CFT Description of Identity String Field: Toward Derivation of the VSFT Action

岸本　功
(京大基研)

I.K., K.Ohmori, hep-th/**0112169**

Introduction

- Senの予想

ボゾニックな開弦の理論では、摂動的真空はタキオンモードを持つので不安定。

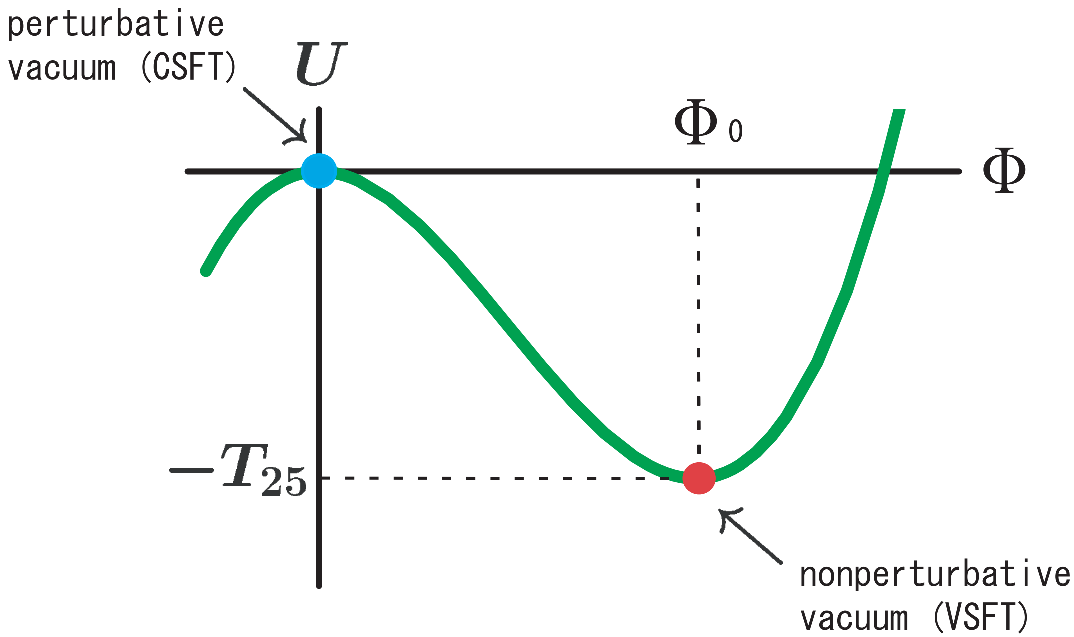
タキオン凝縮により安定な真空にいく。

そこでは開弦が無くなっている＝D25-braneが消える（開弦だけの理論になる）

⇒　弦の場の理論による解析が有効

Hata,Moriyama,Teraguchi,Shinohara,...

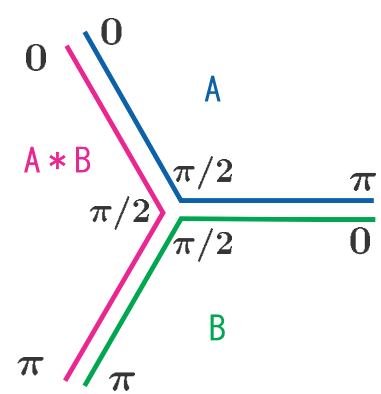
open string (D25-brane)



Wittenの弦の場の理論(1986)**を使う：**

Cubic String Field Theory (CSFT)

$$S_W = -\frac{1}{g_o^2}\left[\frac{1}{2}\langle\Phi, Q_B\Phi\rangle + \frac{1}{3}\langle\Phi, \Phi * \Phi\rangle\right]$$



Senの予想を言い換えると…

CSFTの運動方程式：

$$Q_B\Phi + \Phi * \Phi = 0$$

の解 Φ_0 でのpotentialの値がD25-braneの値に等しい：

$$-S_W |_{\Phi_0} / V_{26} = T_{25}$$

その解のまわりでは開弦の物理的状態がない、つまり

$$Q\Phi = Q_B\Phi + \Phi_0 * \Phi - (-1)^{|\Phi|}\Phi * \Phi_0$$

の Q のcohomologyが消えている。

⇒ レベルトランケーションにより数値的にいろいろ確かめられているが、証明には解析的な厳密解が必要。

Rastelli-Sen-Zwiebach (RSZ)は非摂動的真空の周りの理論を予想した(2000)：

Vacuum String Field Theory (VSFT)

$$S_{\mathrm{V}} = -\kappa_0 \left[\frac{1}{2} \langle \Phi, Q\Phi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Phi, \Phi * \Phi \rangle \right]$$

$$Q = \sum_n f_n \left(c_n + (-1)^n c_{-n} \right)$$

ここで Q は以下の性質をみたすもの。

$$Q^2 = 0, Q(A * B) = QA * B + (-1)^{|A|} A * QB, \langle QA, B \rangle = -(-1)^{|A|} \langle A, QB \rangle$$

