

c=1 行列量子力学の時間発展と GGEへの熱平衡化

2017年5月17日

京都大学理学部セミナー

森田 健 静岡大学

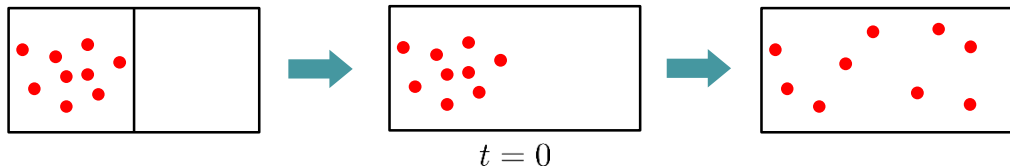
Reference :

JHEP10(2013)197 with Gautam Mandal (TIFR, Mumbai)

Work in progress Manas Kulkarni (ICTS, Bangalore), Gautam Mandal

Introduction:

量子多体系で基本的な時間発展: 熱平衡化過程

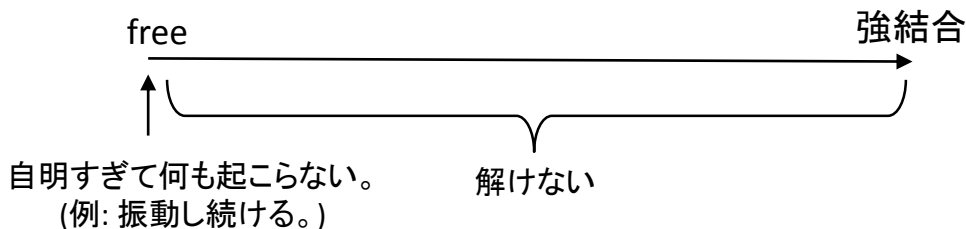


→ 一般にどんな系でも熱平衡化過程は難しい。

例) 定常状態 + ある時間に摂動を加える。

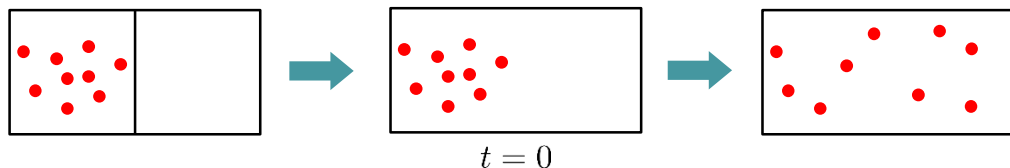
→ ある程度時間が経つと、摂動的な解析が破綻する。

→ resummationなどの非摂動的な扱いが必要。



Introduction:

量子多体系で基本的な時間発展: 熱平衡化過程



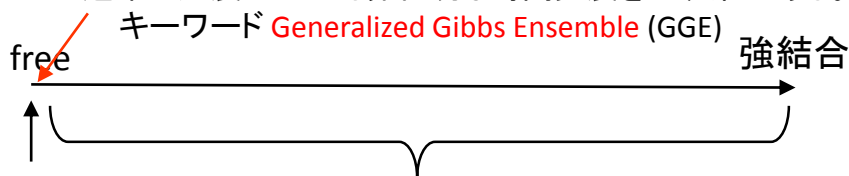
→ 一般にどんな系でも熱平衡化過程は難しい。

例) 定常状態 + ある時間に摂動を加える。

→ ある程度時間が経つと、摂動的な解析が破綻する。

→ resummationなどの非摂動的な扱いが必要。

近年の進展: freeでも非自明な時間発展を示す系がある。



自明すぎて何も起こらない。
(例: 振動し続ける。)

解けない

Introduction:

M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky, and M. Olshanii, [PRL 98, 050405 \(2007\)](#).

◆ Generalized Gibbs Ensemble (GGE)

→ 可積分系特有の「熱」状態 (近年物性理論で注目)

通常の系 (有限個の保存量)

$$E, N_i \quad (i : \text{finite number})$$

通常の熱分布関数

$$\hat{\rho}_{TH} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(-\beta (\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i) \right)$$

μ_m : 有限個の化学ポテンシャル

可積分系 (無限個保存量がある)

$$Q_m \quad (m = 1, \dots, \infty)$$

GGE分布関数

$$\hat{\rho}_{GGE} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \hat{Q}_m \right)$$

μ_m : 無限個の化学ポテンシャル

Introduction:

◆ Generalized Gibbs Ensemble (GGE)

M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky, and M. Olshanii, [PRL 98, 050405 \(2007\)](#).

→ 可積分系特有の「熱」状態 (近年物性理論で注目)

通常系 (有限個の保存量)

$$E, N_i \quad (i : \text{finite number})$$

通常熱分布関数

$$\hat{\rho}_{TH} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(-\beta (\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i) \right)$$

μ_m : 有限個の化学ポテンシャル

可積分系 (無限個保存量がある)

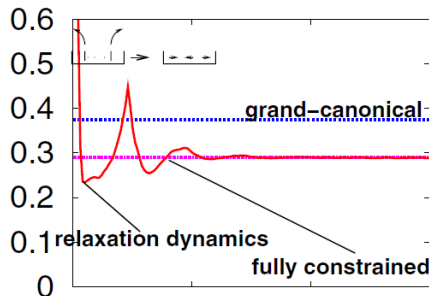
$$Q_m \quad (m = 1, \dots, \infty)$$

GGE分布関数

$$\hat{\rho}_{GGE} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \hat{Q}_m \right)$$

μ_m : 無限個の化学ポテンシャル

ある閉じた可積分系の
local observableの
時間発展



← 十分時間が経つと、
GGEの予言と実際の物理量の
時間発展が一致する。

Introduction:

◆ Generalized Gibbs Ensemble (GGE)

M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky, and M. Olshanii, [PRL 98, 050405 \(2007\)](#).

→ 可積分系特有の「熱」状態 (近年物性理論で注目)

通常の系 (有限個の保存量)

$$E, N_i \quad (i : \text{finite number})$$

通常の熱分布関数

$$\hat{\rho}_{TH} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(-\beta (\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i) \right)$$

μ_m : 有限個の化学ポテンシャル

可積分系 (無限個保存量がある)

$$Q_m \quad (m = 1, \dots, \infty)$$

GGE分布関数

$$\hat{\rho}_{GGE} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \hat{Q}_m \right)$$

μ_m : 無限個の化学ポテンシャル

- 可積分系における「熱」平衡化過程と見なせる。
- エントロピー生成などを解析的に議論できる。
- Cold atomで、実験的にもGGEを実現できる。
- 弱い相互作用系のpre-thermalization

Introduction:

◆ Generalized Gibbs Ensemble (GGE)

M. Rigol, V. Dunjko, V. Yurovsky, and M. Olshanii, [PRL 98, 050405 \(2007\)](#).

→ 可積分系特有の「熱」状態 (近年物性理論で注目)

通常系 (有限個の保存量)

$$E, N_i \quad (i : \text{finite number})$$

通常系熱分布関数

$$\hat{\rho}_{TH} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(-\beta (\hat{H} - \mu_i \hat{N}_i) \right)$$

μ_m : 有限個の化学ポテンシャル

可積分系 (無限個保存量がある)

$$Q_m \quad (m = 1, \dots, \infty)$$

GGE分布関数

$$\hat{\rho}_{GGE} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \hat{Q}_m \right)$$

μ_m : 無限個の化学ポテンシャル

弦理論でも様々な可積分な状況があるのでGGEは面白いのでは?

