short 多重項と似ているが、異なるもの。
- 中心拡大による。$z_{32}z_{41} = -P\frac{h_3}{h_3+1} - z_{41}z_{32}\frac{h_3(h_3+2)}{(h_3+1)^2} + \cdots$
- 2 つの最高ウエイトベクトルを持ち、4 通りの記述方法がある。



結果

中心拡大された $\mathrm{su}(2|2)$ 代数の新しい有限次元既約表現を見つけた。

- $\mathbf{psl}(2|2) \oplus \mathbb{C}\boldsymbol{P}$ の Atypical 表現 ($\boldsymbol{SL}(2,\mathbb{C})$Lorentz 変換の異なる軌道)
- $\mathbf{psl}(2|2)$ の short 多重項よりは長く、long 多重項よりは短い
- $\mathbf{2}$ つの h.w.v. を持つ。

展望

- 付随する可積模型は何か？AdS/CFT 対応としての解釈があるか？
- ヤンギアン $\mathcal{Y}(\mathrm{su}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2)$ の有限次元表現を完全に分類できるか？
- 無限次元の Lorentz 対称性 (自己同型)? $\mathcal{Y}(\mathrm{sl}(2)) \ltimes \mathcal{Y}(\mathrm{su}(2|2) \oplus \mathbb{C}^2)$

Back up

結果２ (+予想)：$\mathcal{U}(\mathrm{psu}(2|2) \oplus \mathbb{C}P)$ の表現

$(C, P, K) = (0, P, 0)$ の場場合を考える。

一般の $\mathcal{U}(\widetilde{\mathrm{su}}(2|2))$ の有限次元表現を、bosonic 部分代数 $\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現から誘導する。(Kac module)

$$
\begin{aligned}
&K(m, n; C, P, K) \\
&\qquad := \mathrm{span}\{E_{41}^a E_{31}^b E_{42}^c E_{32}^d \otimes E_{21}^k E_{43}^l v_0 | k, l \in \mathbb{Z}_+, a, b, c, d = 0, 1\}
\end{aligned}
$$

但し、v_0 はウエイト $[m, n]$ を持つ、$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$ の最高ウエイトベクトルで、$E_{ij} v_0 = 0 \text{ for } i < j$ と定義する。

1. $m \neq n$ 及び $m = n = 0$ の場合、$K(m, n; 0, P, 0)$ は既約 (Typical)。
   $\dim K(m, n; 0, P, 0) = 16(m+1)(n+1)$

2. $m = n > 0$ の場合、$K(m, m; 0, P, 0)$ は可約 (Atypical)。(予想)
   $\dim K(m, m; 0, P, 0) = 8(m+1)(m+2)$

ヤンギアン代数とは？

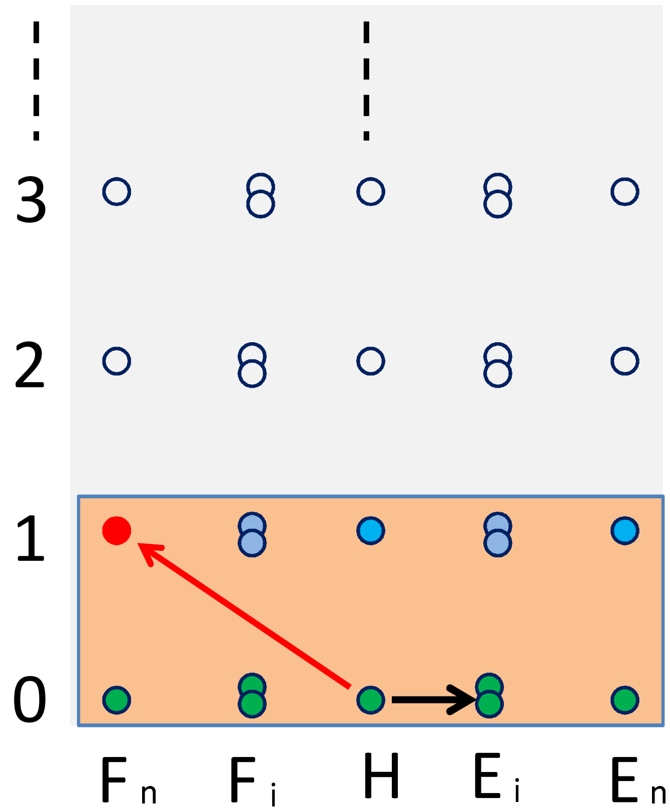
リー代数 $\mathfrak{g}$ の展開環 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ の "$\hbar$" による一変数変形で、無限次元の非可換代数で、非負整数 $(0, 1, 2 \cdots)$ のレベルを持つ。 [Drinfeld 1985]