Q はcohomologyが自明でmatterの情報を含まない。

- Gaiotto-Rastelli-Sen-Zwiebach(GRSZ)は標準的な運動項を提案した (2001)：

$$Q=\frac{1}{2i}\big(c(i)-c(-i)\big)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(c_{2k}+c_{-2k})$$

- ここではGRSZのVSFTシナリオが正しいと信じて、それを導くCSFTの解を議論する。

Horowitzたちが考えた形式解(1988)からの類推で、CFTに基づいた記述で解を与える。

⇒ Identity String Fieldが重要。

Contents

- Introduction
- Our Framework

  ＬＰＰ＋ＧＧＲＴ
- From CSFT to VSFT
- Subtlety of the Identity State
- Summary and Discussion

Our Framework

- CFTによるCSFTの記述 LeClair-Peskin-Preitschopf(1989) (LPP)

内積

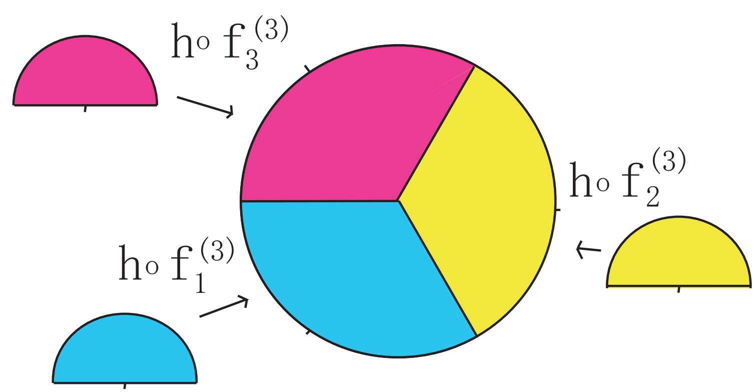
$$\langle A, B\rangle = \langle I\circ A(0) B(0)\rangle_{\mathrm{UHP}} \qquad I(z) = -\frac{1}{z}$$

＊積

$$\langle A, B * C\rangle = \langle f_1^{(3)}\circ A(0)\, f_2^{(3)}\circ B(0)\, f_3^{(3)}\circ C(0)\rangle_{\mathrm{UHP}}$$

$$f_1^{(3)}(z) = h^{-1}\left(e^{-\frac{2\pi}{3}i} h(z)^{\frac{2}{3}}\right) \qquad f_2^{(3)}(z) = h^{-1}\left(h(z)^{\frac{2}{3}}\right)$$

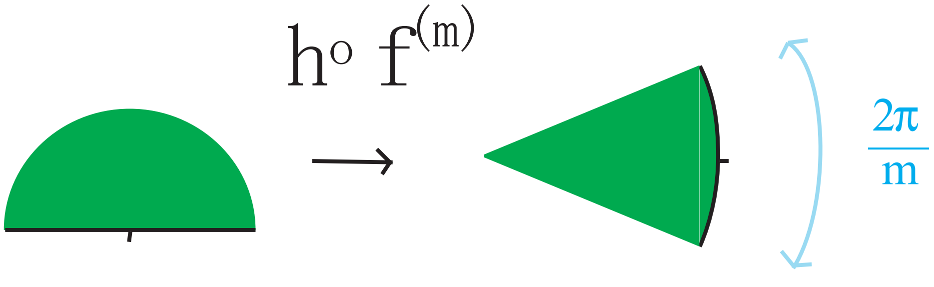
$$f_3^{(3)}(z) = h^{-1}\left(e^{\frac{2\pi}{3}i} h(z)^{\frac{2}{3}}\right) \qquad h(z) = \frac{1+iz}{1-iz}$$