非臨界弦/c=1行列模型/N個のfree fermion



今回の研究

1. Introduction
2. 模型の紹介(N non-relativistic free fermion)
3. 系の時間発展
4. GGEとエントロピー生成
5. Summary

2. Model

◆ 模型: 1dim matrix model ($\longleftrightarrow$ c=1 非臨界弦)

$$S/N^2 = \frac{1}{N} \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (D_t M)^2 - V(M) \right) \quad M(t): N \times N \text{ hermite matrix}$$

$$\left(S/N^2 = \frac{1}{N} \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} |D_t U|^2 - (V_u(U) + V_u(U^\dagger)) \right) \quad U(t): N \times N \text{ unitary matrix} \right)$$

2. Model

◆ 模型: 1dim matrix model ($\longleftrightarrow$ c=1 非臨界弦)

$$S/N^2 = \frac{1}{N} \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (D_t M)^2 - V(M) \right) \quad \text{M(t): } N \times N \text{ hermite matrix}$$

$$\left(S/N^2 = \frac{1}{N} \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} |D_t U|^2 - (V_u(U) + V_u(U^\dagger)) \right) \quad \text{U(t): } N \times N \text{ unitary matrix} \right)$$

↓ 非相対論的 fermion系にmapできる。

$$S[\psi] = \int dt dx \, \psi^\dagger [i\hbar \partial_t - \hat{h}] \psi \quad \hat{h} = -\frac{1}{2} \hbar^2 (\partial_x)^2 + V(x)$$

2. Model

◆ 模型: 1dim matrix model ($\longleftrightarrow$ c=1 非臨界弦)

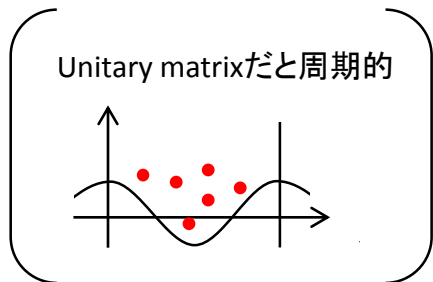
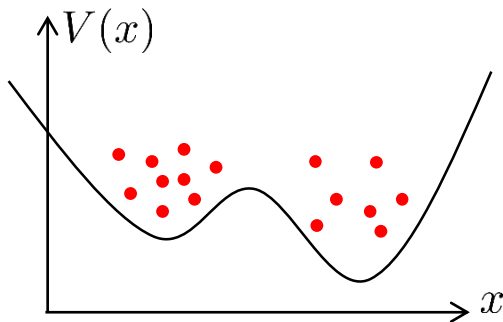
$$S/N^2 = \frac{1}{N} \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (D_t M)^2 - V(M) \right) \quad M(t): N \times N \text{ hermite matrix}$$

$$\left(S/N^2 = \frac{1}{N} \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} |D_t U|^2 - (V_u(U) + V_u(U^\dagger)) \right) \quad U(t): N \times N \text{ unitary matrix} \right)$$

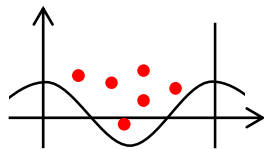
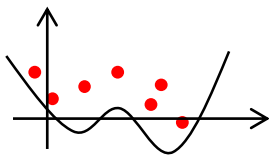
↓ 非相対論的 fermion系にmapできる。

$$S[\psi] = \int dt dx \psi^\dagger [i\hbar \partial_t - \hat{h}] \psi \quad \hat{h} = -\frac{1}{2} \hbar^2 (\partial_x)^2 + V(x)$$

適当なポテンシャル中のN個のfree fermions (non-relativistic)

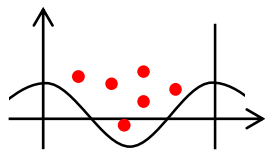
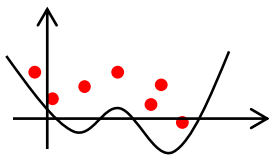


2. Model



$t=0$ で適当な状態は時間が十分経つとどうなるか？

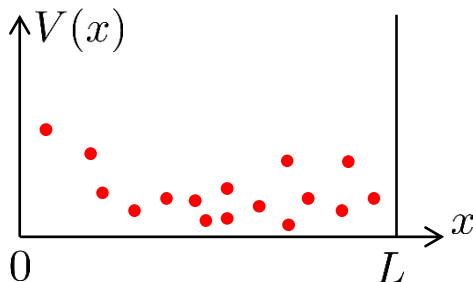
2. Model



$t=0$ で適当な状態は時間が十分経つとどうなるか?

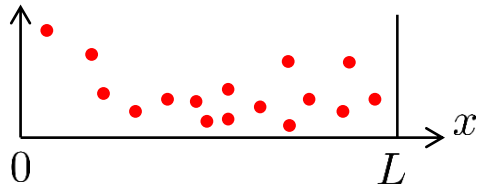
$N \rightarrow \infty, \hbar \rightarrow 0, N\hbar = 1.$
半古典極限で調べる。

(非自明な熱平衡化が期待できる)閉じた系として
 $V=0$ の周期的な場合を考える。
($V \neq 0$ への拡張は、straightforward)

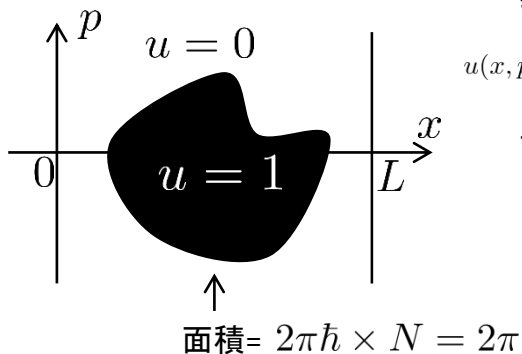


2. Model

$$V(x) = 0$$



位相空間での運動が調べやすい。



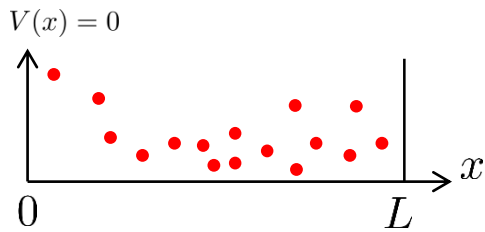
特にWigner distribution functionが有用。

$$u(x, p, t) := \int d\eta \psi^\dagger(x + \eta/2, t) \psi(x - \eta/2, t) \exp[i\eta p/\hbar]$$