可積分系との関係では、 **有理型** の可積分模型の対称性として現れる。

R 行列	無限次元対称性
有理型	ヤンギアン代数
三角型	量子アファイン代数
楕円型	楕円量子アファイン代数

一般に生成子は、リー代数の足 A と非負整数 n によってラベルされる。J_n^A
レベル-0 $\{J_0^A\}$ として展開環 $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ を部分代数に持つ。

ヤンギアン代数の定義方法 - 1/3



ドリンフェルトの第 1 実現

生成子は、レベル-0 J^A (**リー代数**) **とレベル**-1 $\widehat{J}^A$

$$[J^A, J^B] = f^{AB}{}_C J^C$$

$$[\widehat{J}^A, J^B] = f^{AB}{}_C \widehat{J}^C$$

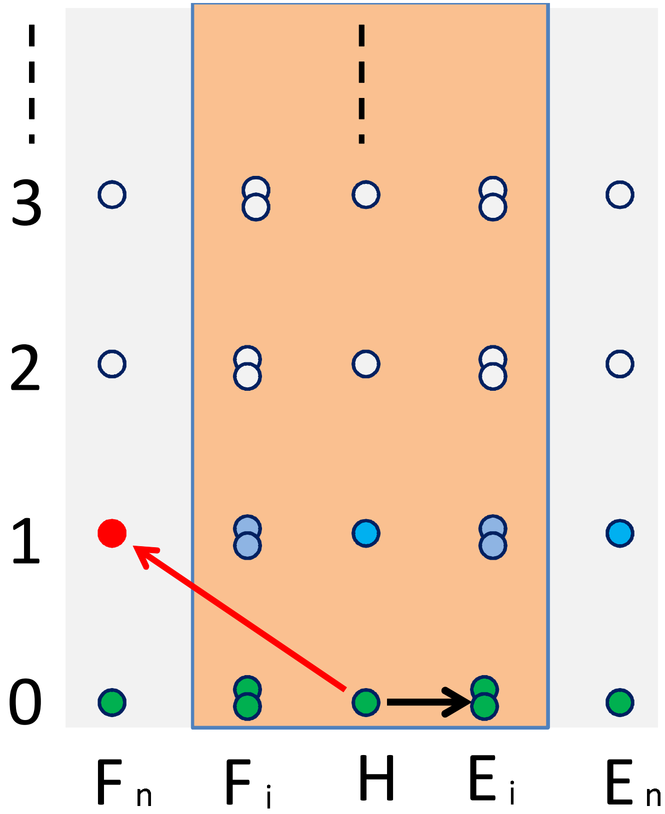
$$[[\widehat{J}^A, \widehat{J}^B], J^C] - [[\widehat{J}^A, J^B], \widehat{J}^C] = \hbar^2 a^{ABC}_{DEF} J^D J^E J^F$$

(**セール関係式**)

長所 少ない定義関係式。“座標に依らない”定義。

短所 表現論には不向き。

ヤンギアン代数の定義方法 - 2/3



ドリンフェルトの第 2 実現

生成子は、simple root **の全てのレベル** $E_{i,n}, F_{i,n}, H_{i,n}$

$$i = 1, \dots, \mathrm{rank}\mathfrak{g}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$[H_{i,n}, H_{j,m}] = 0$$