- Wedge State $|m\rangle$

$$\langle m, A\rangle = \left\langle f^{(m)} \circ A(0) \right\rangle_{\mathrm{UHP}}$$

$$f^{(m)}(z) = h^{-1}\left(h(z)^{\frac{2}{m}} \right)$$

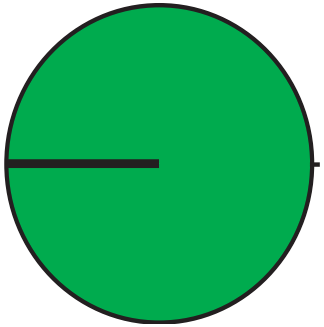


特に $\langle m | Q_B | \phi \rangle = \left\langle f^{(m)} \circ (Q_B \phi)(0) \right\rangle = \left\langle Q_B \left(f^{(m)} \circ \phi(0) \right) \right\rangle = 0$

- Identity State $|I\rangle$ （ $m = 1$ **の場合**）

$$\langle I, A\rangle = \left\langle f_I \circ A(0) \right\rangle_{\mathrm{UHP}}$$

$$f_I(z) = h^{-1}\left(h(z)^2 \right)$$



Generalized Gluing and Resmoothing Theorem (GGRT) Schwarz-Sen (1990)

$$\sum_r \left\langle f_1\circ\Phi_{r_1}(0)\cdots f_n\circ\Phi_{r_n}(0)\, f\circ\Phi_r(0)\right\rangle_{D_1}\left\langle g_1\circ\Phi_{s_1}(0)\cdots g_m\circ\Phi_{s_m}(0)\, g\circ\Phi_r^{\,c}(0)\right\rangle_{D_2}$$

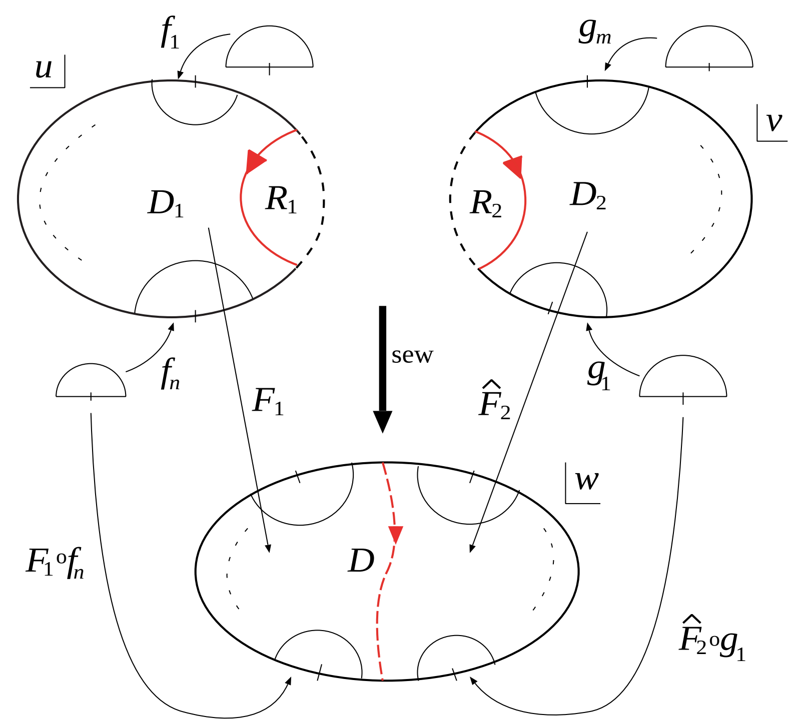
$$=\left\langle F_1\circ f_1\circ\Phi_{r_1}(0)\cdots F_1\circ f_n\circ\Phi_{r_n}(0)\,\hat{F}_2\circ g_1\circ\Phi_{s_1}(0)\cdots \hat{F}_2\circ g_m\circ\Phi_{s_m}(0)\right\rangle_D$$