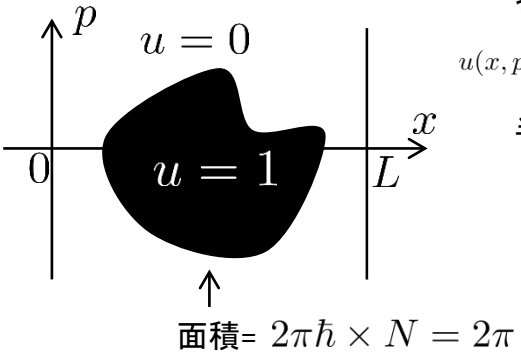
半古典的極限における運動方程式 ($N\hbar = 1$)

$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ \begin{cases} u = 1 & \text{Occupied by a fermion} \\ u = 0 & \text{Vacancy} \end{cases} \end{matrix}$$

2. Model



位相空間での運動が調べやすい。



特にWigner distribution functionが有用。

$$u(x,p,t) := \int d\eta \, \psi^\dagger(x + \eta/2, t) \psi(x - \eta/2, t) \exp[i\eta p/\hbar]$$

半古典的極限における運動方程式 $(N\hbar = 1)$

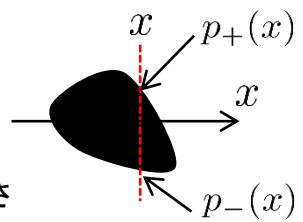
$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases} \quad \begin{matrix} \searrow \\ \begin{cases} u = 1 & \text{Occupied by a fermion} \\ u = 0 & \text{Vacancy} \end{cases} \end{matrix}$$

様々な物理量を $u(x,p,t)$ から読み取れる。

例) 粒子密度

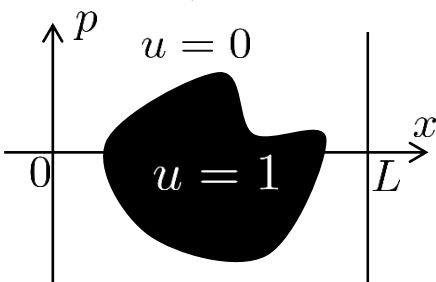
$$\rho(x,t) := \psi^\dagger(x,t) \psi(x,t) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} u(x,p,t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \underline{(p_+(x) - p_-(x))}$$

dropletの縦の長さ



1. Introduction
2. 模型の紹介(N non-relativistic free fermion)
3. 系の時間発展
4. GGEとエントロピー生成
5. Summary

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

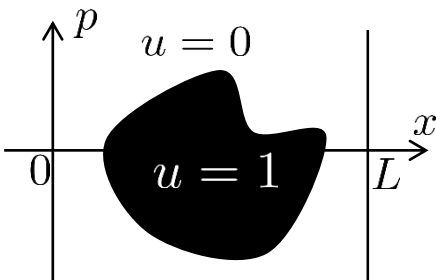


半古典的極限における運動方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases}$$

適当な初期条件の下で解けばよい。

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

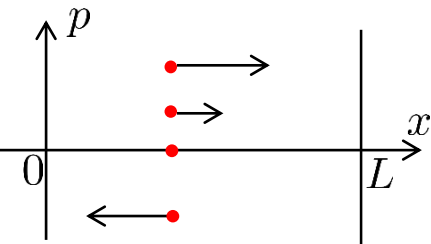


半古典的極限における運動方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases}$$

適当な初期条件の下で解けばよい。

◆ Warming-up: 1個の粒子の古典的運動



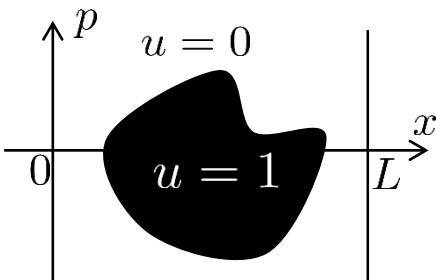
運動方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = 0 \end{cases}$$

解: 速度 p で進む。

$$\longrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + p_0 t, \\ p(t) = p_0 \end{cases}$$

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

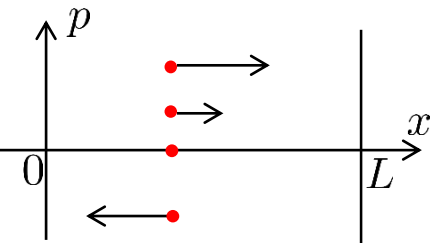


半古典的極限における運動方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases}$$

適当な初期条件の下で解けばよい。

◆ Warming-up: 1個の粒子の古典的運動

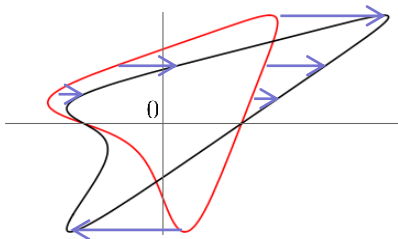


運動方程式

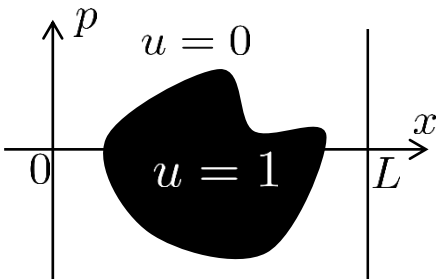
解: 速度 p で進む。

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + p_0 t, \\ p(t) = p_0 \end{cases}$$

◆ Dropletの運動(予測)



3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

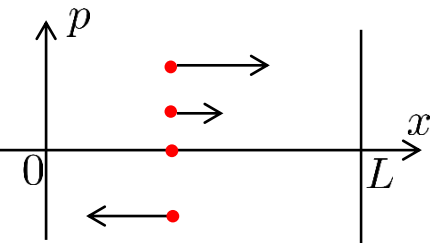


半古典的極限における運動方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases}$$

適当な初期条件の下で解けばよい。

◆ Warming-up: 1個の粒子の古典的運動



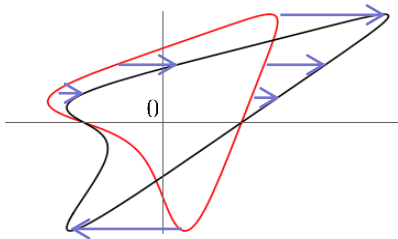
運動方程式

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = 0 \end{cases}$$

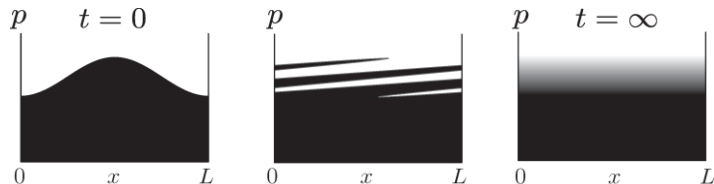
解: 速度 p で進む。

$$\longrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + p_0 t, \\ p(t) = p_0 \end{cases}$$