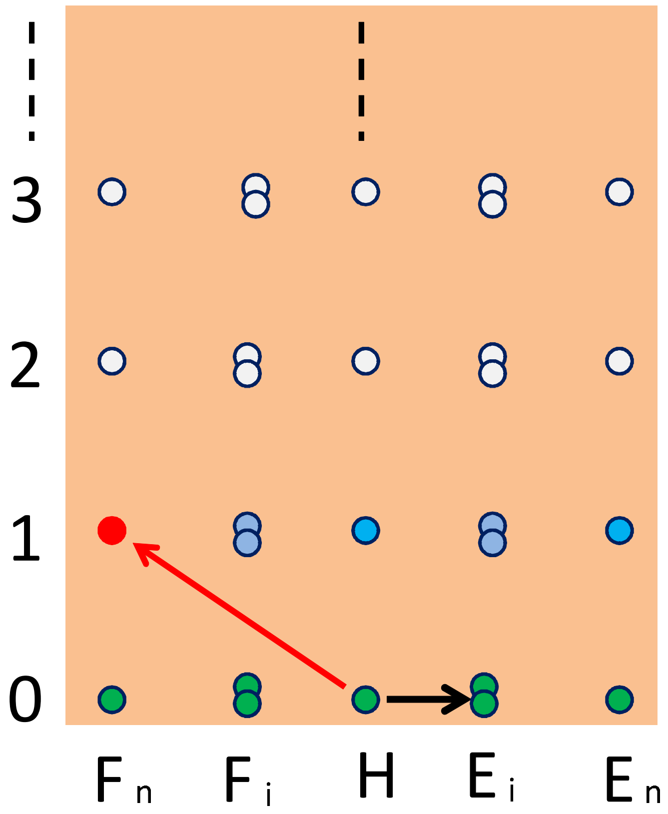
$$[H_{i,n+1}, E_{j,m}] - [H_{i,n}, E_{j,m+1}] = \frac{\hbar}{2} a_{ij} \{H_{i,n}, E_{j,m}\}$$

$\dots$

長所 **カルタン生成子を顕わに含む。** $\Rightarrow$ **表現論に適している。**

短所 **余積の構造が明白でない。**

ヤンギアン代数の定義方法 - 3/3



RTT 形式

生成子は、Non-simple root **の全てのレベル** $t_{ij}^{(n)}$

$$t_{ij}(u) := \delta_{ij} + \textstyle\sum_{n\geq 1} t_{ij}^{(n)} u^{-n}$$

$$T(u) := e_{ij} \otimes t_{ij}(u)$$

$$R_{12}(u) := 1 - P_{12}u^{-1}$$

$$R_{12}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R_{12}(u-v)$$

長所 YBE **の解としてのヤンギアン。余積も明白。表現論に適している。**

短所 **他の実現方法との関係が非自明。**“top-down”

中心拡大された $\mathrm{su}(2|2)$ 代数に基づくヤンギアン $\mathcal{Y}(\mathrm{su}(2|2))$ は、ドリンフェルトの第 1 実現の形で、Beisert によって与えられた。 [Beisert 2007]

目標

表現論が展開可能な、ドリンフェルトの第 2 実現によって $\mathcal{Y}(\mathrm{su}(2|2))$ を再定式化する。

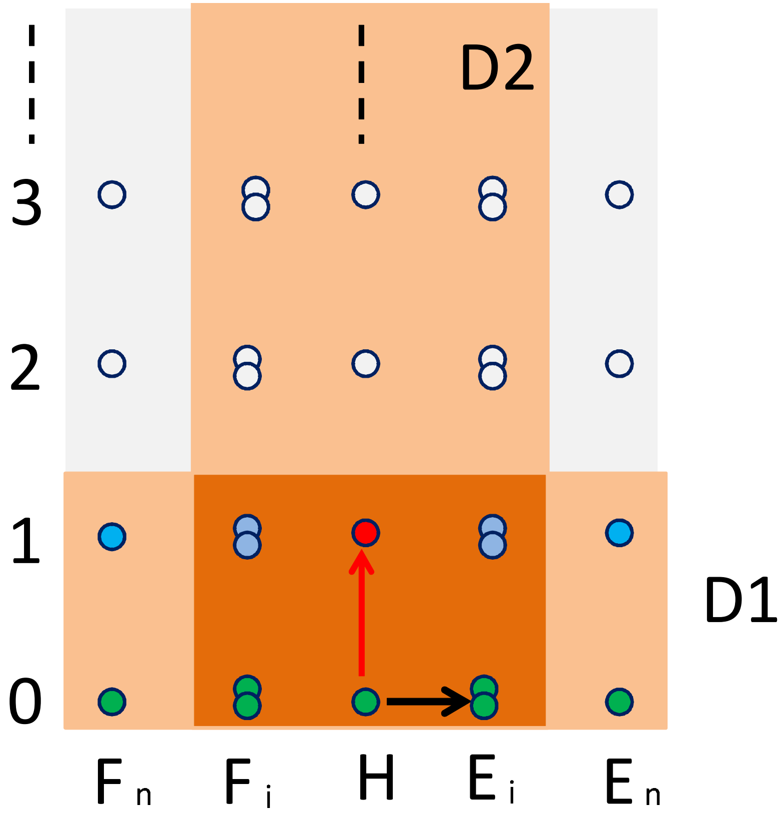
実は、第 2 実現は Spill-Torrielli による提案があるが、それと第 1 実現との同型は、自明でない。 [Spill Torrielli]