ここで

$$\sum_r \left|\Phi_r\right\rangle\left\langle\Phi_r^c\right| = 1$$

貼り合わせた線上で

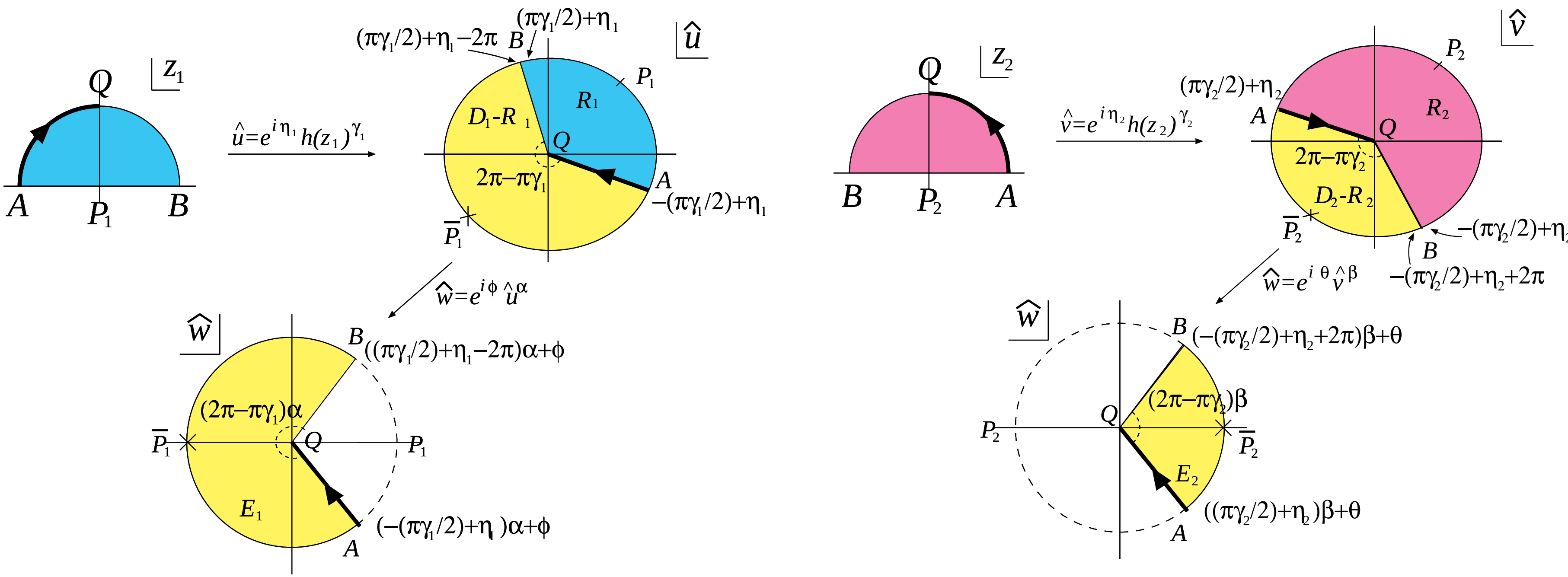
$$F_1\circ f = \hat{F}_2\circ g\circ I$$



- Wedge stateの場合：

$f(z)=h^{-1}\left(e^{i\eta_1}h(z)^{\gamma_1}\right)$ と $g(z)=h^{-1}\left(e^{i\eta_2}h(z)^{\gamma_2}\right)$ が与えられたとき

$$F_1(z)=h^{-1}\left(e^{i\pi+i\frac{(\pi-\eta_1)\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2}}h(z)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2}}\right),\hat{F}_2(z)=h^{-1}\left(e^{i2\pi-i\frac{(\pi+\eta_2)\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2}}h(z)^{\frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2}}\right)$$



＊積の計算例

$$\langle \phi, A * \boldsymbol{I} \rangle = \sum_r \langle \phi, A * \Phi_r \rangle \langle \Phi_r^c, \boldsymbol{I} \rangle$$

GGRT

$$= \sum_r \left\langle f_1^{(3)} \circ \phi(0) f_2^{(3)} \circ A(0) f_3^{(3)} \circ \Phi_r(0) \right\rangle \left\langle f_{\boldsymbol{I}} \circ \Phi_r^c \right\rangle = \left\langle F_1 \circ f_1^{(3)} \circ \phi(0) F_1 \circ f_2^{(3)} \circ A(0) \right\rangle$$

$$= \left\langle R_{\frac{\pi}{2}} \circ \phi(0) R_{\frac{3\pi}{2}} \circ A(0) \right\rangle = \langle I \circ \phi(0) A(0) \rangle = \langle \phi, A \rangle \qquad \forall \phi$$

$SL(2,R)$ 不変性

$$R_\theta(z) = \frac{(\cos\theta/2)z + \sin\theta/2}{-(\sin\theta/2)z + \cos\theta/2}$$