◆ Dropletの運動(予測)



◆ Late timeの振る舞いの予測



時間が十分経つと一様な分布(定常状態?)になりそう。

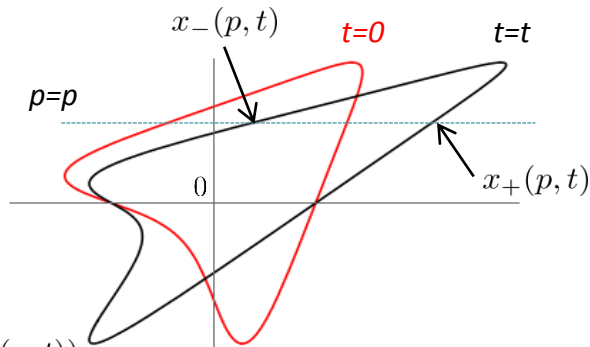
3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

半古典的極限における運動方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases}$$

$u^2 = u$ を満たす関数

$$\begin{cases} u(x, p, t) = \theta(x_+(p, t) - x) \theta(x - x_-(p, t)) \\ x_{\pm}(p, t) : \text{boundary of the droplet} \\ \theta(x) : \text{step function} \end{cases}$$



3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

半古典的極限における運動方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases}$$

$u^2 = u$ を満たす関数

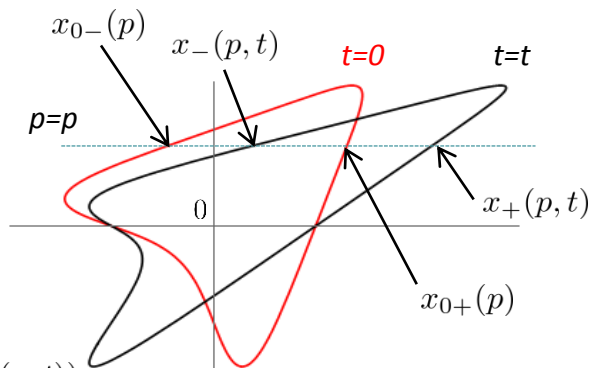
$$\begin{cases} u(x, p, t) = \theta(x_+(p, t) - x) \theta(x - x_-(p, t)) \\ x_{\pm}(p, t) : \text{boundary of the droplet} \\ \theta(x) : \text{step function} \end{cases}$$

ここで運動方程式にこの形を代入すると

$$\partial_t x_{\pm}(p, t) = p \longrightarrow \text{解: } \begin{cases} x_{\pm}(p, t) := x_{0\pm}(p) + pt. & \leftarrow \text{速度 } p \text{ で進む。} \\ x_{0\pm}(p) := x_{\pm}(p, t=0) : \text{initial profile} \end{cases}$$

まとめると

$$u(x, p, t) = \theta(x_{0+}(p) + pt - x) \theta(x - x_{0-}(p) - pt)$$



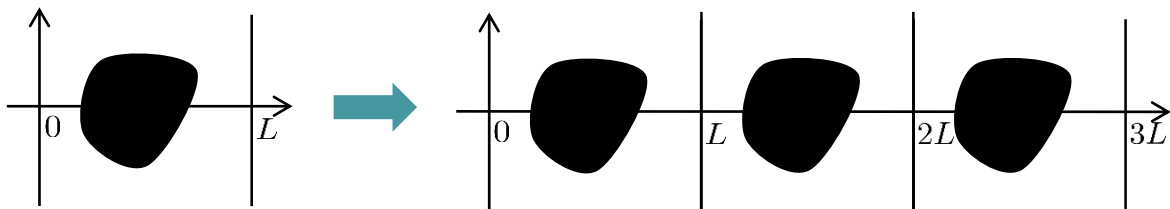
3. 時間発展 [Kulkarni-Mandal-T.M](#)

解: $u(x, p, t) = \theta(x_{0+}(p) + pt - x)\theta(x - x_{0-}(p) - pt)$

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

解: $u(x, p, t) = \theta(x_{0+}(p) + pt - x)\theta(x - x_{0-}(p) - pt)$

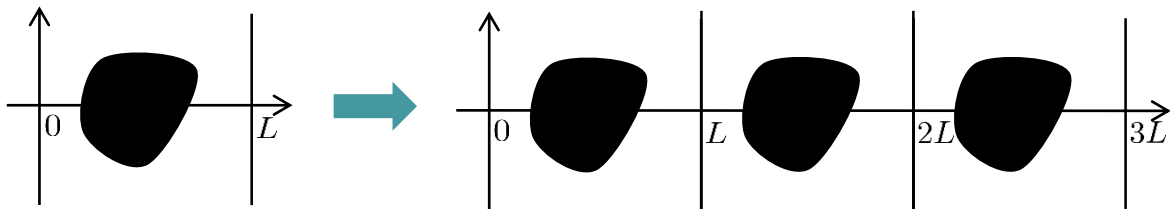
周期性 $u(x, p, t) = u(x + L, p, t)$ を課すためmirrorを導入



3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

解: $u(x, p, t) = \theta(x_{0+}(p) + pt - x) \theta(x - x_{0-}(p) - pt)$

周期性 $u(x, p, t) = u(x + L, p, t)$ を課すためmirrorを導入



$$x \rightarrow x + mL$$

$$u(x, p, t) = \sum_m \theta(x_{0+}(p) + pt - x - mL) \theta(x + mL - x_{0-}(p) - pt)$$

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

解: $u(x, p, t) = \theta(x_{0+}(p) + pt - x) \theta(x - x_{0-}(p) - pt)$

周期性 $u(x, p, t) = u(x + mL, p, t)$ を用いて、次のように変換する

Poisson Resummation Formula:

$$\sum_m f(mL) = \sum_k \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) e^{-i \frac{2\pi k z}{L}}$$

$x \rightarrow x + mL$

$$u(x, p, t) = \sum_m \theta(x_{0+}(p) + pt - x - mL) \theta(x + mL - x_{0-}(p) - pt)$$

$$= \sum_k \frac{1}{L} \int_{x_{0-}(p) + pt - x}^{x_{0+}(p) + pt - x} dz e^{-i \frac{2\pi k z}{L}}$$

$$= \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} + \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{2\pi k} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{L} z \right) \right]_{z=x_{0-}(p) + pt - x}^{z=x_{0+}(p) + pt - x}$$

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

解: $u(x, p, t) = \theta(x_{0+}(p) + pt - x) \theta(x - x_{0-}(p) - pt)$

周期性 $u(x, p, t) = u(x + L, p, t)$ を用いて、次のように変換する

Poisson Resummation Formula:

$$\sum_m f(mL) = \sum_k \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) e^{-i \frac{2\pi k z}{L}}$$