問題

第 1 実現から第 2 実現を構成するには、どうしたらよいか？

$\Rightarrow$ レベルに関する数学的帰納法によって、構成する。

第１実現から第２実現へ



レヴェンドルスキーの方法

生成子は、Simple root **の**
レベル-0 $E_{i,0}, F_{i,0}, H_{i,0}$ **と**
レベル-1 $E_{i,1}, F_{i,1}, H_{i,1}$ **のみ。**

"Boost **演算子"が定義できる。**

$$\widetilde{H}_{i,1} := H_{i,1} - \frac{1}{2}H_{i,0}^2$$

$$\Rightarrow E_{i,n+1} := \frac{1}{a_{ii}}[\widetilde{H}_{i,1}, E_{i,n}]$$

長所 "Boost **演算子"を帰納的に用いることによって、第**２**実現が構成できる。**

短所 **余積の構造が非自明。**

結果１：中心拡大された$\mathcal{Y}(\mathrm{su}(2|2))$の第２実現

生成子： $h_{i,n}, x^{\pm}_{i,n}, P^{\pm}_{n}$ ($i=2$ は fermion, O-X-O, $n = 0,1,2,\ldots$)

関係式：

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0$$

$$[x^{+}_{i,r}, x^{-}_{j,s}] = \delta_{ij} h_{i,r+s}$$

$$[h_{i,0}, x^{\pm}_{j,r}] = \pm a_{ij} x^{\pm}_{j,r}$$

$$[h_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm \tfrac{\hbar}{2} a_{ij} \{h_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}\}$$

$$[x^{\pm}_{i,r+1}, x^{\pm}_{j,s}] - [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s+1}] = \pm \tfrac{\hbar}{2} a_{ij} \{x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}\}$$

$$[x^{\pm}_{2,r}, x^{\pm}_{2,s}] = [x^{\pm}_{i,r}, x^{\pm}_{j,s}] = 0 \qquad \text{for} \qquad i+j=4$$

$$[x^{\pm}_{j,r}, [x^{\pm}_{j,s}, x^{\pm}_{2,t}]] + [x^{\pm}_{j,s}, [x^{\pm}_{j,r}, x^{\pm}_{2,t}]] = 0 \qquad \text{for} \qquad j=1,3$$

$$[[x^{\pm}_{1,r}, x^{\pm}_{2,0}], [x^{\pm}_{3,s}, x^{\pm}_{2,0}]] = \boxed{P^{\pm}_{r+s}}$$

無限個の中心を持つ。

この代数にはホップ代数、特に余積 $\Delta : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}$ の構造が入る。

中心拡大された$\mathcal{Y}(\widetilde{\mathrm{su}}(2|2))$ の PBW 定理

表現論を考える上での重要な質問：

先ほどの代数のベクトル空間としての基底は、何か？

PBW 定理

$\alpha \in \Delta_+$(正ルート全体), $r \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, 2, 3$ に対して、集合 $\{x^{\pm}_{\alpha,k},\ h_{j,m},\ P^{\pm}_r\}$ 上での任意の全順序を $\prec$ とする。$x^{\pm}_{\alpha,r}, h_{j,m}, P^{\pm}_r$ の順序つき単項式全体のうち、odd 生成子に関しては高々１次であるものの全体を $\Omega(\prec)$ とする。$\Omega(\prec)$ は $\mathcal{Y}(\mathrm{su}(2|2))$ の PBW 基底をなす。

($\because$) 完全性は、各単項式のレベルと次数に関する帰納法により従う。線形独立性は、余積 $\Delta : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y} \otimes \mathcal{Y}$ と代数射 $\tau_a : \mathcal{Y} \to \mathcal{U}$ により、十分大きな表現 $(\tau_{a_1} \otimes \cdots \otimes \tau_{a_n}) \circ \Delta^{(n-1)}$ を構成すると、その像の中で示すとこが出来る。