同様の計算で次の関係式を証明できる：

$$\langle \phi, A * \boldsymbol{I} \rangle = \langle \phi, \boldsymbol{I} * A \rangle = \langle \phi, A \rangle, \langle \phi, O\boldsymbol{I} * \boldsymbol{I} \rangle = \langle \phi, \boldsymbol{I} * O\boldsymbol{I} \rangle = \langle \phi, O\boldsymbol{I} \rangle,$$

$$\langle \phi, m * n \rangle = \langle \phi, n * m \rangle = \langle \phi, m + n - 1 \rangle$$

From CSFT to VSFT

GRSZのVSFTシナリオ

タキオン凝縮解の周りで展開　　　　　　　　　　特異な場の再定義

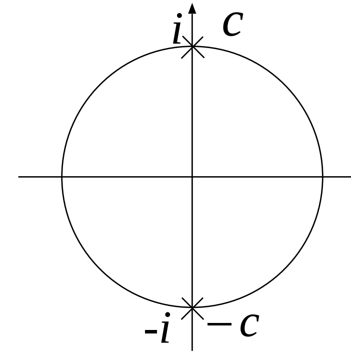
CSFT　⇒　(非摂動真空周りのSFT)　⇒　VSFT

(G)RSZたちはVSFTでのmatterとghost partがfactorizeしたsliver型の解がD25-brane解とみなす:　VSFT ⇒ CSFT

一方、我々はもっと単純に　CSFT　⇒　VSFT　を直接導く解探す。

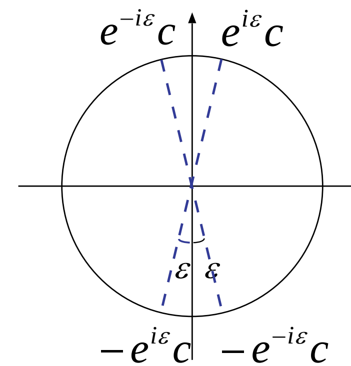
※共に正しいとすると両者はゲージ変換と場の再定義でつながる!?

GRSZのVSFTの運動項の Q は正確には



$$Q=\frac{1}{2i}\big(c(i)-c(-i)\big)=\lim_{\varepsilon\to 0}Q_\varepsilon,$$

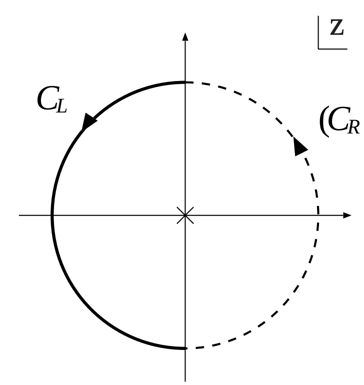
$$Q_\varepsilon=\frac{1}{4i}\Big(e^{-i\varepsilon}c(ie^{i\varepsilon})+e^{i\varepsilon}c(ie^{-i\varepsilon})-e^{-i\varepsilon}c(-ie^{i\varepsilon})-e^{i\varepsilon}c(-ie^{-i\varepsilon})\Big)$$



で定義されていることに注意すると
昔のHorowitzたちの形式解 $-\mathrm{Q_L}\boldsymbol{I}+C_\mathrm{L}(f)\boldsymbol{I}$
の類推から、求める解の候補は

$$\Phi_0=-\mathrm{Q_L}\boldsymbol{I}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a}{2}Q^\varepsilon\boldsymbol{I},$$

$$\mathrm{Q_L}=\int_{C_L}\frac{dz}{2\pi i}j_\mathrm{B}(z),\quad Q^\varepsilon=\frac{1}{2i}\Big(e^{-i\varepsilon}c(ie^{i\varepsilon})-e^{i\varepsilon}c(-ie^{-i\varepsilon})\Big)$$



- <u>運動方程式をみたすこと</u>：

LPP+GGRTより $\left\langle \phi, Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I} * Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I} \right\rangle = 0$ となる。

j_{B} がweight 1のprimaryより「部分積分公式」が成立：

$$\langle \phi, \mathrm{Q}_{\mathrm{R}} O_A m * O_B m \rangle + (-1)^{|A|} \langle \phi, O_A m * \mathrm{Q}_{\mathrm{L}} O_B m \rangle$$

$$= \left\langle G_1 \circ F_1 \circ f_1^{(3)} \circ \phi(0) \int_C \frac{dz}{2\pi i} j_{\mathrm{B}}(z) G_1 \circ \hat{F}_2 \circ f^{(m)} \circ I \circ O_A \hat{G}_2 \circ f^{(m)} I \circ O_B \right\rangle = 0,$$

$$C = G_1 \circ \hat{F}_2 \circ f^{(m)} \circ I(C_R) + \hat{G}_2 \circ f^{(m)} \circ I(C_L) \sim 0,$$

$$F_1 \circ f_2^{(3)} = \hat{F}_2 \circ f^{(m)} \circ I, G_1 \circ \left(F_1 \circ f_3^{(3)}\right) = \hat{G}_2 \circ f^{(m)} \circ I$$