$x \rightarrow x + mL$

$$u(x, p, t) = \sum_m \theta(x_{0+}(p) + pt - x - mL) \theta(x + mL - x_{0-}(p) - pt)$$

$$= \sum_k \frac{1}{L} \int_{x_{0-}(p) + pt - x}^{x_{0+}(p) + pt - x} dz e^{-i \frac{2\pi k z}{L}}$$

$$= \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} + \frac{2}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L}{2\pi k} \left[\sin\left(\frac{2\pi k}{L} z\right) \right]_{z=x_{0-}(p) + pt - x}^{z=x_{0+}(p) + pt - x}$$

$k = 0$

$k \neq 0$

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

◆ Short Summary

半古典的極限における運動方程式

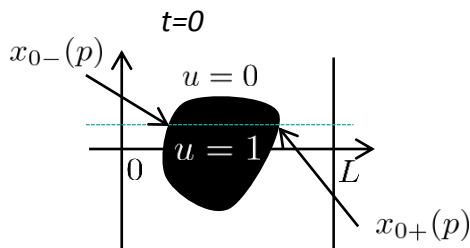
$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases}$$

解:

$$u(x, p, t) = \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{L} z \right) \right]_{z=x_{0-}(p)+pt-x}^{z=x_{0+}(p)+pt-x}$$

$$k = 0$$

$k \neq 0$ ← 系の周期に関する
ポアソン和公式の
0モードとそれ以外



$x_{0\pm}(p) := x_{\pm}(p, t=0)$: initial profile

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

◆ Short Summary

半古典的極限における運動方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases}$$

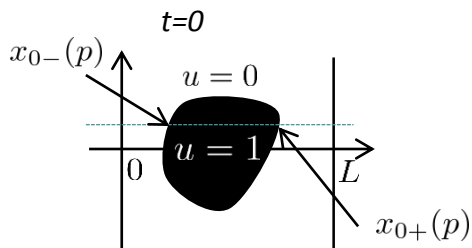
解:

$$u(x, p, t) = \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{L} z \right) \right]_{z=x_{0-}(p)+pt-x}^{z=x_{0+}(p)+pt-x}$$

$k = 0$ $k \neq 0$

↑
時間に依存しない。

↑
時間に依存する。
($t \rightarrow \infty$ で激しく振動する。)



$x_{0\pm}(p) := x_{\pm}(p, t=0)$: initial profile

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

◆ Short Summary

半古典的極限における運動方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases}$$

解:

$$u(x, p, t) = \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{L} z \right) \right]_{z=x_{0-}(p)+pt-x}^{z=x_{0+}(p)+pt-x}$$

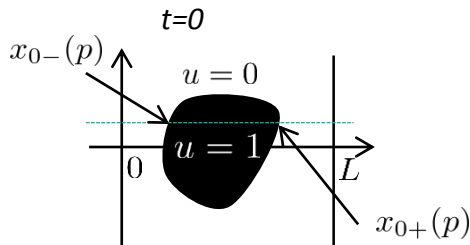
$$k = 0$$



時間に依存しない。

$t \rightarrow \infty$ での定常状態

GGE?



$x_{0\pm}(p) := x_{\pm}(p, t=0)$: initial profile

$$k \neq 0$$



時間に依存する。

($t \rightarrow \infty$ で激しく振動する。)

Damping at large t

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

◆ Short Summary

半古典的極限における運動方程式

$$\begin{cases} \partial_t u + p \partial_x u = 0 \\ u^2 = u \end{cases}$$

解:

$$u(x, p, t) = \underbrace{\frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L}}_{k=0} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{L} z \right) \right]_{z=x_{0-}(p)+pt-x}^{z=x_{0+}(p)+pt-x}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{k \neq 0}$$

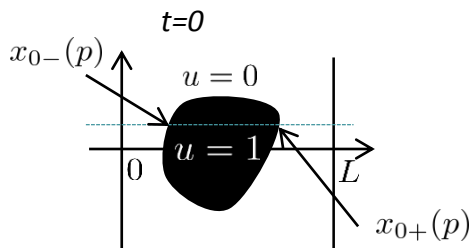
例: 粒子密度

$$\rho(x, t) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} u(x, p, t)$$

$$= \frac{N}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{dp}{\pi^2 \hbar k} \sin \left(\frac{2\pi k}{L} \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{2} \right) \cos \left(\frac{2\pi k}{L} \left(pt - x + \frac{x_{0+}(p) + x_{0-}(p)}{2} \right) \right)$$

↑
時間と空間に
依存しない一様項

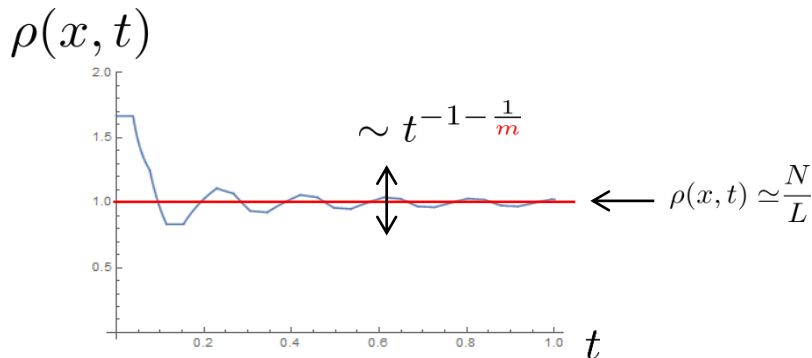
↑
いつでもPower lawでdamp $\sim t^{-1-\frac{1}{m}}$
(mの決め方は後で)



$x_{0\pm}(p) := x_{\pm}(p, t=0)$: initial profile

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

★適当な初期状態における粒子密度の時間発展 ($m=\infty$ の場合)



例: 粒子密度

$$\rho(x, t) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} u(x, p, t)$$

$$= \frac{N}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{dp}{\pi^2 \hbar k} \sin\left(\frac{2\pi k}{L} \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{L} \left(pt - x + \frac{x_{0+}(p) + x_{0-}(p)}{2}\right)\right)$$

↑

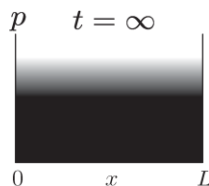
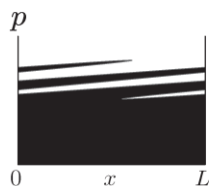
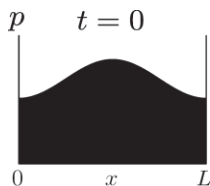
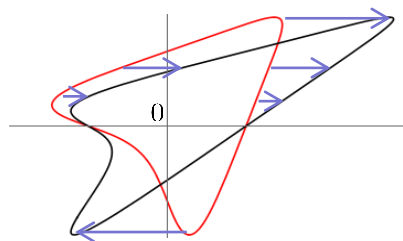
時間と空間に
依存しない一様項

↑

いつでもPower lawでdamp $\sim t^{-1 - \frac{1}{m}}$
(m の決め方は後で)