これと $\{\mathrm{Q}_{\mathrm{B}}, j_{\mathrm{B}}(z)\} = 0$ より

$$\left\langle \phi, \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{I} * \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{I} \right\rangle = \left\langle \phi, \mathrm{Q}_{\mathrm{R}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{I} * \boldsymbol{I} \right\rangle = \left\langle \phi, \mathrm{Q}_{\mathrm{R}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{I} \right\rangle$$

$$= -\left\langle \phi, \mathrm{Q}_{\mathrm{R}}\boldsymbol{I} * \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{I} \right\rangle = \left\langle \phi, \boldsymbol{I} * \mathrm{Q}_{\mathrm{L}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{I} \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \phi, \mathrm{Q}_{\mathrm{B}}\mathrm{Q}_{\mathrm{L}}\boldsymbol{I} \right\rangle = 0$$

以上より $\langle \phi, \Phi_0 * \Phi_0 \rangle = -\frac{a}{2}\left(\langle \phi, \mathrm{Q_L}\boldsymbol{I} * Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I} \rangle + \langle \phi, Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I} * \mathrm{Q_L}\boldsymbol{I} \rangle\right) = -\frac{a}{2}\langle \phi, \mathrm{Q_B} Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I} \rangle$

従って、

$$\langle \phi, \mathrm{Q_B}\Phi_0 + \Phi_0 * \Phi_0 \rangle = 0$$

- <u>解のまわりで展開</u>:

LPP+GGRTより $\frac{1}{2}\left(\langle \phi, Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I} * A \rangle - (-1)^{|A|}\langle \phi, A * Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I} \rangle\right) = \langle \phi, Q_{\varepsilon} A \rangle$ となる。

これらを使うと

$$S_{\mathrm{W}}\big|_{\Phi_0+\Psi} - S_{\mathrm{W}}\big|_{\Phi_0} = -\frac{1}{g_{\mathrm{o}}^2}\left[\frac{a}{2}\langle \Psi, Q_{\varepsilon}\Psi \rangle + \frac{1}{3}\langle \Psi, \Psi * \Psi \rangle\right]$$

$a \to \left(g_{\mathrm{o}}^2 \kappa_0\right)^{1/3}, \Psi \to \left(g_{\mathrm{o}}^2 \kappa_0\right)^{1/3}\Phi, \varepsilon \to 0$ でGRSZのVSFT作用！

Subtlety of the Identity State

Senの予想の検証：D25-brane tensionを再現するか？

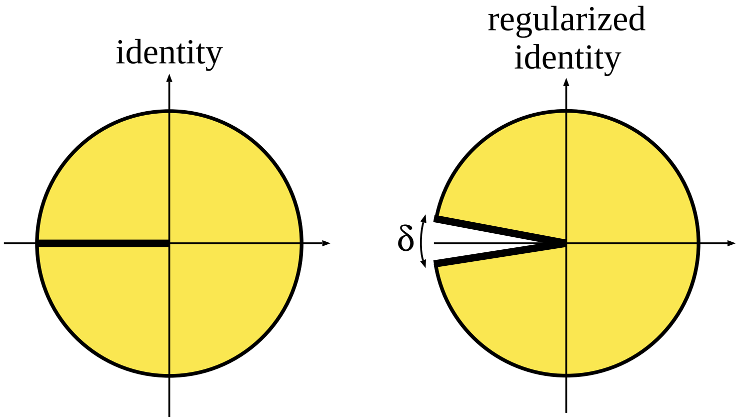
素朴には作用の値はゼロ：

$$Q_B\Phi_0 + \Phi_0 * \Phi_0 = 0, \mathrm{Q_L}\boldsymbol{I} * \mathrm{Q_L}\boldsymbol{I} = 0, Q^\varepsilon\boldsymbol{I} * Q^\varepsilon\boldsymbol{I} = 0$$

を使うと

$$S_W\big|_{\Phi_0} \propto \langle \Phi_0, \Phi_0 * \Phi_0 \rangle = 0$$

運動方程式を使わずにLPP+GGRTで作用の値を評価：



<u>GGRTのためには正則化が必要</u>

簡単のためPacman正則化をすると…

$$\left\langle Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I}_{\delta}, \mathrm{Q_B} Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I}_{\delta}\right\rangle = -\delta^2 \sin^2\varepsilon \left[\frac{1}{2}\left\{\left(\tan\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{2}{\delta}} + \left(\tan\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\frac{2}{\delta}}\right\} + 3\right] V_{26},$$

$$\left\langle Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I}_{\delta}, Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I}_{\delta} * Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I}_{\delta}\right\rangle = \frac{81\sqrt{3}}{32}\delta^3 \sin^3\varepsilon \left[\left(\tan\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{4}{3\delta}} + \left(\tan\frac{\varepsilon}{2}\right)^{-\frac{4}{3\delta}} + 2\right] V_{26}, \ldots$$

$\delta \to 0$ **のとき** a **を調整すれば有限で非零な値がでそうだが** $\varepsilon \to 0$ **では不定。**

$c_0\boldsymbol{I}$ の怪 [Rastelli-Zwiebach(2000)]

- c_0 は$*$積のderivationで $\boldsymbol{I}$ は単位元だとすると

$$c_0 A = c_0(\boldsymbol{I} * A) = (c_0\boldsymbol{I}) * A + \boldsymbol{I} * (c_0 A) = (c_0\boldsymbol{I}) * A + c_0 A,$$

$$\therefore (c_0\boldsymbol{I}) * A = 0, \forall A.$$

特に $A = \boldsymbol{I}$ とすると $0 \neq c_0\boldsymbol{I} = (c_0\boldsymbol{I}) * \boldsymbol{I} = 0(??)$

純粋に振動子表示の言葉で★積を考えると $\boldsymbol{I}$ は
★積の単位元ではなく: $\langle \boldsymbol{I} | V_3\rangle \neq |R\rangle, \therefore |(c_0\boldsymbol{I})\bigstar\boldsymbol{I}\rangle \neq |c_0\boldsymbol{I}\rangle$
また直接の計算により

$$\langle \boldsymbol{I} | c_0 | V_3\rangle = 0 \Rightarrow |(c_0\boldsymbol{I})\bigstar A\rangle = 0, \forall |A\rangle, \therefore |(c_0\boldsymbol{I})\bigstar\boldsymbol{I}\rangle = 0$$

となり矛盾はない。[I.K.(2001)]

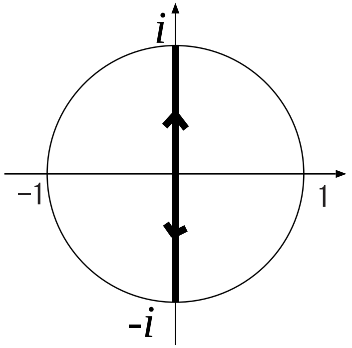
CFTの言葉ではLPP+GGRTに基づいて

$$\left\langle \phi, \left(c_0 \boldsymbol{I}\right) * A \right\rangle = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-2} \left\langle \phi, \left(c(z) \boldsymbol{I}\right) * A \right\rangle$$

$$= \int \frac{dz}{2\pi i} \frac{1 + 28z^2 + 70z^4 + 28z^6 + z^8}{4(1-z)^2 (1+z)^2} \left\langle F_1^l \circ f_1^{(3)} \circ \phi(0) \left(c(z) - c(-z)\right) F_1^l \circ f_3^{(3)} \circ A(0) \right\rangle$$

$$= 0$$

$$\left(F_1^l \circ f_1^{(3)}(0) = 1, F_1^l \circ f_3^{(3)}(0) = -1\right)$$



しかし

$$\left\langle \phi, \left(c_0 \boldsymbol{I}\right) * \boldsymbol{I} \right\rangle = \left\langle \phi, c_0 \boldsymbol{I} \right\rangle \neq 0$$ （？）