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

直感的な予測と一致



空間的に一様

$$\rho(x, t) \simeq \frac{N}{L}$$

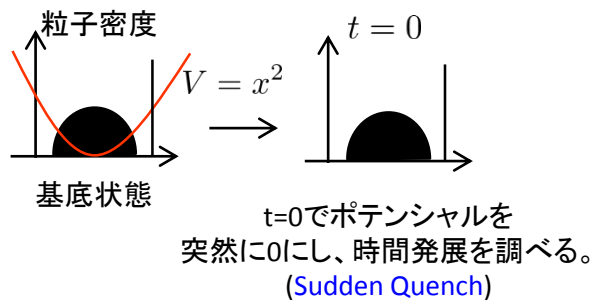
例: 粒子密度

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} u(x, p, t) \\ &= \frac{N}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{dp}{\pi^2 \hbar k} \sin\left(\frac{2\pi k}{L} \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{L} \left(pt - x + \frac{x_{0+}(p) + x_{0-}(p)}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

時間と空間に
依存しない一様項

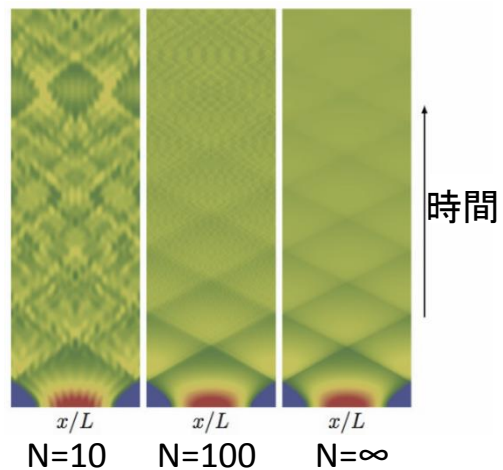
いつでもPower lawでdamp $\sim t^{-1-\frac{1}{m}}$
(mの決め方は後で)

M. Collura, S. Sotiriadis, P. Calabrese
PRL 110 245301



先行研究ともconsistent

粒子密度の時間&空間依存性



例: 粒子密度

$$\rho(x, t) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} u(x, p, t)$$
$$= \frac{N}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{dp}{\pi^2 \hbar k} \sin\left(\frac{2\pi k}{L} \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{L} \left(pt - x + \frac{x_{0+}(p) + x_{0-}(p)}{2}\right)\right)$$

↑

時間と空間に依存しない一様項

↑

いつでもPower lawでdamp $\sim t^{-1-\frac{1}{m}}$
(mの決め方は後で)

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

◆ Power law damping

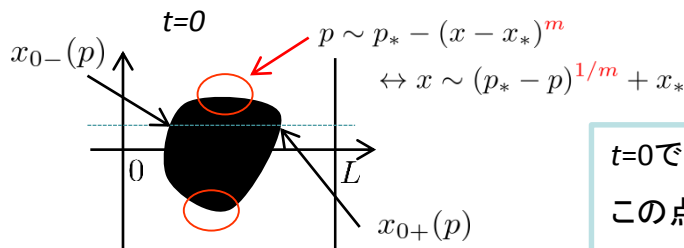
$$\rho(x, t) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} u(x, p, t)$$

$$= \frac{N}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{dp}{\pi^2 \hbar k} \sin\left(\frac{2\pi k}{L} \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{L} \left(pt - x + \frac{x_{0+}(p) + x_{0-}(p)}{2}\right)\right)$$

$$\sim t^{-1 - \frac{1}{m}}$$

→ p 積分を評価すれば良い。

$t \rightarrow \infty$ では被積分関数が激しく振動する。 → $x_{0\pm}(p)$ が特異性を示す点が一番積分に効く。



$x_{0\pm}(p) := x_{\pm}(p, t=0)$: initial profile

複数の極値では、より m の大きい点がいち早く damp するので、late time に寄与する。
 (より **扁平な極値** が重要)

$t=0$ での **極値での振る舞い** が重要。
 この点に注目し、積分を評価すると

$$\sim t^{-1 - \frac{1}{m}}$$

を示せる。

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

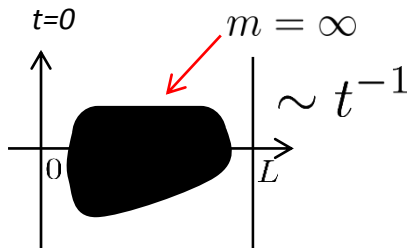
◆ Power law damping

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} u(x, p, t) \\ &= \frac{N}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{dp}{\pi^2 \hbar k} \sin\left(\frac{2\pi k}{L} \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{L} \left(pt - x + \frac{x_{0+}(p) + x_{0-}(p)}{2}\right)\right) \\ &\sim t^{-1 - \frac{1}{m}}\end{aligned}$$

→ p 積分を評価すれば良い。

$t \rightarrow \infty$ では被積分関数が激しく振動する。 → $x_{0\pm}(p)$ が特異性を示す点が一番積分に効く。

最もゆっくりdampする場合



$t=0$ での極値での振る舞いが重要。

この点に注目し、積分を評価すると

$$\sim t^{-1 - \frac{1}{m}}$$

を示せる。

3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

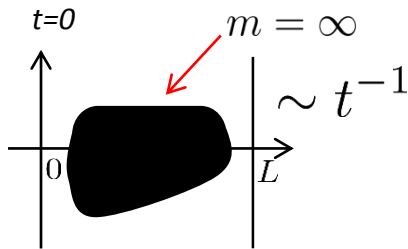
◆ Power law damping

$$\begin{aligned}\rho(x, t) &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} u(x, p, t) \\ &= \frac{N}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \int \frac{dp}{\pi^2 \hbar k} \sin\left(\frac{2\pi k}{L} \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{L} \left(pt - x + \frac{x_{0+}(p) + x_{0-}(p)}{2}\right)\right) \\ &\sim t^{-1 - \frac{1}{m}}\end{aligned}$$

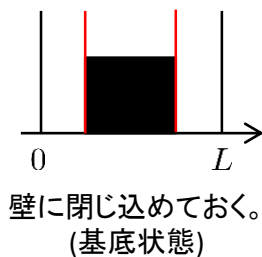
→ p 積分を評価すれば良い。

$t \rightarrow \infty$ では被積分関数が激しく振動する。 → $x_{0\pm}(p)$ が特異性を示す点が一番積分に効く。

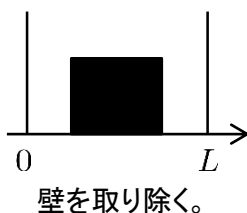
最もゆっくりdampする場合



例



$t=0$



3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

◆ Short Summary

$$u(x, p, t) = \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{L} z \right) \right]_{z=x_{0-}(p)+pt-x}^{z=x_{0+}(p)+pt-x}$$