Summary and Discussion

- LPPとGGRTのみに基づいてwedge stateやidentity stateの入った＊積を計算した。
- GRSZのVSFTシナリオが正しいと仮定してCSFTの作用から直接VSFT作用を導き出す解をもとめた。
- Senの予想を証明するためにはD25-brane tensionを再現すべき。⇒ identity stateの適当な正則化が必要。
- Pacman正則化によると、素朴にはゼロなactionの値が非零になりうる兆候がみられる。
- GRSZのVSFTが特異であるため、それを導く我々の解も特異である。

※ identity stateのCFTによる扱いと振動子表示によるものとの間に微妙にくい違いがあるので混用するのは危険（？）

- CFTの言葉(LPP+GGRT)

$$\langle \phi, Q_\varepsilon \boldsymbol{I} \rangle = 0, (\varepsilon \neq 0),$$

$$\left\langle \phi, \frac{1}{2i}\big(c(i) - c(-i)\big)\boldsymbol{I} \right\rangle = \left\langle \phi, \lim_{\varepsilon \to 0} Q_\varepsilon \boldsymbol{I} \right\rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \langle \phi, Q_\varepsilon \boldsymbol{I} \rangle = 0$$

[GRSZ(2001)]

- 振動子表示

$$Q_\varepsilon |\boldsymbol{I}\rangle = \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\varepsilon\right) c_0 |\boldsymbol{I}\rangle \neq 0, (\varepsilon \neq 0),$$

$$\frac{1}{2i}\big(c(i) - c(-i)\big)|\boldsymbol{I}\rangle = \big(1 + 2\zeta(0)\big) c_0 |\boldsymbol{I}\rangle = 0$$

$$\langle \phi, \mathrm{Q_L} \boldsymbol{I} * \mathrm{Q_L} \boldsymbol{I} \rangle = \langle \phi, \mathrm{Q_L^2} \boldsymbol{I} \rangle = 0$$

$$\mathrm{Q_L^2} |\boldsymbol{I}\rangle = -\frac{2\zeta(0)}{\pi^2}\big(1 + 2\zeta(0)\big) \mathrm{Q_B} c_0 |\boldsymbol{I}\rangle = 0$$

ζ関数正則化が必要（？）

あるいは $c_0 I$ の怪（？）

- Takahashi-Tanimotoの解(2002)との関係？

Pure gaugeの形

$$\Psi_0 = \mathrm{Q_L}\left(e^{h}-1\right)\boldsymbol{I} - C_{\mathrm{L}}\left(\left(\partial h\right)^2 e^{h}\right)\boldsymbol{I}$$
$$= \exp\left(q_{\mathrm{L}}(h)\boldsymbol{I}\right) * \mathrm{Q_B}\exp\left(-q_{\mathrm{L}}(h)\boldsymbol{I}\right)$$

でゲージパラメータを非常に特異

$$h \to -\infty,\, h(\pm i) = 0$$

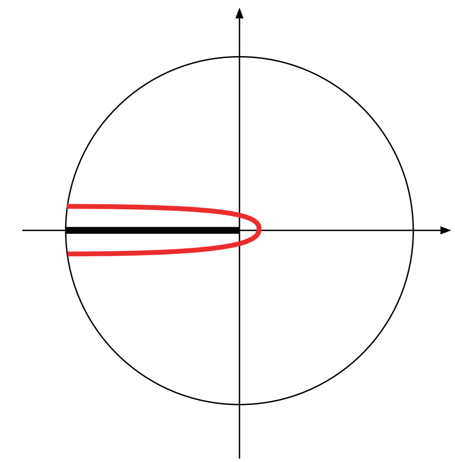
にしたものが我々の解（？）

$$\Phi_0 = -\mathrm{Q_L}\boldsymbol{I} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a}{2}Q^{\varepsilon}\boldsymbol{I}$$

• 作用の値の評価でpacman型でない正則化

例：

$$\left|I\right\rangle \to \left|I^{\delta}\right\rangle = e^{-\delta L_0}\left|I\right\rangle$$



CFT(LPP+GGRT)の立場では

$$f_I(z) = \frac{2z}{1-z^2} \to f_{I^\delta} = \frac{2z}{1-e^{-2\delta}z^2}$$

としてGGRTのmapを構成して計算せよという問題。

振動子表示で計算してもよいとすると…

$$\left\langle I^{\delta}\right| c_{-1}c_0c_1 \left|I^{\delta}\right\rangle = \frac{e^{-\frac{d-26}{12}\delta}\eta\left(\frac{2i\delta}{\pi}\right)^{-\frac{d-2}{2}}}{2\sinh 2\delta}V_{26},\cdots$$