$k = 0$



$k \neq 0$

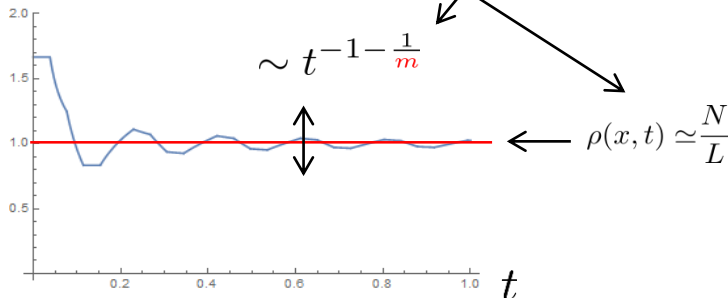


← 系の周期に関する
ポアソン和公式の
0モードとそれ以外

t=∞ の定常状態を記述

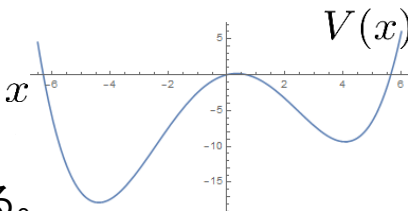
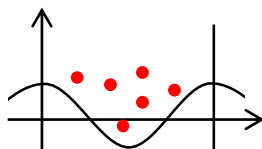
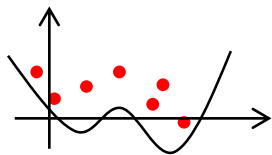
Late timeのdampingを記述

$\rho(x, t)$



3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

◆ 一般のポテンシャル中の運動



やはりN個の粒子はそれぞれ**周期運動**をしている。



周期に関して**ポアソン和公式**を適用



$$u(x,p,t) = (\text{ゼロモード}) + (\text{その他})$$



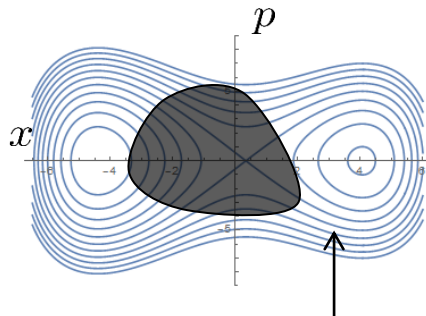
$t=\infty$ の定常状態を記述

($V=0$ と異なり、 x に依存する。)



Late timeのdampingを記述

$$\sim t^{-1-\frac{1}{m}}$$



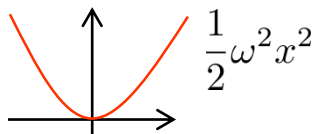
等エネルギー一面

$\rho(x,t)$

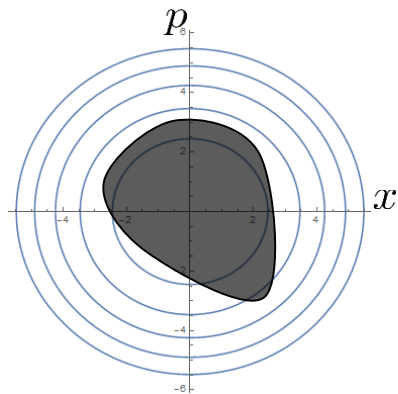


3. 時間発展 Kulkarni-Mandal-T.M

◆ 例外: 2次ポテンシャル



位相空間で永遠に回転し続ける。
(全ての粒子の周期が等しいため)



1. Introduction
2. 模型の紹介(N non-relativistic free fermion)
3. 系の時間発展
4. GGEとエントロピー生成
5. Summary

4. GGEとエントロピー生成

Mandal-T.M JHEP 10 (2013) 197, Kulkarni-Mandal-T.M

◆ 前節の結果

$$u(x, p, t) = \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{L} z \right) \right]_{z=x_{0-}(p)+pt-x}^{z=x_{0+}(p)+pt-x}$$

$k = 0$



$t=\infty$ の定常状態を記述

$k \neq 0$



Late timeのdampingを記述

← 系の周期に関する
ポアソン和公式の
0モードとそれ以外

GGEとの関係は?

$\langle \hat{u}(x, p) \rangle_{\text{GGE}}$

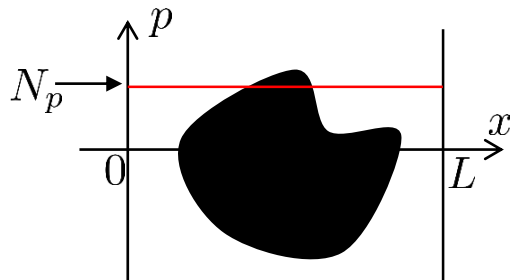
を調べれば良い。

4. GGEとエントロピー生成

Mandal-T.M JHEP 10 (2013) 197, Kulkarni-Mandal-T.M

◆ GGE

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho}_{GGE} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \hat{Q}_m \right) \\ \mu_m : \text{無限個の化学ポテンシャル} \\ \hat{Q}_m : \text{無限個の保存量} \end{array} \right.$$



今の模型では運動量 p における状態数 N_p が保存する。

$$\hat{\rho}_{GGE} = \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mu_p \hat{N}_p \right)$$

$\langle \hat{N}_p \rangle_{GGE} = N_p$ という条件から、 μ_p 決める。

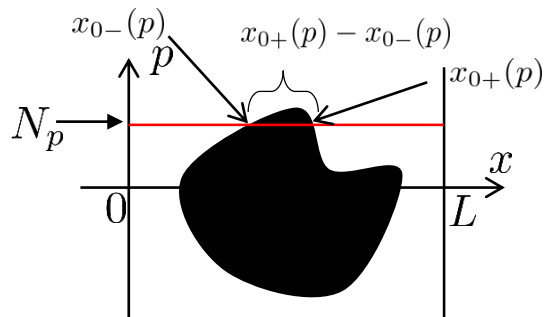
$$\begin{aligned} \langle \hat{u}(x, p) \rangle_{GGE} &= \int d\eta \, \underbrace{\langle \hat{\psi}^\dagger(x + \eta/2, t) \hat{\psi}(x - \eta/2, t) \rangle_{GGE}}_{\hat{\rho}_{GGE} \text{ で計算できる。}} \exp[i\eta p / \hbar] \\ &= \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} \end{aligned}$$

4. GGEとエントロピー生成

Mandal-T.M JHEP 10 (2013) 197, Kulkarni-Mandal-T.M

◆ GGE

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\rho}_{GGE} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \hat{Q}_m \right) \\ \mu_m : \text{無限個の化学ポテンシャル} \\ \hat{Q}_m : \text{無限個の保存量} \end{array} \right.$$



今のモデルでは運動量 p における状態数 N_p が保存する。

$$\hat{\rho}_{GGE} = \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{p=-\infty}^{\infty} \mu_p \hat{N}_p \right)$$

図からほぼ自明な結果

$\langle \hat{N}_p \rangle_{GGE} = N_p$ という条件から、 μ_p 決める。

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}(x, p) \rangle_{GGE} &= \int d\eta \, \langle \hat{\psi}^\dagger(x + \eta/2, t) \hat{\psi}(x - \eta/2, t) \rangle_{GGE} \exp[i\eta p / \hbar] \\ &= \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} \end{aligned}$$

↑
 $\hat{\rho}_{GGE}$ で計算できる。

4. GGEとエントロピー生成

◆ GGE vs real time evolution

$$\text{GGE: } \langle \hat{u}(x, p) \rangle_{\text{GGE}} = \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L}$$

$$\text{real time: } u(x, p, t) = \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{L} z \right) \right]_{z=x_{0-}(p)+\textcolor{red}{p}t-x}^{z=x_{0+}(p)+\textcolor{red}{p}t-x}$$

$$u(x, p, t) \rightarrow \langle \hat{u}(x, p) \rangle_{\text{GGE}}, \quad (t \rightarrow \infty)$$

$u(x, p, t)$ の2項目を無視できる場合は成立。

→おそらく局所的な物理量を $u(x, p, t)$ で評価する場合は2項目はいつでも無視できる。

→ GGEへの「熱」平衡化を解析的に証明した。

4. GGEとエントロピー生成

Mandal-T.M JHEP 10 (2013) 197, Kulkarni-Mandal-T.M

◆ エントロピー生成

$$u(x, p, t) = \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{L} z \right) \right]_{z=x_{0-}(p)+pt-x}^{z=x_{0+}(p)+pt-x}$$

$$u(x, p, t) \rightarrow \langle \hat{u}(x, p) \rangle_{\text{GGE}}, \quad (t \rightarrow \infty)$$

この近似が十分時間が経つと(少なくとも局所演算子に関しては)良さそう。

4. GGEとエントロピー生成

Mandal-T.M JHEP 10 (2013) 197, Kulkarni-Mandal-T.M

◆ エントロピー生成

$$u(x, p, t) = \frac{x_{0+}(p) - x_{0-}(p)}{L} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k} \left[\sin \left(\frac{2\pi k}{L} z \right) \right]_{z=x_{0-}(p)+pt-x}^{z=x_{0+}(p)+pt-x}$$

$$u(x, p, t) \rightarrow \langle \hat{u}(x, p) \rangle_{\text{GGE}}, \quad (t \rightarrow \infty)$$

この近似が十分時間が経つと(少なくとも局所演算子に関しては)良さそう。

——→ GGEは一般にはmixed stateなので

$$\langle S_{\text{entropy}} \rangle_{\text{GGE}} = O(N).$$

エントロピーが生成されたと見なすことが出来る。

(もちろん、実際の時間発展はunitaryなのでエントロピーは常に0。)

4. GGEとエントロピー生成

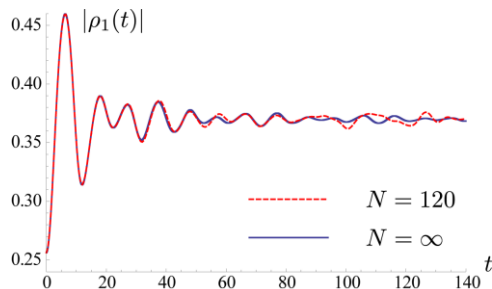
Mandal-T.M JHEP 10 (2013) 197, Kulkarni-Mandal-T.M

◆ Finite N effect

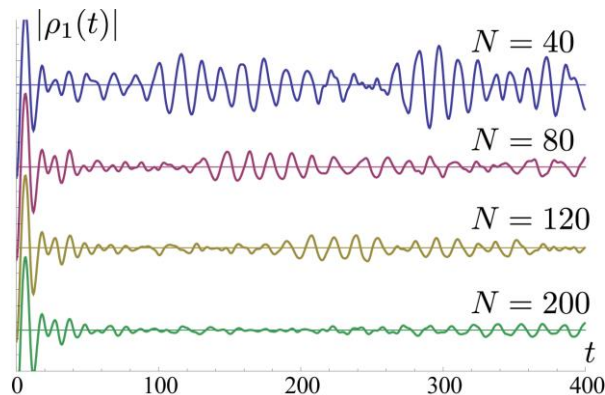
$$u(x, p, t) \rightarrow \langle \hat{u}(x, p) \rangle_{\text{GGE}}, \quad (t \rightarrow \infty) \quad N \rightarrow \infty, \hbar \rightarrow 0, N\hbar = 1.$$

半古典的には良さそう。→ 有限のNではどうか？

この系は有限なNでも波動関数を厳密に解いて比較可能。 [Mandal-T.M JHEP 10 \(2013\) 197](#)



GGEとのずれ

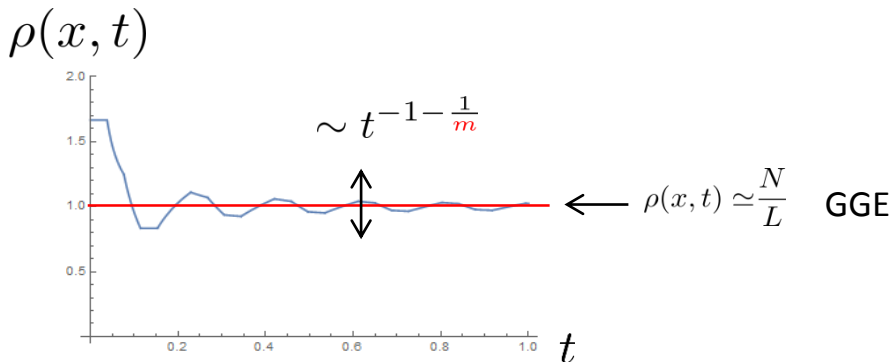


Nが大きいと有為なずれ。→ GGEによる近似が悪い。

まとめ

◆ 本日のまとめ

- 無限個の自由フェルミオン系(≡行列模型)の時間発展を調べた。
- GGEへの「熱」平衡化、Power law damping、
エントロピー生成
→ 通常の量子多体系では困難な問題もGGEに関しては
解析的に調べることが可能。
- 粒子の周期運動 → ポアソン和公式
→ 0モードがGGE & その他のモードがdamping



◆ 今後の課題

- 可積分性は弦理論の様々な場合で出現。
→ 他にもGGEが重要になる例が存在する可能性がある。

$$\hat{\rho}_{GGE} \equiv \frac{1}{Z} \exp \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \hat{Q}_m \right)$$

Vasiliev理論(Higher spin理論)のBHはGGE BH?

- Matrix modelのdouble scaling limit (非臨界弦とGGE)
- 可積分が弱く破れた場合は何が起こるか?

$$S/N^2 = \frac{1}{N} \int dt \text{Tr} \left(\frac{1}{2} |D_t U|^2 - (V_u(U) + V_u(U^\dagger)) \right) + \epsilon \text{Tr} U \text{Tr} U^\dagger$$

↑
可積分性を壊す相互作用